

Vol. V · Nº 2 · 1983

REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

# RBCM

PATROCINADA PELA ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS • ABCM



EDITORA CAMPUS

ISSN 0100-7386

A Revista Brasileira de Ciências Mecânicas é uma publicação técnico-científica da Editora Campus Ltda., patrocinada pela Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Destina-se a divulgar trabalhos significativos de pesquisa científica e/ou tecnológica nas áreas de Engenharia Civil, Mecânica, Metalúrgica, Naval, Nuclear e Química e também em Física e Matemática Aplicada. Pequenas comunicações que apresentem resultados interessantes obtidos de teorias e técnicas bem conhecidas serão publicadas sob o título de Notas Técnicas.

Os trabalhos submetidos devem ser inéditos, isto é, não devem ter sido publicados anteriormente em periódicos de circulação nacional ou internacional. Excetuam-se em alguns casos publicações em anais e congressos. A apreciação do trabalho levará em conta a originalidade, a contribuição à ciência e/ou tecnologia, a clareza de exposição, a propriedade do tema e a apresentação. A aceitação final é da responsabilidade dos Editores e do Conselho Editorial.

Os artigos devem ser escritos em português, ou espanhol ou em inglês. As normas detalhadas para a datilografia e a montagem do trabalho, bem como os gabaritos, devem ser solicitados ao Editor Executivo no endereço abaixo:

*Rubens Sampaio*

Departamento de Engenharia Mecânica

PUC/RJ

Rua Marquês de São Vicente 225 — Gávea

22453 — Rio de Janeiro — RJ — Brasil

As normas de apresentação devem ser obedecidas rigorosamente. Os trabalhos com um número de páginas que não exceda a dez (10) serão publicados sem ônus para o autor. Cada página excedente está sujeita a uma taxa de Cr\$ 2.115,00 (dois mil, cento e quinze cruzeiros). A quantia correspondente deverá ser enviada em nome da Editora Campus Ltda., Rua Japeri 35 — Rio Comprido — 20261 — Rio de Janeiro — RJ — Brasil, com os originais do trabalho.

Uma vez pronto o trabalho, o autor deverá enviar duas (2) cópias reduzidas — aproximadamente 21 X 28 cm — para o Editor Executivo, com uma carta de encaminhamento contendo o(s) título(s) do(s) artigo(s), nome(s) da(s) instituição(ões) e endereço(s) do(s) autor(es).

Anexo à carta o(s) autor(es) deverá(ão) enviar também o título de seu artigo e o sumário em português e em inglês. Os textos em inglês deverão ser datilografados em uma folha isolada.

*Não envie os originais antes de receber a aceitação final para a publicação.*

A submissão de um artigo para publicação implica na transferência do copyright do artigo, do(s) autor(es) para a editora.

Os conceitos emitidos em artigos assinados são de absoluta e exclusiva responsabilidade de seus autores.

© 1983, Editora Campus Ltda.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta revista poderá ser reproduzida ou transmitida sejam quais forem os meios empregados, eletrônicos, mecânicos, fotográficos, gravação ou quaisquer outros, sem a permissão por escrito da editora.

#### **Assinaturas**

Editora Campus Ltda.

Rua Japeri 35 Rio Comprido

Tel.: (021) 284 8443 PABX

20261 Rio de Janeiro RJ Brasil

End. Telegráfico: CAMPUSRIO

**A REVISTA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS  
É PUBLICADA COM O APOIO DO CNPq E FINEP.**

REVISTA

BRASILEIRA DE  
CIÊNCIAS  
MECÂNICAS

Associação Brasileira de Ciências Mecânicas

## MEMBROS DA DIRETORIA DA ABCM

Euclides de Carvalho Fernandes (Presidente); Pedro Carajilescov (Vice-Presidente); Arno Blass (1º Secretário); Raúl Antonino Feijóo (2º Secretário); Samir Nagi Yousri Jerjes (1º Tesoureiro); José de Mendonça Freire (2º Tesoureiro).

Vol. V, nº 2, 1983

EDITOR  
RESPONSÁVEL

L. Bevilacqua

EDITOR  
EXECUTIVO

R. Sampaio

CONSELHO  
EDITORIAL

A. Blass

J.J. de Espíndola

R.A. Feijóo

A.C.N.R. Galeão

M.H. Hirata

L. Hsu

D. Mahrus

O. Maizza Neto

G. Massarini

F.E.M. Saboya

J.T. Sielawa

F. Venâncio Filho

The Eigenvalue Problem for a Certain Class of Discrete Linear Systems: A Perturbation Approach 3

Peter Hagedorn

Darmstadt, Germany

Uma Abordagem Histórica sobre Componentes Físicos de Tensores 21

Antonio Marmo de Oliveira

Wolf Altman

Divisão de Engenharia Aeronáutica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 12200 – São José dos Campos, SP

Os Efeitos de um Processo de Refino de Grão do Alumínio Comercial, por Injeção de Gases Inertes, sobre a Qualidade de Seus Produtos 31

Paulo da Silva Pontes

Engenheiro de Materiais, Mestre em Engenharia Mecânica, Campinas, SP

Nivaldo Lemos Cupini

Diretor Associado da Faculdade de Engenharia de Campinas, UNICAMP – Campinas, SP

Solução Analítica de Modelo de Remolhamento Aplicado a uma Barra Seca Superaquecida 41

Germán Enrique Cares Cuevas

Deptº de Química da UFV – 36570 – MG

Aplicação de B-Splines no Problema de Weisz-Hicks 53

Fabio H.L.A. Ribeiro

Jorge Gusmão da Silva

IME

Rubens Sampaio

PUC/RJ-DEM

EDITORA CAMPUS

# THE EIGENVALUE PROBLEM FOR A CERTAIN CLASS OF DISCRETE LINEAR SYSTEMS: A PERTURBATION APPROACH

Peter Hagedorn  
Darmstadt, Germany

## SUMÁRIO

A second order perturbation solution is given for the eigenvalue problem of damped gyroscopic systems. The unperturbed system is non-gyroscopic but may be damped, with a "simple" damping matrix; the perturbation consists of small additional damping and gyroscopic terms. Particular attention is given to the case of multiple eigenvalues. Several are discussed.

## INTRODUCTION

In engineering vibration problems the damping forces are frequently weak and are often not even well known. It therefore may be advantageous to reduce the eigenvalue problem of a damped system to the simpler problem corresponding to the undamped system and to determine the eigenvalues and eigenvectors of the former problem via a perturbation approach [1]. In a recent paper [2] Meirovitch and Ryland studied the eigenvalue problem given by the equations of motion.

$$M\ddot{q} + G\dot{q} + \epsilon D\dot{q} + Cq = 0 \quad (1)$$

with  $M$  and  $C$  real positive definite  $n \times n$  matrices,  $D$  a real symmetric  $n \times n$  matrix and  $G$  a real  $n \times n$  skew symmetric matrix,  $q(t)$  being the  $n$ -dimensional vector of the generalized coordinates;  $\epsilon$

is a small perturbation parameter. In [2] the authors used a perturbation approach as well as a technique developed earlier to obtain the complex eigenvectors and eigenvalues of the homogeneous problem corresponding to [1] in terms of real quantities alone. The solution of the eigenvalue problem for weakly damped gyroscopic systems was thus reduced to the solution of the much simpler conservative problem. The simplicity of the formulas given in [2] is due to the properties of the eigenvalue problem for undamped gyroscopic systems, as described in [3]; if the unperturbed system contains damping terms this simplicity will in general be destroyed.

In the present paper we consider a problem of the type

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + \epsilon B\dot{q} + Cq = 0 \quad (2)$$

where  $M$ ,  $C$  have the abovementioned properties, while the real matrix  $D$  satisfies the condition

$$(M^{-1}D)(M^{-1}C) = (M^{-1}C)(M^{-1}D). \quad (3)$$

The real matrix  $B$  can be written as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix

$$B = D_1 + G_1, \quad (4)$$

with  $D_1$  symmetric and  $G_1$  skew-symmetric, so that the perturbation in (2) may consist of weak gyroscopic forces and small additional damping terms. The "Ansatz"

$$q = \lambda e^{st} \quad (5)$$

in (2) gives the eigenvalue problem

$$(s^2M + sD + \epsilon sB + C)\lambda = 0 \quad (6)$$

and condition (3) guarantees (see [4]) that for  $\epsilon = 0$  there exist real eigenvectors

$$\lambda = r_1, r_2, \dots, r_n \quad (7)$$

satisfying the conditions

$$r_1^T M r_k = \delta_{ik}, \quad r_1^T C r_k = \delta_{ik} \omega_i^2, \quad r_1^T D r_k = \delta_{ik} 2\gamma_i. \quad (8)$$

In (8)  $\omega_i^2$  and  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  are respectively the square of the  $i$ -th circular frequency of the undamped system and a normalized damping factor of the  $i$ -th mode.

If the damping matrix  $D$  in (2) satisfies the condition (3) which guarantees the existence of the eigenvectors of the unperturbed problem satisfying (8) we will speak of "simple" damping. A particularly important case of simple damping is that in which  $D$  is proportional to  $C$  or a linear combination of the matrices  $M$  and  $C$ .

It should be noted that while in [2] the unperturbed system was gyroscopic but undamped, in the present case the unperturbed system is damped by non-gyroscopic. Clearly the scope of the formulas obtained is therefore different in both cases. In [5] the eigenvalue problem (6) was discussed for  $D = 0$ .

#### PERTURBATIONAL FORMULATION OF THE PROBLEM

Clearly the eigenvalues  $s(\epsilon)$  and the eigenvectors  $\ell(\epsilon)$  of (6) will depend on the parameter  $\epsilon$  and will in general be complex. For the  $k$ -th eigenvalue and the  $k$ -th eigenvector expansions of the form

$$s(k) = s_0(k) + \epsilon s_1(k) + \epsilon^2 s_2(k) + \dots, \quad (9)$$

$$\ell(k) = \ell_0(k) + \epsilon \ell_1(k) + \epsilon^2 \ell_2(k) + \dots, \quad (10)$$

are sought. This is done in a heuristic manner, since the analytic dependence on  $\epsilon$  is not guaranteed in the general case. In the case of simple eigenvalues in the unperturbed problem, analyticity holds (see [1]) and also in most other engineering applications of the form (9), (10) exist.

Introducing (9), (10) in (6) gives

$$\left[ (s_0 + \epsilon s_1 + \epsilon^2 s_2 + \dots)^2 M + (s_0 + \epsilon s_1 + \epsilon^2 s_2 + \dots)(D + \epsilon B) + C \right] (\ell_0 + \epsilon \ell_1 + \epsilon^2 \ell_2 + \dots) = 0 \quad (11)$$

and the comparison of terms of the same order in  $\epsilon$  gives rise to the following system of equations:

$$(s_0^2 M + s_0 D + C) \ell_0 = 0 \quad , \quad (12)$$

$$(s_0^2 M + s_0 D + C) \ell_1 + (2s_0 s_1 M + s_1 D + s_0) \ell_0 = 0 \quad , \quad (12')$$

$$(s_0^2 M + s_0 D + C) \ell_2 + (2s_0 s_1 M + s_1 D + s_0 B) \ell_1 + [(s_1^2 + 2s_0 s_2) M + s_2 D + s_1 B] \ell_0 = 0 \quad (12'')$$

etc.

In (11) to (12'') the upper index  $k$  characterizing the particular eigenvalue and eigenvector was omitted, for greater simplicity.

A first inspection of these equations shows that only (12) does in general form an eigenvalue problem in  $s_0$ ,  $\ell_0$ , (12') is a simple nonhomogeneous system of linear equations in  $s_1$  and  $\ell_1$ ; similarly (12'') is a linear system in the unknowns  $s_2$ ,  $\ell_2$ , etc. The determination of the corrections  $s_1$ ,  $s_2$ , ... to the eigenvalues  $s_0$  of the unperturbed system and of  $\ell_1$ ,  $\ell_2$ , ... to the eigenvectors  $\ell_0$  does therefore in general only involve the solution of linear equations.

The solution becomes particularly simple if the eigenvectors are conveniently normalized. For each eigenvector  $\ell^{(k)}(\epsilon)$  we will use a normalization of the form

$$\ell_0^{(k)*} M \ell^{(k)}(\epsilon) = 1 \quad , \quad (13)$$

i.e. the projection (via  $M$ ) of the perturbed eigenvector  $\ell^{(k)}(\epsilon)$  on the corresponding unperturbed eigenvector  $\ell_0^{(k)}$  is constant and equal to one for all  $\epsilon$ ; it is not difficult to show that such a normalization is always possible. The asterisk in (13) and in the following equations stands for "transposed complex conjugate".

Introducing (10) in (13) gives

$$\ell_0^{(k)*} M \ell_0^{(k)} = 1 \quad , \quad \ell_0^{(k)*} M \ell_p^{(k)} = 0 \quad , \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

i.e. all the perturbations  $\ell_p^{(k)}$  of the  $k$ -th eigenvector are orthogonal to  $\ell_0^{(k)}$  with respect to  $M$ .

#### SOLUTION FOR THE CASE OF SIMPLE EIGENVALUES

First the (unperturbed) eigenvalue problem (12) has to be solved. This is usually done by first solving the problem for  $D = 0$  which gives the real eigenvectors  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . In the case of

unrepeated eigenvalues for the undamped system these will also be the eigenvectors of (12) and they can be normalized according to (8). Let us suppose that these normalized eigenvectors  $\lambda_0^{(k)} = r_k$  are known for  $k = 1, 2, \dots, n$ . The eigenvalues then are given by

$$(15) \quad s_0^{(k)^2} + 2\gamma_k s_0^{(k)} + \omega_k^2 = 0$$

as

$$(16) \quad s_0^{(k)} = -\gamma_k + j \sqrt{\omega_k^2 - \gamma_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

for the case of undercritical damping, which we will assume here. Since the eigenvalues and eigenvectors of (19) appear in complex conjugate pairs we only need to calculate half of them, so that we will only consider the upper sign in (16).

With  $\lambda_0^{(k)} = r_k$  it now follows from the normalization condition (14) that the perturbations in the eigenvectors  $\lambda_p^{(k)}$ ,  $p = 1, 2, \dots$  can be written as linear combinations of  $r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, r_{k+1}, \dots, r_n$ :

$$(17) \quad \lambda_p^{(k)} = \sum_{e \neq k} \beta_{p,e}^{(k)} r_e$$

In the next step we wish to calculate  $s_1^{(k)}$  and  $\lambda_1^{(k)}$  from (12'). Multiplication of (12') from the left with  $r_k^T$  gives

$$(18) \quad 2s_0^{(k)} s_1^{(k)} + 2s_2^{(k)} \gamma_k + s_0^{(k)} r_k^T B r_k = 0$$

In view of the orthogonality conditions (8) and using the abbreviation

$$(19) \quad b_{ek} = r_e^T B r_k, \quad e, k = 1, 2, \dots, n$$

one obtains

$$(20) \quad s_1^{(k)} = -\frac{1}{2} \frac{s_0^{(k)} b_{kk}}{s_0^{(k)} + \gamma_k}$$

It is clear that in the case of undercritical damping the denominator does not vanish. For  $D = 0$ , (20) simplifies to

$$(20') \quad s_1^{(k)} = -\frac{1}{2} b_{kk} = -\frac{1}{2} r_k^T D_1 r_k$$



since due to the skew-symmetry of  $G_1$  only the damping terms contribute to  $s_1^{(k)}$ . In this case  $s_1^{(k)}$  is always real and for  $D_1 \geq 0$  one has  $s_1^{(k)} \leq 0$ .

Similarly, multiplying (12') by  $r_e^T$ ,  $e \neq k$  gives

$$(s_0^{(k)})^2 + s_0^{(k)} 2\gamma_e + \omega_e^2) \beta_{1,e}^{(k)} + s_0^{(k)} b_{ek} = 0 \quad (21)$$

from which one obtains

$$s_{1,e}^{(k)} = \frac{s_0^{(k)} b_{ek}}{(\omega_k^2 - \omega_e^2) + 2s_0^{(k)}(\gamma_k - \gamma_e)} \quad (22)$$

and

$$\lambda_1^{(k)} = \sum_{e \neq k} \frac{s_0^{(k)} b_{ek}}{(\omega_k^2 - \omega_e^2) + 2s_0^{(k)}(\gamma_k - \gamma_e)} r_e \quad (23)$$

Again, it is seen that the denominators do not vanish if the  $s_0^{(k)}$  are simple and the damping is undercritical. In the particular case  $D = 0$  (23) simplifies to

$$\lambda_1^{(k)} = j\omega_k \sum_{e \neq k} \frac{b_{ek}}{\omega_k^2 - \omega_e^2} r_e \quad (23')$$

i.e. the first correction to the eigenvectors is then purely imaginary and depends both on the gyroscopic and on the damping terms in general.

The second order perturbations are obtained from (12'') with known  $s_1^{(k)}$ ,  $\lambda_1^{(k)}$  in analogous manner. Projecting (12'') on  $r_k$  gives

$$s_2^{(k)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{s_0^{(k)} + \gamma_k} \left[ \sum_{e \neq k} \frac{s_0^{(k)2} b_{ek} b_{ke}}{(\omega_k^2 - \omega_e^2) + 2s_0^{(k)}(\gamma_k - \gamma_e)} + s_1^{(k)} + s_1^{(k)} b_{kk} \right] \quad (24)$$

which can also be written as

$$s_2^{(k)} = \frac{s_0^{(k)} b_{kk}^2 (\gamma_k + j\sqrt{\omega_k^2 - \gamma_k^2})}{2\sqrt{\omega_k^2 - \gamma_k^2}} j + \frac{s_0^{(k)2}}{2\sqrt{\omega_k^2 - \gamma_k^2}} j \sum_{e \neq k} \frac{b_{ek} b_{ke}}{(\omega_k^2 - \omega_e^2) + s_0^{(k)} 2(\gamma_k - \gamma_e)} \quad (25)$$

In the special case  $D = 0$  (25) assumes the simpler form

$$s_2^{(k)} = -\frac{j b_{kk}^2}{8\omega_k} - \frac{j\omega_k}{2} \sum_{e \neq k} \frac{b_{ek} b_{ke}}{\omega_k^2 - \omega_e^2} \quad (25')$$

and  $s_2^{(k)}$  is then purely imaginary. In (25') the first expression on the right hand side vanishes if the perturbing terms do only contain gyroscopic forces.

Similarly, multiplying (12'') by  $r_e$ ,  $e \neq k$ , gives  $\beta_2^{(k)}$  and the second correction to the k-th eigenvector can then be written as

$$\begin{aligned} \beta_2^{(k)} = & \sum_{e \neq k} \frac{1}{s_0^{(k)} 2(\gamma_e - \gamma_k) + (\omega_e^2 - \omega_k^2)} \\ & \left\{ \frac{s_0^{(k)} b_{kk} b_{ek}}{2(s_0^{(k)} + \gamma_k)} \left[ 1 - \frac{2 s_0^{(k)} (s_0^{(k)} + \gamma)}{s_0^{(k)} 2(\gamma_e - \gamma_k) + (\omega_e^2 - \omega_k^2)} \right] - \right. \\ & \left. - s_0^{(k)} \sum_{p \neq k} \frac{b_{pk} b_{ep}}{s_0^{(k)} 2(\gamma_k - \gamma_p) + (\omega_k^2 - \omega_p^2)} \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

which in the special case  $D = 0$  simplifies to

$$\beta_2^{(k)} = \sum_{e \neq k} \left[ \frac{1}{2} \frac{\omega_e^2 + \omega_k^2}{(\omega_e^2 - \omega_k^2)} b_{kk} b_{ek} + \frac{\omega_k^2}{\omega_e^2 - \omega_k^2} \sum_{p \neq k} \frac{b_{pk} b_{ep}}{\omega_k^2 - \omega_p^2} \right] r_e \quad (26')$$

in this case the second correction in the eigenvectors is real. Again, it can easily be seen how the gyroscopic and the additional damping terms affect the eigenvectors.

Of course higher order perturbations can easily be calculated in an analogous manner; for practical purpose it will however usually be sufficient to know the terms up to order  $\epsilon^2$  as given above in terms of the eigenvectors and eigenvalues of the nongyroscopic simply damped system.

### THE CASE OF MULTIPLE EIGENVALUES

The straightforward calculation given for the case in which all eigenvalues are simple is substituted by a more interesting problem if multiple eigenvalues exist in the unperturbed problem. Instead of treating the general case, let us consider only the case in which there is a double eigenvalue, for example  $s_0^{(1)} = s_0^{(2)} \neq s_0^{(3)} \neq \dots \neq s_0^{(n)}$ , in the unperturbed problem. The general case can be treated in a similar way.

In the case of multiple eigenvalues there may be no analytic representation of the form (9), (10), although there is always a representation in form of a Puiseux series (see [1]). In what

follows we will heuristically construct a representation of the form (9), (10), which does in fact converge for most engineering problems. For  $k = 3, 4, \dots, n$  no problem arises in the calculation of  $\ell^{(k)}$  and  $s^{(k)}$  and the formulas obtained in the previous section can be applied. If a similar attempt is made for  $k = 1, 2$  it is immediately seen that it will fail: the formulas cannot be applied since due to the multiple eigenvalue some of the denominators will vanish. The reason is that  $\ell_0^{(k)}$  is not uniquely defined by (12) for  $k = 1, 2$  but can be a linear combination of the real vectors  $r_1, r_2$

$$\ell_0^{(k)} = \alpha_1^{(k)} r_1 + \alpha_2^{(k)} r_2 \quad (27)$$

with complex constants  $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}$ , which are not known a priori; the normalization (14) only gives

$$|\alpha_1^{(k)}|^2 + |\alpha_2^{(k)}|^2 = 1 \quad (28)$$

Instead of (17) we now write

$$\ell_p^{(k)} = \sum_e \beta_{p,e}^{(k)} r_e, \quad k = 1, 2 \quad (29)$$

and (14) now implies

$$\alpha_1^{(k)*} \beta_{p,1}^{(k)} + \alpha_2^{(k)*} \beta_{p,2}^{(k)} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \quad (30)$$

which indicates that the perturbations of  $\ell^{(1)}, \ell^{(2)}$  are orthogonal to  $\ell_0^{(1)}, \ell_0^{(2)}$  with respect to  $M, C$  and  $D$ .

Now,  $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}$  as well as  $s_1^{(k)}, \ell_1^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$  shall be calculated. Premultiplication of (12') with  $r_1^T$  gives

$$|2(s_0 + \gamma)s_1^{(k)} + s_0 b_{11}| \alpha_1^{(k)} + s_0 b_{12} \alpha_2^{(k)} = 0, \quad (31)$$

if one writes  $s_0 := s_0^{(1)} = s_0^{(2)}$  and  $\gamma := \gamma_1 = \gamma_2$ , and premultiplication of (12') with  $r_2^T$  leads to

$$s_0 b_{21} \alpha_1^{(k)} + |2(s_0 + \gamma)s_1^{(k)} + s_0 b_{22}| \alpha_2^{(k)} = 0. \quad (32)$$

Equations (31), (32) form a linear system in the variables  $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}$  with the unknown parameter  $s_1^{(k)}$ . This eigenvalue problem of

order two will in general have two complex eigenvalues  $s_1^{(1)}, s_1^{(2)}$  and two linearly independent eigenvectors with components  $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}$  and  $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}$ . In particular cases this problem may also possess only one (multiple) eigenvalues  $s_1^{(1)} = s_1^{(2)}$  with only one eigenvector and an example will be given for this case.

It is now assumed that the eigenvalue problem formed by (31), (32) has two linearly independent eigenvectors. In this case  $\lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)}$  are determined through (27); note that in the present case the eigenvectors  $\lambda^{(1)}$  and  $\lambda^{(2)}$  are now complex even in the zero-order approximation, in opposition to the case considered in the previous section.

So far (12') has only been projected on  $r_1$  and  $r_2$ . Projection on  $r_e, e \neq 1,2$  leads to

$$\beta_{1,e}^{(k)} = - \frac{s_0(b_{e1}\alpha_1^{(k)} + b_{e2}\alpha_2^{(k)})}{s_0^2 + 2\gamma_e s_1^{(k)} + \omega_e^2}, \quad e = 3,4,\dots,n \quad k = 1,2, \quad (33)$$

which determines  $\lambda_1^{(k)}, k = 1,2$  up to its components with respect to  $r_1, r_2$ . The remaining components  $\beta_{1,1}^{(k)}, \beta_{1,2}^{(k)}$  are obtained from (12''): premultiplication of this equation by  $r_1^T, r_2^T$  respectively gives

$$\begin{aligned} & [2s_1^{(k)}(s_0 + \gamma) + s_0 b_{1,1}] \beta_{1,1}^{(k)} + s_0 b_{1,2} \beta_{1,2}^{(k)} + 2\alpha_1^{(k)}(s_0 + \gamma)s_2^{(k)} = \\ & = -\alpha_1^{(k)}(s_1^{(k)2} + s_1^{(k)}b_{1,1}) - \alpha_2^{(k)}s_1^{(k)}b_{1,2} - s_0 \sum_{e=3}^n \beta_{1,e} b_{1,e}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & s_0 b_{2,1} \beta_{1,1}^{(k)} + [2s_1^{(k)}(s_0 + \gamma) + s_0 b_{2,2}] \beta_{1,2}^{(k)} + 2\alpha_2^{(k)}(s_0 + \gamma)s_2^{(k)} = \\ & = -\alpha_1^{(k)}s_1^{(k)}b_{2,1} - \alpha_2^{(k)}(s_1^{(k)2} + s_1^{(k)}b_{2,2}) - s_0 \sum_{e=3}^n \beta_{1,e} b_{2,e}, \end{aligned} \quad (35)$$

Together with (30), equations (34), (35) form a linear system in the unknowns  $\beta_{1,1}^{(k)}, \beta_{1,2}^{(k)}$  and  $s_2^{(k)}$  for  $k = 1,2$ . It is not difficult to show that in general the determinant of the corresponding coefficient matrix does not vanish so that a unique solution can be found.

The coefficients  $\beta_{2,e}^{(k)}$  for  $k = 1,2, e = 3,4,\dots,n$  can easily be found by projecting (12'') on  $r_e$  and one obtains

$$\beta_{2,e}^{(k)} = - \frac{1}{s_0^2 + 2\gamma_e s_0 + \omega_e^2} [2s_1^{(k)}(s_0 + \gamma_e)\beta_{1,3}^{(k)} + s_0 \sum_{i=1}^n b_{e,i}\beta_{1,i}^{(k)}], \quad (36)$$

This determines  $\rho_{2,e}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$  up to its components with respect to  $r_1$  and  $r_2$ . These are then obtained together with  $s_2^{(k)}$  from a linear system analogous to (30), (34), (35) which follows from the equation immediately after (12"), in which the terms of order  $\epsilon^3$  are compared. This and the other higher order equations are omitted in the present paper.

The procedure for the determination of the corrections to the eigenvalues and eigenvectors in the case of a root of multiplicity  $m$ ,  $s_0^{(1)} = s_0^{(2)} = \dots = s_0^{(m)}$  in the unperturbed system is however clear:  $s_1^{(k)}$  and  $\rho_0^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  are found by solving an eigenvalue problem of the order  $m$  (the multiplicity of the root). Next,  $s_2^{(k)}$  and  $\rho_1^{(k)}$  are found by solving a system of linear equations of order  $m+1$ . The solution to this system gives the components of  $\rho_1^{(k)}$  with respect to  $r_1, r_2, \dots, r_m$ . The remaining  $n-m$  components of  $\rho_1^{(k)}$  are easily determined without having to solve additional systems of equations. In each following step ( $\rho_2^{(k)}, s_3^{(k)}$ ;  $\rho_3^{(k)}, s_4^{(k)}$ ; etc.) a new linear system of order  $m+1$  has to be solved. The eigenvalue problem of order  $m$  however has to be solved only once, namely for the determination of  $s_1^{(k)}$  and  $\rho_0^{(k)}$ .

In [2] a different approach was taken for the solution of the perturbed eigenvalue problem, based on the biorthogonality property of right and left eigenvectors, and the case of multiple eigenvalues in the unperturbed problem was not considered. As we will show in what follows, multiple eigenvalues can also be treated with the technique presented in [2]. As in section 4 of [2] consider the eigenvalue problems

$$Au^{(i)} = \lambda^{(i)}u^{(i)}, \quad A^T v^{(i)} = \lambda^{(i)}v^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n, \quad (37)$$

where  $u^{(i)}$  and  $v^{(i)}$  are the right and left eigenvectors of the  $2n \times 2n$  matrix  $A$ ,  $\lambda^{(i)}$  being the corresponding eigenvalue. As is well-known, these eigenvectors satisfy the biorthonormality relations if conveniently normalized:

$$v^{(j)T} u^{(i)} = u^{(i)T} v^{(j)} = 2 \delta_{ij}, \quad (38)$$

$$v^{(j)T} A u^{(i)} = u^{(i)T} A^T v^{(j)} = 2\lambda^{(i)} \delta_{ij}. \quad (39)$$

Consider now a matrix A in the form

$$A = A_0 + \epsilon A_1, \quad (40)$$

being a small perturbational parameter and write the eigenvalue and eigenvectors of this matrix in the form

$$\begin{aligned} \lambda^{(i)} &= \lambda_i^{(i)} + \epsilon \lambda_1^{(i)} + \epsilon^2 \lambda_2^{(i)} + \dots, \\ \mathbf{u}^{(i)} &= \mathbf{u}_0^{(i)} + \epsilon \mathbf{u}_1^{(i)} + \epsilon^2 \mathbf{u}_2^{(i)} + \dots, \\ \mathbf{v}^{(i)} &= \mathbf{v}_0^{(i)} + \epsilon \mathbf{v}_1^{(i)} + \epsilon^2 \mathbf{v}_2^{(i)} + \dots. \end{aligned} \quad (41)$$

Inserting (41) in (37), (38) and comparing the terms of the same order in  $\epsilon$  gives the terms of order  $\epsilon^0$ :

$$\mathbf{v}_0^{(j)T} \mathbf{u}_0^{(i)} = 2\delta_{ij}, \quad (42)$$

$$\mathbf{v}_0^{(j)T} A_0 \mathbf{u}_0^{(i)} = 2\lambda_0^{(i)} \delta_{ij}, \quad (43)$$

for the terms of order  $\epsilon^1$ :

$$\mathbf{v}_0^{(j)T} \mathbf{u}_1^{(i)} + \mathbf{v}_1^{(j)T} \mathbf{u}_0^{(i)} = 0, \quad (42')$$

$$\mathbf{v}_0^{(j)T} A_0 \mathbf{u}_1^{(i)} + \mathbf{v}_0^{(j)T} A_1 \mathbf{u}_0^{(i)} + \mathbf{v}_1^{(j)T} A_0 \mathbf{u}_0^{(i)} = 2\lambda_1^{(i)} \delta_{ij}, \quad (43')$$

for the terms of order  $\epsilon^2$ :

$$\mathbf{v}_0^{(j)T} \mathbf{u}_2^{(i)} + \mathbf{v}_1^{(i)T} \mathbf{u}_1^{(i)} + \mathbf{v}_2^{(j)T} \mathbf{u}_0^{(i)} = 0, \quad (42'')$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0^{(j)T} A_0 \mathbf{u}_2^{(i)} + \mathbf{v}_0^{(j)T} A_1 \mathbf{u}_1^{(i)} + \mathbf{v}_1^{(j)T} A_0 \mathbf{u}_1^{(i)} + \\ + \mathbf{v}_1^{(j)T} A_1 \mathbf{u}_0^{(i)} + \mathbf{v}_2^{(j)T} A_0 \mathbf{u}_0^{(i)} = 2\lambda_2^{(i)} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (43'')$$

etc. It should be observed, that the right and left eigenvectors are not uniquely determined through the orthonormalization (38) but they can still be normalized in a suitable way, for example by setting  $|\mathbf{u}^{(i)}| = |\mathbf{v}^{(i)}|$  or in some other manner.

In [2] it was shown how the equations (42) to (43") can be solved by expanding all the unknown vectors in terms of  $u_0^{(i)}$ ,  $v_0^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ , as long as all the eigenvalues are simple. Let us now assume that there is a double eigenvalue  $\lambda_0 := \lambda_0^{(1)} = \lambda_0^{(2)}$  to which correspond two linearly independent left and right eigenvectors  $u_0^{(1)}$ ,  $u_0^{(2)}$  and  $v_0^{(1)}$ ,  $v_0^{(2)}$  respectively. Then, any linear combination of these pairs of vectors

$$v_0^{(k)} = \beta_{0,1}^{(k)} v_0^{(1)} + \beta_{0,2}^{(k)} v_0^{(2)} \quad (44)$$

$$u_0^{(k)} = \alpha_{0,1}^{(k)} u_0^{(1)} + \alpha_{0,2}^{(k)} u_0^{(2)}, \quad k = 1, 2 \quad (45)$$

will also respectively give a left and right eigenvector corresponding to  $\lambda_0$ . Substituting (44), (45) in (42) results in

$$\beta_{0,1}^{(j)} \alpha_{0,1}^{(i)} + \beta_{0,2}^{(j)} \alpha_{0,2}^{(i)} = 2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (46)$$

Next, the first order perturbations to the eigenvectors are written as

$$u_1^{(i)} = \alpha_{1,1}^{(i)} u_0^{(1)} + \alpha_{1,2}^{(i)} u_0^{(2)} + \sum_{k=3}^{2n} \alpha_{1,k}^{(i)} u_0^{(k)}, \quad (47)$$

$$v_1^{(j)} = \beta_{1,1}^{(j)} v_0^{(1)} + \beta_{1,2}^{(j)} v_0^{(2)} + \sum_{k=3}^{2n} \beta_{1,k}^{(j)} v_0^{(k)}, \quad i, j = 1, 2 \quad (48)$$

and substituting in (42') and (43') results in

$$\beta_{0,1}^{(j)} \alpha_{1,1}^{(i)} + \beta_{0,2}^{(j)} \alpha_{1,2}^{(i)} + \beta_{1,1}^{(j)} \alpha_{0,1}^{(i)} + \beta_{1,2}^{(j)} \alpha_{0,2}^{(i)} = 0, \quad (49)$$

$$(\beta_{0,1}^{(j)}, \beta_{0,2}^{(j)}) H (\alpha_{0,1}^{(i)}, \alpha_{0,2}^{(i)})^T = 2\lambda_1^{(i)} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad (50)$$

where  $H$  is a  $2 \times 2$  matrix with elements  $h_{k,s}$  defined by

$$h_{k,s} := v_0^{(k)} A_1 u_0^{(s)}, \quad k, s = 1, 2 \quad (51)$$

It is now noted that (50) together with (42) forms a  $2 \times 2$  matrix eigenvalue problem as formulated in [3], the solution of which gives the components  $\alpha_{0,1}^{(i)}$ ,  $\alpha_{0,2}^{(i)}$  and  $\beta_{0,1}^{(i)}$ ,  $\beta_{0,2}^{(i)}$  of  $u_0^{(i)}$ ,  $v_0^{(i)}$ , with respect to  $u_0^{(1)}$ ,  $u_0^{(2)}$ ,  $v_0^{(1)}$ ,  $v_0^{(2)}$  as well as the first correction

to the first correction to the  $i$ -th eigenvalue  $\lambda_1^{(i)}$ , for  $i = 1, 2$ . All the other components of  $u_0^{(i)}$ ,  $v_0^{(i)}$  as well as the higher order perturbations can then easily be calculated. Note that the normalization of the eigenvectors used in [2] corresponds to

$$v_0^{(j)T} (j)(\epsilon) = v^{(j)T} (\epsilon) u_0^{(j)} \quad (52)$$

which gives

$$\alpha_{1,j}^{(j)} = \beta_{1,j}^{(j)}, \quad \alpha_{2,j}^{(j)} = \beta_{2,j}^{(j)}, \quad (53)$$

etc.

### NUMERICAL EXAMPLES

As a first example consider the damped gyroscopic two-degree-of-freedom system already presented in [2], in which the matrices  $M$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $G_1$ ,  $D_1$  are of the form

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & c_2 - m\Omega^2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_1 = \Omega \begin{pmatrix} 0 & -2m \\ 2m & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = 0. \quad (54)$$

The eigenvalues and eigenvectors are calculated here for  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $c_1 = 3 \text{ kg s}^{-2}$ ,  $c_2 = 4 \text{ kg s}^{-2}$ ,  $d = .1 \text{ kg s}^{-1}$  and  $\Omega = .1 \text{ rad s}^{-1}$  and are depicted in Table 1. In [2] a larger value of  $\Omega$  was used; here the gyroscopic terms have to be kept small, since they are treated as perturbations, but higher "simple" damping is permissible. It is seen that the "exact" solution (2<sup>nd</sup> column) and the perturbational solution (3<sup>rd</sup> column), which is given including the second order perturbations are in good agreement as far as the eigenvalues are concerned, they agree to a lesser extent for the eigenvectors. For comparison also the eigenvectors and eigenvalues of the system with  $D = 0$ ,  $G_1 = 0$  are given in the first column. In the last column the results of the perturbational solution are shown for an alternative procedure in which the unperturbed system was assumed as undamped and the damping and gyroscopic terms were all included in the perturbation matrix  $B$ . It is seen that these results are reasonable for the first eigenvalue and eigenvector but very poor for the second, so that in this example it certainly



is useful to include the simple damping in the unperturbed system. This is however not always the case: there are examples in which very good results are obtained by including the damping together with the gyroscopic terms in the perturbation. This is obviously related to the structure of the matrices and should be the object of further studies.

Table 1

	"exact" solution		Perturbational Solution	Alternative Procedure
	undamped non-gyroscopic	damped gyroscopic		
$s^{(1)}$	0 +j1.7313E+00	- 4.8237E-02 +j1.7226E+00	- 4.8087E-02 +j1.7216E+00	- 5.0000E-02 +j1.7220E+00
$\lambda^{(1)}$	- 1.0000E+00 0	- 1.0000E+00 -j8.6532E-12	- 1.0000E+00 +j5.2590E-14	- 1.0000E+00 -j3.4975E-02
	0 0	- 3.0725E-02 +j1.6188E-01	- 3.3458E-02 +j1.6596E-01	0 +j1.7313E-01
$s^{(2)}$	0 +j1.9994E+00	- 1.7629E-03 +j2.0087E+00	- 1.9127E-03 +j2.0090E+00	0 +j2.0094E+00
$\lambda^{(2)}$	0 0	- 3.8254E-02 +j1.9181E-01	- 3.8254E-02 +j1.9181E-01	- 3.9975E-02 +j1.9994E-01
	- 1.0000E+00 0	- 8.8610E-01 -j2.0765E-01	- 1.0000E+00 -j9.5428E-14	- 1.0000E+00 0

In a second example the mechanical system of Fig. 1 is analyzed. For  $\epsilon = 0$  this system obviously exhibits a double eigenvalue and the damping is simple. The system in this case splits up into two uncoupled subsystems and the eigenvalues and eigenvectors can immediately be given without any numerical computations.

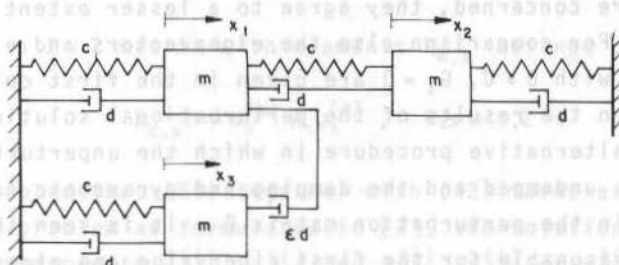


Figure 1

The eigenvalues and eigenvectors were calculated for  $\epsilon = .05$  with the aid of the formulas (30) to (36) and are shown together with the "exact" solution in Table 2. A non-dimensional time  $\tau = t \sqrt{c/m}$  was used in the equations of motion and the eigenvalues are given accordingly; the damping coefficient  $d$  satisfies  $d/2\sqrt{cm} = .1$ . In the first column ("unperturbed problem") of Table 2 the given eigenvectors are  $r_1, r_2$  and  $r_3$ , which follow by symmetry considerations directly from Fig. 1, without any calculations. The perturbational solution in the last column is given including terms up to second order for the eigenvalues and up to first order for the eigenvectors. It can be seen that the perturbational solution is in good agreement with the "exact" solution both in the eigenvalues and in the eigenvectors.

Table 2

	"exact" solution		Perturbational Solution
	unperturbed problem	perturbed problem	
$s^{(1)}$	-0.10000+j0.99499	-0.09817+j0.99517	-0.09817+j0.99517
$\xi^{(1)}$	+ $\sqrt{2}/2$ + $\sqrt{2}/2$ +0	+0.62789+j0.00047 +0.62765-j0.00185 +0.45963+j0.00015	+0.62789+j0.00047 +0.62806-j0.00066 +0.45966+j0.00026
$s^{(2)}$	-0.10000+j0.99499	-0.10683+j0.99429	-0.10683+j0.99428
$\xi^{(2)}$	+0 +0 +1.00000	+0.32453-j0.00202 +0.32493+j0.00254 -0.88810+j0.00026	+0.32513-j0.00028 +0.32493+j0.00025 -0.88810+j0.00026
$s^{(3)}$	-0.30000 + j1.7059	-0.30000+j1.7059	-0.29999+j1.7059
$\xi^{(3)}$	+ $\sqrt{2}/2$ - $\sqrt{2}/2$ +0	+0.70711 -0.70716+j0.00002 -0.00101-j0.00605	+0.70711 -0.70711 +0.00305-j0.00603

In section 4 we mentioned that in some cases the number of independent eigenvectors may change with the introduction of a perturbation in the case of multiple eigenvalues. In order to illustrate this an example is given in which the physical meaning

of this phenomenon can easily be understood. No perturbational analysis and no numerical calculations are necessary for this example, since the solution can be given in closed form. Consider the equations of motion

$$\ddot{q} + \epsilon B \dot{q} + q = 0 \quad (55)$$

of a two-degree-of-freedom-system with

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

where B is the sum of a positive definite damping matrix and a skew-symmetric matrix corresponding to gyroscopic terms. For  $\epsilon = 0$  there is a double eigenvalue  $s_0^{(1)} = s_0^{(2)} = j$  associated to the two eigenvectors

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (57)$$

(of course one has  $s_0^{(3)} = s_0^{(4)} = -j$ ). For  $\epsilon \neq 0$

$$q = \ell e^{st} \quad (58)$$

gives

$$(s^2 + 2\epsilon s + 1)\alpha_1 + 2\epsilon s \alpha_2 = 0, \quad (59)$$

$$0 + (s^2 + 2\epsilon s + 1)\alpha_2 = 0,$$

where  $\alpha_1, \alpha_2$  are the components of  $\ell$ . The perturbed problem in this case has still a double eigenvalue for  $\epsilon^2 < 1$ :

$$s^{(1)} = s^{(2)} = -\epsilon + j\sqrt{1-\epsilon^2}, \quad (60)$$

which can easily be expanded in a power series with respect to  $\epsilon$  (the eigenvalue  $s^{(3)} = s^{(4)}$  is the complex conjugate to (60)). Only one eigenvector, namely

$$\ell = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (61)$$

now corresponds to (60) and the associated real solution of (55) is

$$q_1 = K_1 e^{-\epsilon t} \sin(\omega t + \gamma_1), \quad (62)$$

$$q_2 = 0,$$

where  $K_1, \gamma_1$  are integration constants and

$$\omega = \sqrt{1 - \epsilon^2}. \quad (63)$$

There is of course an additional particular solution to (55) with a linearly increasing amplitude, so that the general solution

$$\begin{aligned} q_1 &= e^{-\epsilon t} \left\{ K_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + K_2 t \left[ -\epsilon^2 \cos(\omega t + \gamma_2) - \epsilon \omega \sin(\omega t + \gamma_2) \right] \right\}, \\ q_2 &= e^{-\epsilon t} \left\{ 0 + K_2 \omega \sin(\omega t + \gamma_2) \right\}, \end{aligned} \quad (64)$$

contains the four constants of integration  $K_1, K_2, \gamma_1, \gamma_2$ . Note that the solution (64) of the perturbed problem is still analytic in  $\epsilon$ , in spite of the multiplicity of the eigenvalues. The reduction from two linearly independent eigenvectors in the unperturbed problem to only one eigenvectors in the perturbed problem in the present example implies that the eigenvalue problem of the first perturbation formed by (31), (32) has only one eigenvector in the present case. The given perturbational analysis is still applicable to such cases.

#### FINAL REMARKS

In this paper, the eigenvectors and eigenvalues of (2) have been calculated via a perturbation procedure up to second order, for the case in which the unperturbed system is "simply" damped. In this case the eigenvectors of the unperturbed system form a real basis of the whole  $q$ -space which is very convenient for the calculations.

Particular attention was given to the case of multiple eigenvalues in the unperturbed system. In this case, for an eigenvalue of multiplicity  $m$  an  $m$ -th order eigenvalue problem had to be solved. It is obvious that for  $n \gg m$  the perturbational approach may be advantageous, particularly if one remembers that

in engineering problems the perturbation matrix B is frequently not well known, so that it makes sense to compute the eigenvectors with a limited precision only. A similar approach will also be useful in the case in which some of the roots of the unperturbed system are not multiple but sufficiently close together. A somewhat more general problem with perturbations not only in the damping and gyroscopic terms but also in the inertia and in the stiffness matrix will be treated in a different paper [6].

#### REFERENCES

- [1] Lancaster, P. — "Some questions in the Classical Theory of Vibrating Systems", Buletinul Institutului Politehnic DIN IASI, Tomul XVII (XXI), fasc.1-2, 1971, Sectia I, pp.125-132.
- [2] Meirovitch, L. and Ryland, G.II — "Response of Slightly Damped Gyroscopic Systems", Journal of Sound and Vibration, Vol.67 (1979), pp.1-19.
- [3] Meirovitch, L. — "A new method of solution of the eigenvalue problem for gyroscopic systems", AIAA Journal, Vol.12 (1974), 1337-1342.
- [4] Caughey, T.K. and O'Kelly, M.E.J. — "Classical Normal Modes in Damped Linear System", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.32 (1965), pp. 583-588.
- [5] Hagedorn, P. — "Zum Eigenwertproblem diskreter mechanischer Systeme mit schwacher Dämpfung und kleinen gyrokopischen Termen", to appear in ZAMM.
- [6] ————. — "On the Vibrations of Almost Diagonalizable Linear Gyroscopic Systems", to appear in Proceedings VII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM 83.

# UMA ABORDAGEM HISTÓRICA SOBRE COMPONENTES FÍSICAS DE TENSORES

Antonio Marmo de Oliveira

Wolf Altman

Divisão de Engenharia Aeronáutica

Instituto Tecnológico de Aeronáutica

12200 - São José dos Campos, SP

## SUMÁRIO

Inicialmente os autores descrevem a idéia de componentes físicas de vetores conforme foi introduzida por Ricci e Levi-Civita. Também são apresentadas definições de componentes físicas de um tensor de segunda ordem dadas por Synge e Schild, Ollendorff e Green e Zerna. Os conceitos de componentes físicas mistas dados por Truesdell e Ericksen são discutidos, e é mostrado como os mesmos podem ser incluídos numa teoria mais geral que os autores desse artigo desenvolveram recentemente.

## INTRODUÇÃO

As entidades mecânicas podem ser expressas em termos das dimensões fundamentais de comprimento  $L$ , massa  $M$  e tempo  $T$ . Por exemplo a dimensão da aceleração  $\vec{a}$  é  $LT^{-2}$ .

A dimensão de uma entidade mecânica é dada pela dimensão de suas componentes tensoriais num sistema ortonormal, mas isso não acontece nos sistemas não-ortonormais. Assim, se  $a^1$  e  $a^2$  indicam as componentes radial e tangencial da aceleração  $\vec{a}$  (tensor ordem 1) num sistema de coordenadas cilíndricas, teremos

$$a^1 = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$a^2 = \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}$$

de onde resultam  $\dim a^1 = LT^{-2}$  e  $\dim a^2 = T^{-2}$ , isto é, as componentes tensoriais não são dimensionalmente homogêneas e nem sempre apresentam a mesma dimensão do tensor.

Para sanar essas discrepâncias, as componentes do tensor devem ser tais que:

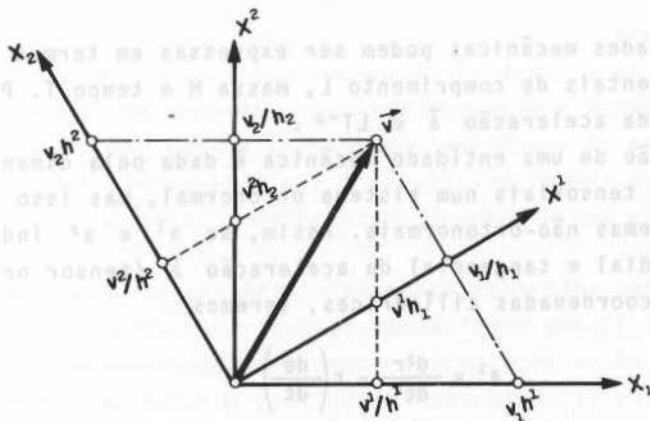
- sejam dimensionalmente homogêneas em qualquer sistema;
- conservem as propriedades tensoriais.

A pesquisa, de componentes tensoriais que apresentam as propriedades a) e b), leva ao conceito de componentes físicas de tensores.

Nos próximos parágrafos será visto que, durante os últimos 60 anos vários autores têm apresentado diferentes definições de componentes físicas de tensores. A maioria destas definições pode ser considerada como casos particulares daquela mais geral dada em [1] que satisfaz também as propriedades a) e b) acima mencionadas.

#### HISTÓRICO

No caso de vetores, a idéia de componentes físicas foi, pela primeira vez, introduzida por Ricci e Levi Civita, numa memória publicada em 1901 [2]. As seguintes quantidades  $v^i h_i$ ,  $v_i h^i$ ,  $v_i/h_i$  e  $v^i/h^i$ , onde  $h_i = \sqrt{g_{ii}}$  e  $h^i = \sqrt{g^{ii}}$ , foram denominadas por Ricci e Levi Civita "Composants du vecteur selon les lignes coordonnées". Todas componentes destes quatro conjuntos podem ser consideradas como componentes físicas do vetor  $\vec{v}$ , como é mostrada pela fórmula (4.8) de [1] e ilustrada conforme figura 1.



Em 1925 H. Thirring [3], foi um dos primeiros a notar a conexão existente entre as componentes físicas e as tensoriais de um tensor de segunda ordem. Nesta época H. Hencky [4] já usava o termo "componentes físicas", enquanto que U. Cissotti preferia usar "componentes intrínsecas". Este último autor, no seu livro "Lezioni di Calcolo Tensoriale" [5], introduziu, pela primeira vez, as componentes físicas para tensores covariantes de ordem n que foram indicadas por  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$  e definidas por:

$$i_1, i_2, i_3, \dots, i_n = \frac{T_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_n}}{h_1 h_2 h_3 \dots h_n} \quad (1)$$

Para chegar nesta definição Cissotti partiu ao fato que a componente física  $v_i$  de um vetor covariante  $\vec{v}$  é a projeção de  $\vec{v}$  na direção de  $\vec{g}_i/h_i$ , isto é

$$v_i = \vec{v} \cdot \left( \frac{\vec{g}_i}{h_i} \right) = \frac{v_i}{h_i} \quad (2)$$

É interessante notar que Cissotti não restringiu sua definição somente às componentes físicas de um tensor covariante, mas também tentou estabelecer fórmulas para as derivadas de tais componentes. Para isso, considerou um vetor tangente unitário  $\vec{u}_\ell$  à curva  $x_\nu$  e introduziu o que ele chamou "coeficiente de rotação de Ricci" que nada mais é do que a componente física da derivada da componente covariante  $u_{\ell i}$ , isto é:

$$\Gamma_{\ell ik} = \frac{1}{h_k h_i} u_{\ell i/k} \quad (3a)$$

ou

$$\Gamma_{\ell ik} = \frac{1}{h_k h_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{g_{i\ell}}{h_\ell} - \sum \frac{g_{\ell j}}{h_\ell} \left\{ i \ j \ k \right\} \right] \quad (3b)$$

Utilizando (3b), Cissotti definiu a derivada intrínseca da componente física T de um vetor T como segue:

$$T_{i/k} = \frac{\partial T_i}{\partial s_k} + \sum_j \Gamma_{\ell ik} T_j \quad (4)$$

onde  $ds_k$  é o elemento de arco ao longo da curva coordenada  $x_k$ .



Em 1931, McConnell [6], introduziu a idéia de componentes físicas de um tensor em coordenadas ortogonais, obtendo as seguintes expressões:

$$T(k,i,\dots,\ell) = h_k h_i \dots h_\ell T^{k,i,\dots,\ell} \quad (5a)$$

$$T(k,i,\dots,\ell) = T_{k,i,\dots,\ell} / h_k h_i \dots h_\ell \quad (5b)$$

onde  $T(k,i,\dots,\ell)$  indicam as componentes físicas,  $T^{k,i,\dots,\ell}$  e  $T_{k,i,\dots,\ell}$  indicam respectivamente as componentes contravariantes e covariantes. Devemos lembrar que, nas fórmulas acima a repetição dos índices não indica a convenção usual da soma.

Depois do trabalho de McConnell, Synge e Schild [7], Ollendorf [8] e Green e Zerna [9] definiram de maneiras diferentes as componentes físicas de um tensor de segunda ordem num sistema de coordenadas não-ortogonais.

Em 1953, Truesdell [10] fez a hipótese que as componentes físicas deveriam satisfazer relações análogas aquelas existentes entre as componentes tensoriais. Em outras palavras, escrevendo

$$w^i = T^i_j v^j \quad (6)$$

e substituindo

$$w^i = w(i) / \sqrt{g_{ii}} \quad (7)$$

$$v^j = v(j) / \sqrt{g_{jj}} \quad (8)$$

em (6), obtêm-se

$$w(i) = \left( \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}} \right) T^{ij} v(j) \quad (\text{não é somado em } i) \quad (9)$$

onde  $w(i)$ , na notação de Truesdell, indicam as componentes físicas de um vetor contravariante na base  $\vec{g}_i$ .

Conseqüentemente, comparando estas relações com

$$w(i) = T(ij) v(j) \quad (10)$$

deduz-se

$$T(ij) = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}} T^i_j,$$

que são as componentes físicas de um tensor de segunda ordem dado por suas componentes mistas  $T^i_j$ .

Subsequentemente, Truesdell [11] e também Ericksen [12], usando coordenadas não holonômicas, definiram as componentes físicas de tensores de ordem  $n$ , mas eles trabalharam somente com componentes mistas, excluindo outras componentes que aparecem frequentemente nas equações da física e da engenharia. Os trabalhos Ericksen e Truesdell não incluem todos os casos, como o próprio Ericksen [12] escreve:

"Possible a method sufficiently general as to cover every proposal which might appeal on some or another intuitive grounds could be constructed. In this connection we mention only that the method of anholonomics components which appears quite general, does not include Green and Zerna's [9] definition".

#### COMPONENTES FÍSICAS DE TENSORES

Os autores desenvolveram uma teoria sobre componentes físicas de tensores ([1],[13],[14]), que inclui todos os casos (componentes mistas, covariantes e contravariantes). No que segue uma breve descrição desses artigos será feita.

Em [1] foi mostrado que o conceito de componentes físicas de um tensor  $T \in V \otimes W$  depende fundamentalmente de sua transformação linear associada  $\bar{T} \in L(V^*, W)$  e das bases unitárias definidas em  $V$  e  $W$  por suas respectivas normas. A expressão geral para as componentes físicas é dada pela fórmula (4.8) de [1], e uma versão simplificada da mesma (porém geral) é fornecida pela seguinte expressão

$$[T(i_m, j_n)]_{U_n^*}^{U_m} = \frac{\|g(i_m)\|_W}{\|g(j_n)^*\|_{V^*}} T(i_m, j_n)^* \quad (11)$$

sendo

$$T(i_m, j_n)^* = T^{i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_n} \quad (11')$$

$$g(i_m) = g_{i_1} \otimes g_{i_2} \otimes \dots \otimes g_{i_m}, \quad (12)$$

$$g(j_n)^* = g_{j_1} \otimes g^{j_2} \otimes \dots \otimes g_{j_r} \otimes \dots \otimes g^{j_n} \quad (13)$$

$$\|g(i_m)\|_W = \|\vec{g}_{i_1}\| \|\vec{g}_{i_2}\| \dots \|\vec{g}_{i_m}\| \quad (14)$$

$$\|g(j_n)^*\|_{V^*} = \|\vec{g}_{j_1}\| \|\vec{g}_{j_2}\| \dots \|\vec{g}_{j_n}\| \quad (15)$$

$$u(i_m) = g(i_m) / \|g(i_m)\|_W \quad ,$$

$$u(j_n)^* = g(j_n)^* / \|g(j_n)^*\|_{V^*} \quad (16)$$

$$V^* = \bigotimes_{i=1}^n E_{V_i}^* \quad , \quad W = \bigotimes_{i=1}^{n+m} E_{W_i} \quad (17)$$

onde  $E_{V_i}$ ,  $E_{V_i}^*$ ,  $\vec{g}_{i_m}$ ,  $\vec{g}_{i_m}^{i_m}$ , e  $[T(i_m, j_n)^*]_{u_n^*}^{u_m}$  indicam respectivamente, um espaço normado  $E$ , seu dual  $E^*$ , um vetor de uma base de  $E$ , um vetor de uma base dual e a componente física do tensor  $T \in V \otimes W$  nas bases unitárias  $u_n^*$  (de  $V^*$ ) e  $u_m$  (de  $W$ ).

A fórmula (11), foi exemplificada para os seguintes casos:

a) Vetores

$$[v^i]_{u_0^*}^{u_1^*} = \sqrt{g_{ii}} v^i \quad (18a)$$

$$[v^i]_{u_1^*}^{u_0^*} = \frac{v^i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (18b)$$

$$[v_i]_{u_1}^{u_0} = \frac{v_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (18c)$$

$$[v_i]_{u_0}^{u_1} = \sqrt{g^{ii}} v_i \quad (18d)$$

b) Tensores de 2ª ordem

$$[T^{ij}]_{u_1^*}^{u_1^*} = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}} T^{ij} \quad (19a)$$

$$[T_{ij}]_{u_1^*}^{u_1^*} = \frac{\sqrt{g^{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}} T_{ij} \quad (19c)$$

$$[T_i^j]_{u_1^*}^{u_1^*} = \frac{\sqrt{g^{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}} T_i^j \quad (19b)$$

$$[T]_{u_0}^{u_0} = \sqrt{g^{ii}} \sqrt{g_{jj}} T_{ij} \quad (19d)$$

$$[T^{ij}]_{u_0^*}^{u_2} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} T^{ij}, \quad \dots \text{etc.}$$

### c) Tensores de 3ª ordem

Meste exemplo, foi considerado um tensor  $T \in E^* \otimes E^* \otimes E^*$ , e as suas transformações lineares associadas pertencentes a cada um dos seguintes espaços:  $L(R; E^* \otimes E^* \otimes E^*)$ ,  $L(E; E^* \otimes E^*)$ ,  $L(E \otimes E; E^*)$ ,  $L(E \otimes E \otimes E; R)$  e  $L(E; L(E; E^*))$ . As respectivas componentes físicas de  $T$  podem ser escritas na forma:

$$[T_{ijk}]_{u_0}^{u_3^*} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \sqrt{g_{kk}} T_{ijk} \quad (20)$$

$$[T_{ijk}]_{u_1}^{u_2^*} = \frac{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g_{kk}}} T_{ijk} \quad (21)$$

$$[T_{ijk}]_{u_2}^{u_1^*} = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}} \sqrt{g_{kk}}} T_{ijk} \quad (22)$$

$$[T_{ijk}]_{u_3}^{u_0} = \frac{T_{ijk}}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \sqrt{g_{kk}}} \quad (23)$$

e

$$[T_{ijk}]_{u_1}^{(u_1, u_1^*)} = \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}} \sqrt{g_{kk}}} T_{ijk} \quad (24)$$

Uma análise dimensional também foi desenvolvida, demonstrando-se a homogeneidade dimensional das componentes físicas.

Como foi dito anteriormente, as componentes físicas além de serem dimensionalmente homogêneas, devem também conservar as propriedades tensoriais. Tal fato pode ser traduzido pelas regras de abaixamento e elevação de índices e pelas fórmulas de transformação de coordenadas obtidas na Ref. [13], cujas transcrições são feitas a seguir:

### a) Transformação de coordenadas

$$[A_{PR}]_{B^*}^{B^*} = \left[ \frac{\partial x^q}{\partial x^p} \right]_{b^*}^{B^*} [A_{qs}]_b^{b^*} \left[ \frac{\partial x^s}{\partial x^r} \right]_B^b$$

$$[A^{PR}]_{B^*}^B = \left[ \frac{\partial x^p}{\partial x^q} \right]_b^B [A^{qs}]_{b^*}^b \left[ \frac{\partial x^r}{\partial x^s} \right]_{B^*}^{b^*}$$

$$\left[ \begin{matrix} A \cdot P \\ R \end{matrix} \right]_{B^*}^{B^*} = \left[ \frac{\partial X^S}{\partial X^R} \right]_{b^*}^{B^*} \left[ \begin{matrix} A \cdot q \\ s \end{matrix} \right]_{b^*}^{b^*} \left[ \frac{\partial X^P}{\partial X^q} \right]_{B^*}^{b^*}$$

$$\left[ \begin{matrix} A \cdot P \\ R \end{matrix} \right]_B^B = \left[ \frac{\partial X^P}{\partial X^q} \right]_b^B \left[ \begin{matrix} A \cdot q \\ s \end{matrix} \right]_b^b \left[ \frac{\partial X^S}{\partial X^R} \right]_B^b$$

$$\left[ \begin{matrix} A \\ P \end{matrix} \right]_{B^*}^{B^*} = \left[ \frac{\partial X^q}{\partial X^P} \right]_{b^*}^{B^*} \left[ \begin{matrix} A \\ q \end{matrix} \right]_{b^*}^{b^*}$$

$$\left[ \begin{matrix} A \\ P \end{matrix} \right]_B^B = \left[ \frac{\partial X^P}{\partial X^q} \right]_b^B \left[ \begin{matrix} A \\ q \end{matrix} \right]_b^b$$

### b) Elevação de Índices

$$\left[ \begin{matrix} T^{ij} \\ u_1^* \end{matrix} \right]_{u_1^*}^{u_1} = \left[ \begin{matrix} T^{i \cdot} \\ \cdot k \end{matrix} \right]_{u_1}^{u_1} \left[ \begin{matrix} g^{kj} \\ u_1^* \end{matrix} \right]_{u_1^*}^{u_1}$$

$$\left[ \begin{matrix} T^{ij} \\ u_1^* \end{matrix} \right]_{u_1^*}^{u_1} = \left[ \begin{matrix} g^{ik} \\ u_1^* \end{matrix} \right]_{u_1^*}^{u_1} \left[ \begin{matrix} T_{k j} \\ u_1^* \end{matrix} \right]_{u_1^*}^{u_1}$$

$$\left[ \begin{matrix} T^{ij} \\ u_1^* \end{matrix} \right]_{u_1^*}^{u_1} = \left[ \begin{matrix} g^{ir} \\ u_1 \end{matrix} \right]_{u_1}^{u_1} \left[ \begin{matrix} T_{rk} \\ u_1 \end{matrix} \right]_{u_1}^{u_1} \left[ \begin{matrix} g^{kj} \\ u_1^* \end{matrix} \right]_{u_1^*}^{u_1}$$

As fórmulas do item a) determinam as leis de transformação das componentes físicas de tensores de segunda ordem e de vetores quando efetuamos uma mudança das coordenadas  $x^q$  para as coordenadas  $X^P$ . As quantidades do tipo  $(\partial x^q / \partial X^P), (\partial X^P / \partial x^q)$  que fazem a conexão dos dois sistemas são denominadas de acordo com Ericksen [12] de componentes de Tensores de Campo duplo, cujas componentes físicas nas bases unitárias B, b, B\* e b\* podem ser definidas como segue:

$$\left[ \begin{matrix} - \\ \partial X^M \\ \partial x^m \end{matrix} \right]_b^B = \sqrt{\frac{G_{MM}}{g_{mm}}} \frac{\partial X^M}{\partial x^m}$$

$$\left[ \begin{matrix} \partial x^m \\ \partial X^M \end{matrix} \right]_B^b = \sqrt{\frac{g_{mm}}{G_{MM}}} \frac{\partial x^m}{\partial X^M}$$

$$\left[ \begin{matrix} \partial X^M \\ \partial x^m \end{matrix} \right]_{B^*}^{b^*} = \sqrt{\frac{g^{mm}}{G^{MM}}} \frac{\partial X^M}{\partial x^m}$$

$$\left[ \frac{\partial \chi^M}{\partial x^m} \right]_{B^*}^{b^*} = \sqrt{\frac{g^{mm}}{G^{MM}}} \frac{\partial \chi^M}{\partial x^m}$$

Finalmente na referência [14] foram utilizadas as coordenadas não-holonômicas para se definir as componentes físicas de tensores de ordem n. Os resultados obtidos foram os mesmos da referência [1].

EXEMPLO

Podemos ilustrar a teoria acima exposta através do seguinte exemplo:

Consideremos a relação tensão deformação:

$$\tau^{ij} = c^{ijkl} e_{kl}$$

Das fórmulas anteriores obteremos:

$$\left[ \tau^{ij} \right]_{u_0^*}^{u_2} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \tau^{ij} ;$$

$$\left[ e_{kl} \right]_{u_0}^{u_2^*} = \sqrt{g^{kk}} \sqrt{g^{ll}} e_{kl} ;$$

$$\left[ c^{ijkl} \right]_{u_2^*}^{u_2} = \{ \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} / \sqrt{g^{kk}} \sqrt{g^{ll}} \} c^{ijkl} .$$

Conseqüentemente a relação tensão deformação pode ser escrita

$$\left[ \tau^{ij} \right]_{u_0^*}^{u_2} = \left[ c^{ijkl} \right]_{u_2^*}^{u_2} \left[ e_{kl} \right]_{u_0}^{u_2^*}$$

que é a lei de Hooke em termos de componentes físicas.

REFERÊNCIAS

[ 1 ] Altman, W. and Oliveira, A.M.de – Physical components of tensors, Tensor, N.S., 31 (1977), 141-148.  
 [ 2 ] Ricci, G. and Levi-Civita, T. – Math. Annalen, 54 (1901), 125-201.  
 [ 3 ] Thirring, H. – Zur tensoranalytischen Darstellung der Elastizitätstheorie, Phys. Z., 26 (1925), 518-522.  
 [ 4 ] Hencky, H. – Z. angew. Math. Mech., 5 (1925), 144-146.  
 [ 5 ] Cissotti, U. – Lezioni di calcolo tensoriale, Libreria Ed. Politecnica - Milano, (1928).

- [ 6 ] McConnel, A.J. — Applications of the absolute differential calculus, Blackie, London and Glasgow, (1931).
- [ 7 ] Synge, J.L. and Schild, A. — Tensor calculus, Toronto University Press, (1949).
- [ 8 ] Ollendorf, F. — Die Welt Vektoren, Springer Verlag (1950).
- [ 9 ] Green, A.E. and Zerna, W. — Theoretical elasticity, Clarendon Press, (1954).
- [10] Truesdell, C. — The physical components of vectors and tensors, Z. angew. Math. Mech., 33 (1953), 345-356.
- [11] ———. Remarks on the paper, "The physical components of vector and tensors", Z. angew. Math. Mech., 34, No. 1/2 (1954).
- [12] Ericksen, J.L. — Tensor fields, Handbuch der Physik, Band III/1, Springer-Verlag, (1960).
- [13] Oliveira, A.M.de and Altman, W. — Coordinate transformations of physical components of tensors, Tensor, N.S., 32 (1978), 332-334.
- [14] ———. Anholonomic components of vectors and tensors, Tensor, N.S., 35 (1981), 283-286.

# OS EFEITOS DE UM PROCESSO DE REFINO DE GRÃO DO ALUMÍNIO COMERCIAL, POR INJEÇÃO DE GASES INERTES, SOBRE A QUALIDADE DE SEUS PRODUTOS

**Paulo da Silva Pontes**

Engenheiro de Materiais, Mestre em Engenharia Mecânica  
Campinas, SP

**Nivaldo Lemos Cupini**

Prof. Doutor em Engenharia Mecânica  
Diretor Associado da Faculdade de Engenharia de Campinas  
UNICAMP - Campinas, SP

## SUMÁRIO

*O alumínio de pureza comercial foi fundido sob um tratamento de refino de grão por borbulhamento, através da injeção de gases inertes (argônio e nitrogênio) ao sistema que se solidifica. Os produtos obtidos foram examinados através de análises metalográficas, medidas de densidade do alumínio sólido e de ensaios de tração. Os resultados obtidos demonstram que o tratamento de refino de grão empregado produz significativas melhorias no comportamento mecânico do metal fundido, sem qualquer indício de elevação do nível de porosidade.*

## INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de determinados processos dinâmicos (ou mecânicos) de refino de grão de metais fundidos tem sido, de certo modo, obstacularizado pela premissa de que tais processos seriam produtores de um efeito colateral extremamente nocivo para as qualidades mecânicas dos fundidos — a elevação dos níveis de porosidade. Contrariando a esta expectativa, Cupini [1] e Shukla [2], trabalhando, respectivamente, com processos de refino de grão por revestimento volátil de lingoteira e por vibrações sônicas e ultra-sônicas, concluíram que esses processos não introduzem porosidade adicional que possa comprometer a qualidade dos produtos fundidos.

Sob este aspecto, procuraremos examinar os efeitos de um processo de refino de grão por borbulhamento, através da injeção de gases



inertes (argônio e nitrogênio) ao sistema que se solidifica, sobre o alumínio fundido.

A utilização do alumínio (de grau de pureza comercial) como metal de trabalho se deve ao fato de que este metal, de estrutura cristalina cúbica de face centrada e, portanto, de alta energia por falha de empilhamento, tem seu comportamento mecânico pouco afetado pela variação do tamanho de grão [3,4]; fator este que, indiretamente, ressaltará os efeitos de uma possível variação na quantidade ou no tipo de poros presentes.

#### MÉTODOS EXPERIMENTAIS

Fundição - O alumínio foi fundido em cadinho de carvão de silício, em forno tipo poço de resistência elétrica. As operações de limpeza do metal líquido se restringiram apenas à retirada de escória sobrenadante, sem qualquer tratamento de desgaseificação e de proteção do banho. As temperaturas de vazamento utilizadas foram de 690, 720 e 760°C. As vazões de gás, injetado para borbulhar no metal em solidificação, variaram entre 0,2 e 1,0 litro/minuto; com os períodos de borbulhamento se estendendo desde o instante em que a ponta do tubo injetor entra em contato com o líquido até a completa solidificação do lingote. Os moldes cilíndricos, de aço ABNT 1020 (60 mm de diâmetro, 120 mm de altura e 5 mm de espessura de parede), revestidos internamente com pintura à base de alumina, e as posições do tubo injetor, de aço inox (6 mm de diâmetro externo e 4,5 mm de diâmetro interno), também revestido com a pintura à base de alumina, e do termopar, de cromel-alumel (1,5 mm de diâmetro), aparecem no desenho da Figura 1.

Foram fundidos lingotes de referência, sem qualquer tratamento de refino de grão.

Exame dos Lingotes - Os lingotes foram cortados em seção longitudinal, polidos e atacados quimicamente para as observações macro e micrográficas, para a identificação de defeitos e para a medição do tamanho de grão resultante.

Dos lingotes, foram extraídas as pastilhas utilizadas na medição da densidade do metal sólido, para a avaliação da variação de porosidade; e os corpos de prova para os ensaios de tração, segundo a norma ABNT MB-4. A Figura 2 apresenta a posição no lingote de onde foram extraídos os corpos de prova.

Os ensaios de tração foram realizados numa máquina INSTRON mode

1127, com velocidade de aplicação de carga (velocidade da travessa) de 5 mm/min., à temperatura ambiente de 19°C. Os dados extraídos do ensaio foram: porcentagem de alongamento, limite convencional 0,5% de escoamento e limite de resistência à tração.

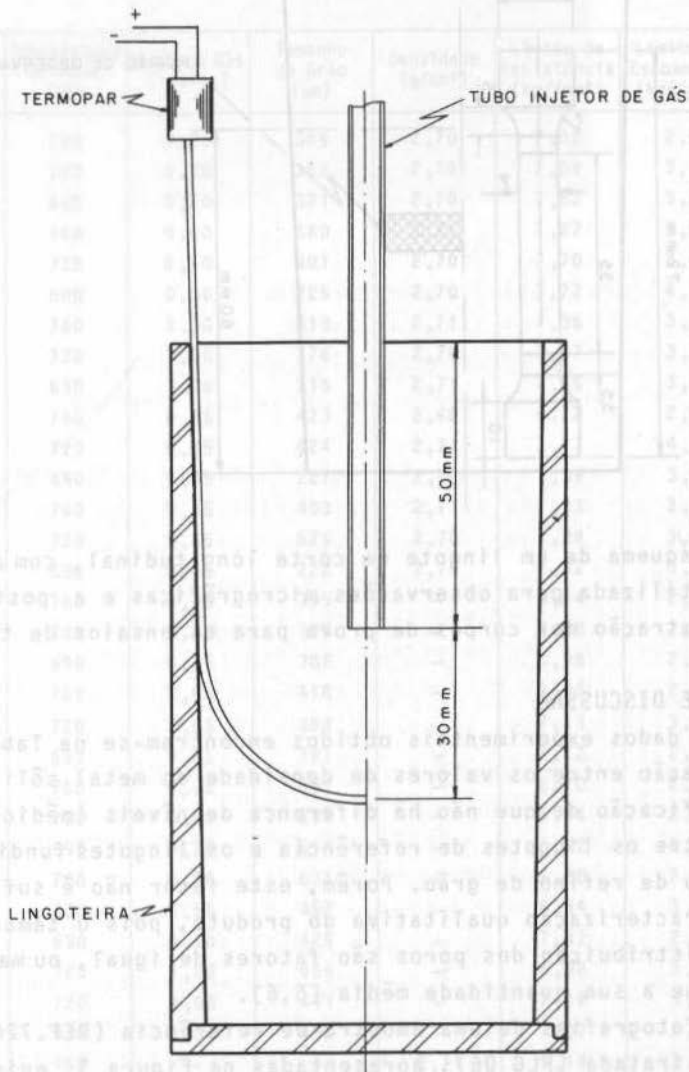


Figura 1. Esquema da montagem do tubo de injeção e do termopar dentro do molde cilíndrico de aço

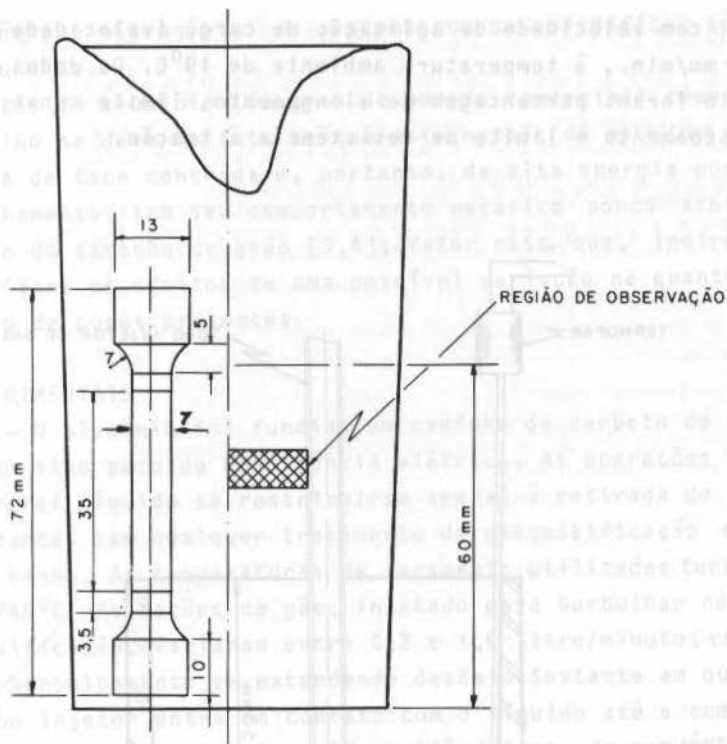


Figura 2. Esquema de um lingote em corte longitudinal, com a região utilizada para observações micrográficas e a posição de extração dos corpos de prova para os ensaios de tração

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Todos os dados experimentais obtidos encontram-se na Tabela 1.

A comparação entre os valores de densidade do metal sólido permite a verificação de que não há diferença de níveis (médios) de porosidade entre os lingotes de referência e os lingotes fundidos com o tratamento de refino de grão. Porém, este fator não é suficiente para uma caracterização qualitativa do produto, pois o tamanho, a forma e a distribuição dos poros são fatores de igual, ou maior, importância que a sua quantidade média [5,6].

As microfotografias de uma amostra de referência (REF.720) e de uma amostra tratada (FLG 06), apresentadas na Figura 3, evidenciam a diferença entre os tamanhos de poros — o lingote de referência apresenta um tamanho aparente de poro em torno de duas vezes maior que o tamanho de poro do lingote refinado. De acordo com Cibula [5],

esta redução do tamanho de poro, produzida pelo refino de grão, po de ser o principal fator responsável pela elevação da resistência à tração do alumínio.

Tabela 1. Quadro geral dos resultados experimentais

Nome da Amostra	Temperatura de Vazão (°C)	Vazão de Gás (l/min.)	Tamanho de Grão ( $\mu\text{m}$ )	Densidade ( $\text{g/cm}^3$ )	Limite de Resistência ( $\text{kgf/mm}^2$ )	Limite de Escoamento ( $\text{kgf/mm}^2$ )	Alongamento (%)
FLG01	760	0,20	309	2,70	7,08	2,9	38,4
FLG02	720	0,20	362	2,70	7,09	3,1	27,6
FLG03	690	0,20	371	2,70	7,52	3,2	47,6
FLG04	760	0,50	560	2,71	7,27	3,5	36,0
FLG05	720	0,50	401	2,70	7,70	3,4	54,0
FLG06	690	0,50	225	2,70	7,72	4,1	27,7
FLG07	760	1,00	410	2,71	7,36	3,3	—
FLG08	720	1,00	376	2,70	7,57	3,3	35,2
FLG09	690	1,00	316	2,71	7,56	3,6	41,4
FLG10	760	0,35	423	2,68	6,72	2,8	30,5
FLG11	720	0,35	424	2,71	7,17	4,3	36,9
FLG12	690	0,35	227	2,70	7,39	3,5	42,0
FLG13	760	0,65	403	2,71	7,23	3,3	43,7
FLG14	720	0,65	526	2,70	7,28	3,6	40,2
FLG15	690	0,65	222	2,70	7,32	3,6	48,6
FLG22	760	0,35	395	—	6,64	2,9	31,1
FLG23	720	0,35	375	—	6,98	2,8	41,4
FLG24	690	0,35	382	—	6,98	2,9	47,0
FLG25	760	0,65	416	—	6,99	2,6	41,6
FLG26	720	0,65	382	—	7,13	3,1	35,3
FLG27	690	0,65	391	—	7,12	2,7	43,5
FLG31	760	0,20	591	—	6,70	2,7	37,5
FLG32	720	0,20	531	—	6,84	2,9	32,0
FLG33	690	0,20	614	—	6,92	2,8	44,2
FLG34	760	0,50	631	—	6,88	2,9	41,8
FLG35	720	0,50	457	—	6,94	3,1	39,9
FLG36	690	0,50	425	—	7,02	2,8	37,1
FLG37	760	1,00	606	—	6,98	3,0	34,3
FLG38	720	1,00	411	—	7,18	3,1	45,4
FLG39	690	1,00	468	—	7,07	3,1	27,6
REF.760	760	—	—	2,71	5,14	2,7	24,5
REF.720	720	—	—	2,70	5,71	2,8	25,6
REF.690	690	—	—	2,70	5,69	2,8	19,3

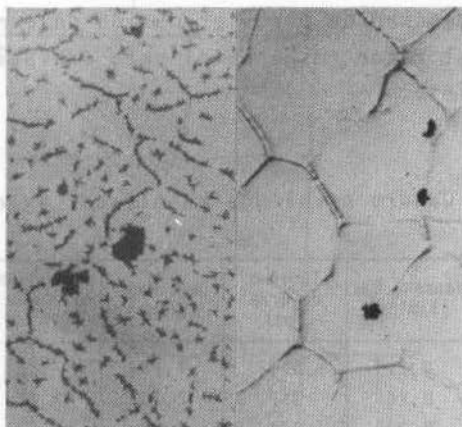


Figura 3. a) lingote REF 720 (27x)  
b) lingote flg 06 (27x)

Microfotografias que mostram a incidência de poros nos lingotes

Com o que foi exposto na introdução deste trabalho sobre as características dos metais de estrutura cristalina cúbica de face centrada e com a relação verificada (mas não definida neste trabalho) entre o tamanho de grão e o tamanho de poro, podemos supor a existência de um relacionamento direto entre os três seguintes fatores: tamanho de grão, tamanho de poro e resistência à tração. Entretanto, pela dificuldade de estabelecimento deste tipo de relação e, antes, pelas dificuldades de controle de porosidade nos metais (quantidade, distribuição, tamanho e forma), costuma-se empregar, tal como no gráfico da Figura 4, apenas relações entre tamanho de grão e limite de resistência à tração, que podem estar camuflando a verdadeira natureza dos fenômenos envolvidos.

O limite de resistência à tração não é, certamente, um dado suficiente para qualificar um produto metálico quanto ao seu desempenho mecânico; entretanto, é um dado suficientemente adequado para qualificar o processo de refino de grão empregado quanto a seus efeitos no mesmo sentido. Portanto, é bastante significativo notar que o valor médio do limite de resistência à tração de todas as amostras tratadas ( $7,14 \text{ kgf/mm}^2$ ) é 29,6% maior que o valor médio das amostras de referência ( $5,51 \text{ kgf/mm}^2$ ).

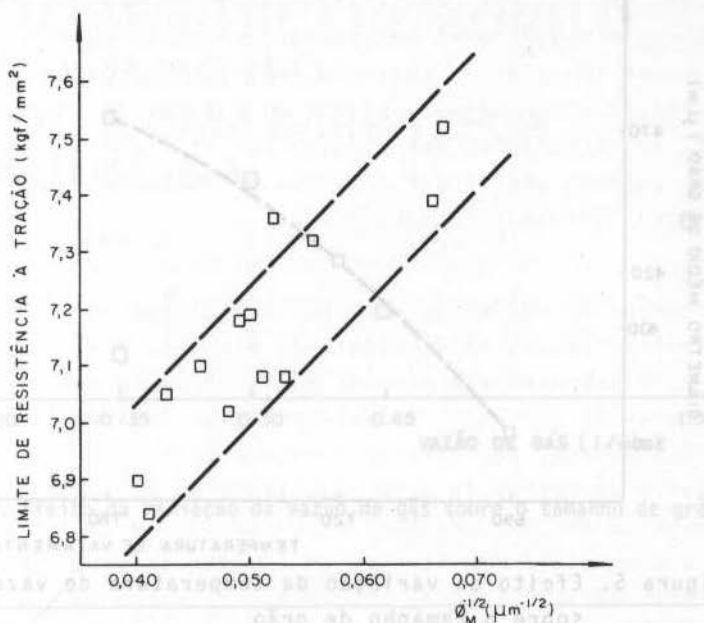


Figura 4. Gráfico do limite de resistência à tração (kgf/mm<sup>2</sup>) X o inverso da raiz quadrada do diâmetro médio de grão

Voltando aos parâmetros do processo (temperatura de vazamento e vazão de gás), notaremos, pelo gráfico da Figura 5, que o tamanho médio de grão aumenta com a elevação da temperatura de vazamento; fenômeno que se explica pela maior facilidade de sobrevivência e de crescimento das partículas de multiplicação com a redução do superaquecimento [7,8]. Portanto, os resultados apresentados pelas Figuras 4, 5 e 6 estão coerentes no sentido de que a redução de temperatura de vazamento, que produz a redução do tamanho de grão, está diretamente relacionada à elevação do limite de resistência à tração.

Por outro lado, não se identifica uma relação regular e definida entre o tamanho médio de grão e a vazão de gás (Figura 7), enquanto que o limite de resistência à tração mostra a tendência, embora suave, de se elevar com o aumento da vazão de gás injetado (Figura 8). Portanto, mais uma vez, não poderemos considerar a alteração do tamanho de grão como única responsável pela mudança no comportamento mecânico dos produtos em questão.

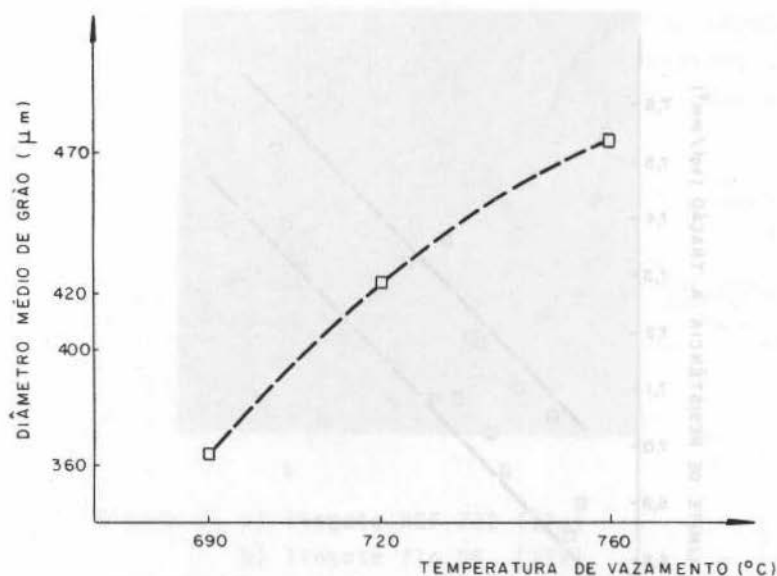


Figura 5. Efeito da variação da temperatura de vazamento sobre o tamanho de grão

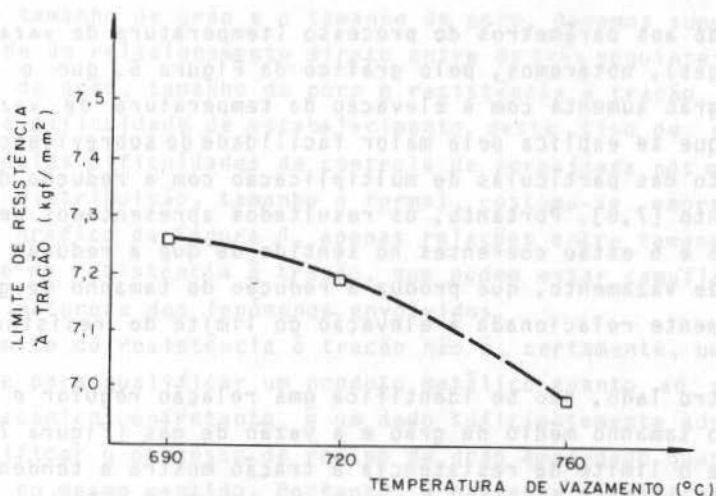


Figura 6. Efeito da variação da temperatura de vazamento sobre o limite de resistência à tração (valores médios)

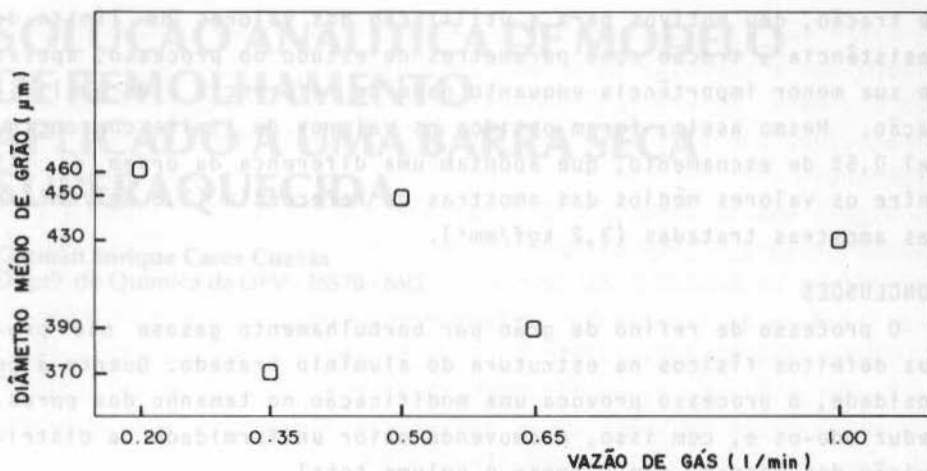


Figura 7. Efeito da variação da vazão de gás sobre o tamanho de grão

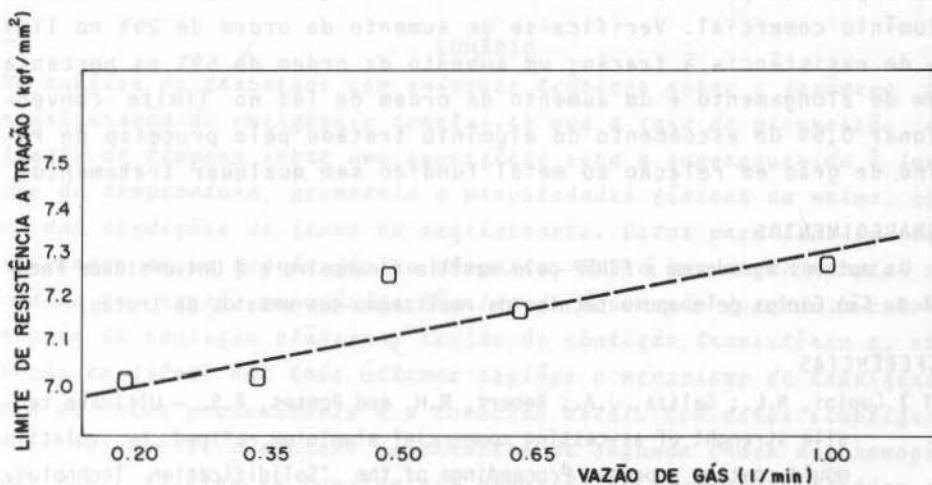


Figura 8. Efeito da variação da vazão de gás sobre o limite de resistência à tração (valores médios)

Quanto à porcentagem de alongamento, verifica-se uma diferença de 68% entre a média dos valores de porcentagem de alongamento das amostras de referência (23,1%) e a média desses valores referentes às amostras tratadas pelo processo de refino de grão (38,9%).

A dificuldade de extração dos limites de escoamento dos gráficos de carga versus deformação, fornecidos pela máquina de ensaio



de tração, deu motivos para a utilização dos valores de limite de resistência à tração como parâmetros de estudo do processo, apesar de sua menor importância enquanto dado de referência e de qualificação. Mesmo assim, foram obtidos os valores de limite convencional 0,5% de escoamento, que apontam uma diferença da ordem de 14% entre os valores médios das amostras de referência (2,8 kgf/mm<sup>2</sup>) e das amostras tratadas (3,2 kgf/mm<sup>2</sup>).

#### CONCLUSÕES

O processo de refino de grão por borbulhamento gasoso não produz defeitos físicos na estrutura do alumínio tratado. Quanto à porosidade, o processo provoca uma modificação no tamanho dos poros, reduzindo-os e, com isso, promovendo maior uniformidade na distribuição dos mesmos, sem alterar o volume total.

O efeito de refino de grão resultante da aplicação do processo é acompanhado por uma sensível melhoria nas qualidades mecânicas no alumínio comercial. Verifica-se um aumento da ordem de 29% no limite de resistência à tração; um aumento da ordem de 69% na porcentagem de alongamento e um aumento da ordem de 14% no limite convencional 0,5% de escoamento do alumínio tratado pelo processo de refino de grão em relação ao metal fundido sem qualquer tratamento.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FINEP pelo auxílio financeiro e à Universidade Federal de São Carlos pelo apoio técnico na realização dos ensaios de tração.

#### REFERÊNCIAS

- [ 1 ] Cupini, N.L.; Galiza, J.A.; Robert, M.H. and Pontes, P.S. — Ultimate tensile strength of as-casting commercial aluminium refined by volatile mould coating process, Proceedings of the "Solidification Technology in the Foundry and Casthouse", Conferences - The Metals Society, 1980.
- [ 2 ] Shukla, D.P.; Goel, D.B. and Pandey, P.C. — Met. Trans., 11B, 166, 1980.
- [ 3 ] Johnston, T.L. and Feltner, C.E. — Met. Trans., 1, 1161, 1970.
- [ 4 ] Campos, V.S. and Pagnano, C.A.G. — Metalurgia ABM, 30, 200, 489, 1974.
- [ 5 ] Cibula, A. and Ruddle, R.W. — The Journal of the Institute of Metals, 76, 361, 1949-50.
- [ 6 ] Gruzleski, J.E.; Thomas, P.M. and Entwistle, R.A. — The Journal of the Institute of British Foundrymen, 71, 4, 69, 1978.
- [ 7 ] Mondolfo, L.F. and Barlock, J.G. — Met. Trans., 6B, 565, 1975.
- [ 8 ] Ohno, A. and Motegi, T. — AFS Cast Metals Research Journal, 11, 2, 45, 1975.

# SOLUÇÃO ANALÍTICA DE MODELO DE REMOLHAMENTO APLICADO A UMA BARRA SECA SUPERAQUECIDA

Germán Enrique Cares Cuevas

Deptº de Química da UFV - 36570 - MG

## SUMÁRIO

*Da análise de trabalhos com enfoques teóricos sobre o fenômeno de refrigeração de emergência conclui-se que a taxa de progressão da frente de têmpera sobre uma superfície seca e superaquecida é função da temperatura, geometria e propriedades físicas da mesma, como das condições de fluxo de refrigerante. Estas premissas são consideradas em um modelo físico proposto, sobre uma seção tubular dividida em: região monofásica líquida de convecção forçada de calor, região de ebulição clássica, região de ebulição transitória e, ebulição em filme. Nas três últimas regiões o mecanismo de transferência de calor predominante é a condução axial. Com estas simplificações resolve-se a equação diferencial de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes, deduzida do balanço energético sobre uma seção elementar do tubo. O código de cálculo RETUSA leva em consideração as variações bruscas dos coeficientes de transferência de calor entre cada região do modelo, bem como as propriedades termohidráulicas locais do fluido refrigerante. Os resultados apresentados na determinação da taxa de progressão da frente de têmpera foram confrontados com outros códigos e dados experimentais, tendo uma boa concordância.*

## INTRODUÇÃO

O Brasil, seguindo a linha de atuação de muitos outros países,

iniciarã em breve a produção de eletricidade a partir da energia nuclear, com a operação da primeira unidade da Central Nuclear de Angra dos Reis. As centrais nucleares operaram com reatores nucleares arrefecidos com água leve pressurizada, tipo PWR (Pressurized Water Reactors).

O problema de segurança dos reatores nucleares tem sido um alvo predominante dos grandes centros de pesquisas nucleares. A NUCLEBRÁS, através do Laboratório de Termohidráulica da Divisão de Testes do Departamento de Tecnologia de Reatores do Centro de Desenvolvimento de Tecnologia Nuclear (CDTN) na área de Refrigeração de Emergência de Reatores a água pressurizada de Belo Horizonte, tem encarado este problema com um programa de trabalho iniciado com testes compressão atmosférica em seções tubulares [10].

O acidente mais crítico de uma central nuclear é aquele que resulta numa perda do refrigerante do circuito primário do reator a taxas que excedem a capacidade de restauração do sistema de controle químico e volumétrico do reator [12]. Este tipo de acidente é identificado como LOCA (Loss of Coolant Accident) e se inicia pela ruptura repentina e completa da tubulação principal do circuito primário num ponto localizado entre a bomba e o vaso de pressão do reator.

O sistema de Refrigeração de Emergência do Núcleo (SREN) atua injetando água boricada quando da ocorrência do acidente tipo LOCA, inundando o núcleo do reator. O objetivo desta injeção de água no sistema é manter as temperaturas das varetas combustíveis em níveis não nocivos à sua integridade física e geométrica.

Neste trabalho, elaborou-se um código de cálculo a partir da resolução analítica da equação diferencial de condução de calor baseado num modelo físico de refrigeração por inundação (Bottom Reflooding). O programa desenvolvido simula a taxa de progressão da frente de têmpera em função da evolução de temperatura de parede de um tubo seco superaquecido por efeito joule, levando-se em consideração os coeficientes de transferência de calor em torno da frente de têmpera e propriedades locais do fluido refrigerante ao longo do tubo.

#### METODOLOGIA

O processo básico de remolhante que ocorre no núcleo do reator é similar ao que ocorre para um tubo aquecido por efeito joule e re-

frigerado por água em ascensão.

A geometria tubular permite obter conhecimentos básicos dos fenômenos de transferência de calor e do escoamento do fluido refrigerante sob condições experimentais definidas "a priori".

O circuito experimental, utilizado como seção de testes no Laboratório de Termohidráulica do CDTN, é um circuito a água com baixa pressão e baixo fluxo térmico. Após o aquecimento térmico por efeito joule, o tubo é refrigerado internamente por água em ascensão. A parte externa do tubo é isolada.

Modelo Físico - O mecanismo físico será interpretado a partir do momento em que a água de refrigeração atingir a base do tubo, iniciando o resfriamento ascendente, a velocidade da frente de temperatura uniforme. A temperatura da frente de temperatura é definida pela temperatura de Leidenfrost ( $T_0$ ). Esta é a máxima temperatura em que o líquido pode atingir a parede do tubo.

O modelo físico reduz-se a uma região estreita da seção tubular em torno da temperatura de Leidenfrost ( $T_0$ ). Esta região está limitada pelas temperaturas de parede  $T_e$  (temperatura de entrada da região em estudo) e  $T_s$  (temperatura de saída da região). Estas temperaturas são os pontos extremos do forte gradiente de temperatura observado nas proximidades da frente de temperatura (Figura 1). Esta região avançará ao longo do tubo com velocidade de frente de temperatura ( $u$ ). A temperatura de Leidenfrost divide esta região em duas sub-regiões, que são a sub-região molhada (de  $T_e$  e  $T_0$ ) e a sub-região seca (de  $T_0$  a  $T_s$ ). A sub-região molhada pode ser ainda subdividida em outras duas sub-regiões. A primeira sub-região está associada ao fenômeno físico de ebulição. Neste estágio da refrigeração o calor flui para o refrigerante através de uma superfície estável sólido-fluido, onde tem lugar a formação de bolhas. Estas bolhas formadas sobre determinados pontos da parede (núcleos) crescem e se destacam para a superfície do líquido. Esta região se estende, até a cota do tubo com temperatura  $T_1$  (temperatura de início da ebulição crítica). Esta segunda sub-região molhada com temperaturas entre  $T_1$  e  $T_0$  é conhecida como região de transição. Nesta sub-região se experimenta uma alta taxa de transferência de calor, por mecanismos ainda indefinidos. Neste trabalho considera-se basicamente uma combinação dos fenômenos de ebulição em filme instável e ebulição nucleada instável. A temperatura neste intervalo é alta, para manter contato líquido contínuo com a parede, e muito baixa, para o conta

to com uma fase vapor estável.

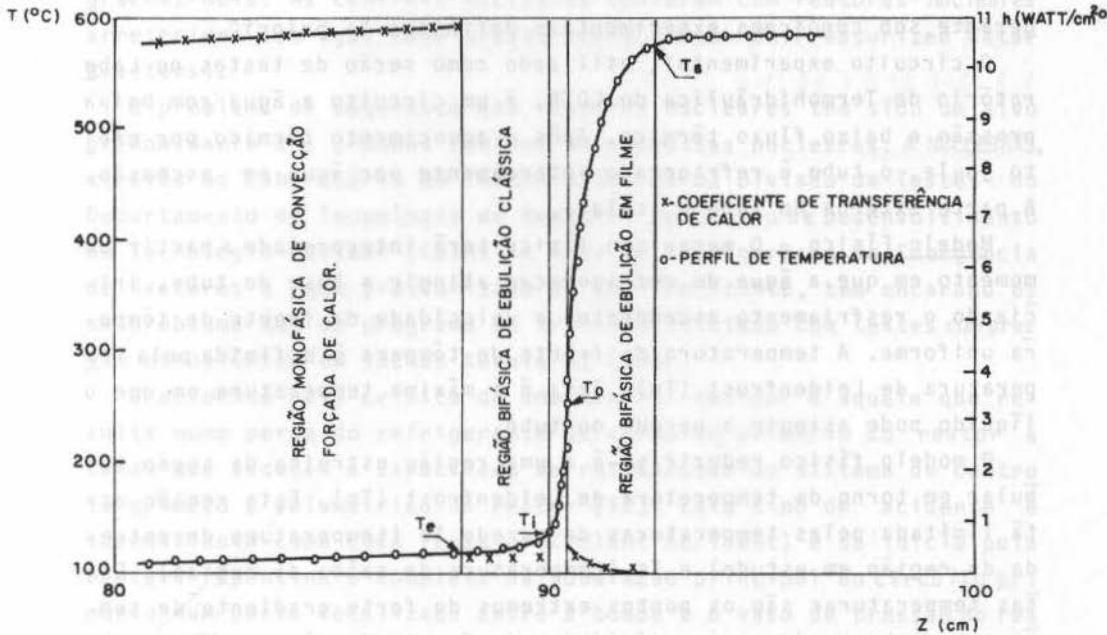


Figura 1. Representação dos coeficientes de transferência de calor e temperatura de parede em função da distância axial do tubo, calculados pelo código RETUSA

Em resumo, o modelo físico em torno da temperatura de Leidenfrost apresentado neste trabalho considera os seguintes coeficientes de transferência de calor (Figura 1).

Na região molhada  $\left\{ \begin{array}{l} \text{sub-região 1, de ebulição clássica: } h_1 \\ \text{sub-região 2, de ebulição transitória: } h_2 \end{array} \right.$

Na região seca, ebulição em filme:  $h_3$

Na região seca, ebulição em filme:  $h_3$

Modelo Matemático — Deduzir-se-á o modelo matemático a partir de um balanço de energia em regime transitório sobre um elemento de volume do tubo. O sistema inicialmente tubular foi considerado como placa plana de largura  $2\pi R$ , ou seja, o cilindro estendido após um corte ao longo de sua geratriz.

Em função do modelo físico, considera-se somente a condução de calor axial na placa. A condução de calor transversal é nula ( $\frac{dT}{dy} = 0$ ).

A condução de calor radial é desprezível

$$\left( \frac{dT}{dx} = 0 \right)$$

### Balço Energético

I - Calor que entra no elemento do volume

$$1 : \text{Por condução em } z = -K \left. \frac{dT}{dz} \right|_z \text{ Eddy}$$

$$2 : \text{Calor gerado no elemento} = qv \text{ Eddydz}$$

II - Calor que sai do elemento de volume

$$3 : \text{Por condução em } z + \Delta z = -K \left( \frac{dT}{dz} \right) \text{ Eddy} + \frac{d}{dz} \left( -K \frac{dT}{dz} \text{ Eddy} \right) dz$$

$$4 : \text{Por convecção e radiação} = h(T - T_{sa}) \text{ dydz}$$

$$5 : \text{Perda de energia interna} = P C \frac{dT}{dt} \text{ Eddydz}$$

Igualando I e II, simplificando e rearranjando:

$$K \frac{d^2T}{dz^2} \text{ Eddydz} + qv \text{ Eddydz} = h(T - T_{sa}) \text{ dydz} + \frac{\rho C dT}{dt} \text{ Eddydz}$$

Dividindo por dydz, tem-se

$$KE \frac{d^2T}{dz^2} + qvE = h(T - T_{sa}) + CE \frac{dT}{dt}$$

Com a seguinte mudança de variáveis

$$z = Z + ut$$

a equação fica:

$$KE \frac{d^2T}{dz^2} + \rho CEu \frac{dT}{dz} - hT = -hT_{sa} - qvE$$

Agora, caso se expresse a equação em função das variáveis adimensionais.

$$Z^* = \frac{Z}{\delta}$$

$$\delta^* = \frac{\rho C u \delta}{K}$$

a equação resultante é:

$$\frac{d^2 T}{dz^{*2}} + \delta^* \frac{dT}{dz^*} - \frac{h \delta^2 T}{qvE} = - \left( \frac{qv}{K} \delta^2 + \frac{h \delta^2 T_{sa}}{qvE} \right)$$

E seja ainda D operador de derivação, ao qual será aplicada a variável transiente T

$$\left( D^2 + D - \frac{h \delta^2}{KE} \right) T = - \left( \frac{qv}{K} \delta^2 + \frac{h \delta^2 T_{sa}}{qvE} \right)$$

Esta equação é reconhecida como equação diferencial homogênea de segunda ordem com coeficiente constante [8].

D : operador diferencial (d/dZ\*)

$\rho$  : densidade

C : capacidade calorífica

u : velocidade da frente de remolhamento

$\delta$  : comprimento da região de transição

K : condutividade térmica

h : coeficiente de transferência de calor

E : espessura do tubo

T : temperatura

T<sub>sa</sub>: temperatura de saturação

qv : fluxo de calor volumétrico

Z : distância à frente de tēpera

t : tempo

Dados Experimentais - Para a escolha de dados globais do sistema, bem como referência para comparar os resultados encontrado neste trabalho dispõe-se dos estudos experimentais realizados no CDTN [10] sobre o circuito suporte nº1 (CS/1), do Laboratório de Termohidráulica, dos dados experimentais obtidos por Andreoni [2] nos laboratórios da Universidade de Grenoblē na França e dos dados experimentais apresentados por Kohler [7], obtidos nos laboratórios da KWU da Alemanha.

Em todos os casos o problema é representado por circuitos que possam produzir exatamente a sequência de eventos no resfriamento

de emergência. Em geral, estes circuitos satisfazem as seguintes premissas [1]:

- água de remolhamento a velocidade constante
- potência térmica dissipada na seção de testes constantes
- o número de tubos aquecidos é reduzido a um [1] considerando duas possíveis seções de ensaio: anular ou tubular

Código de Cálculo RETUSA [3] — O programa RETUSA (Remolhamento de Tubos Superaquecidos) foi executado de maneira que possam ser incluídos novos modelos de evolução da mistura bifásica sobre o tubo, bem como incorporação de correlações para cálculo de coeficientes de transferência de calor.

A linguagem é o FORTRAN IV, para o sistema IBM/360.

O programa é dividido em quatro partes básicas, correspondendo às quatro equações de cálculo de temperatura de parede. A primeira região é definida pelo fenômeno de convecção forçada de calor, da parede para o líquido sub-resfriado até a temperatura  $T_e$  de início da região de ebulição clássica. As outras três equações se correspondem com as soluções da equação diferencial para cada região em estudo. Estas regiões estão dominadas pelo fenômeno de condução axial de calor no tubo, da parte seca para a molhada.

A transição de uma região para outra ocorre quando a temperatura da parede atinge valores definidos "a priori".

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Desde que os mecanismos que governam o fenômeno de reindução não sejam definidos na literatura, aqueles adotados em qualquer solução numérica serão sempre alvo de discussão.

Na região de transição, onde o gradiente de temperatura é mais elevado (Figura 1), parece correta a suposição de que o mecanismo que governa a transferência de calor seja a condução axial no tubo; porém, a coexistência de dois regimes de fluxo (ebulição nucleada instável e ebulição em filme instável) dificulta a avaliação das propriedades de transporte ou termodinâmica no local, desde que não se tenha informação prática sobre qual dos regimes é predominante no espaço, e tempo. Esta região foi estudada e testada no programa, principalmente em relação ao cálculo dos coeficientes de transferência de calor [7], [11], [5], [6], [9], [2] definidos no modelo físico. Inicialmente, os coeficientes de transferência, bem como o comprimento da região de transição ( $\delta$ ), foram calculados conside-



rando a velocidade da frente de têmpera uniforme. Posteriormente, confirmou-se que a velocidade da frente de têmpera se modifica suavemente em fun o do título e das condi es termohidráulicas de entradas do fluido refrigerante. Para corrigir os cálculos encontrados, principalmente em rela o   taxa de remolhamento no tubo, modificou-se o modelo proposto pelo autor. Primeiramente determinaram-se os coeficientes de troca de calor por correla es independentes da velocidade. Com os valores dos coeficientes de troca calculou-se a velocidade da frente da têmpera, melhorando sensivelmente o modelo proposto em rela o aos dados experimentais disponíveis.

Longe da frente de têmpera, onde o gradiente de temperatura   suave, os mecanismos de transferência de calor estão definidos. Na região molhada, o mecanismo de transferência de calor   a convec o forçada de calor do tubo para o fluido refrigerante. Na região seca, a situa o   um pouco mais complicada, porém seu efeito sobre a evolu o da frente de remolhamento no tubo   bem menor, não sendo aprofundado seu estudo.

A velocidade da frente de remolhamento e o tipo de escoamento apresentado pela mistura bifásica dependem das propriedades e condi es de entrada do fluido refrigerante. Nos casos estudados verificam-se altas velocidades de entrada de água, com altas taxas de sub-resfriamento. Estas características do fluido permitem desenvolver um escoamento bifásico sobre o tubo da forma mostrada na Fig. 2.

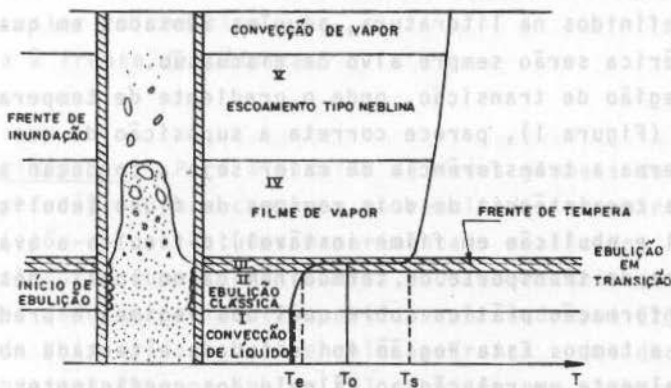


Figura 2. Configura o de escoamento "Tipo A".

Zona de transferência de calor e evolu o de temperatura ao longo do canal de escoamento

Neste caso têm-se velocidades crescentes da frente de tãpera; a medida que esta avança sobre o tubo.

A Figura 3 apresenta os resultados obtidos com o código RETUSA e os dados experimentais obtidos pelo CS/1. Neste ponto é interessante que o CS/1 foi projetado para obter resultados qualitativos; daí a sua deficiente instrumentação. Não obstante esta limitação, pode-se observar uma concordância razoável entre os valores experimentais e os simulados pelo RETUSA sobre a seção de testes de CS/1.

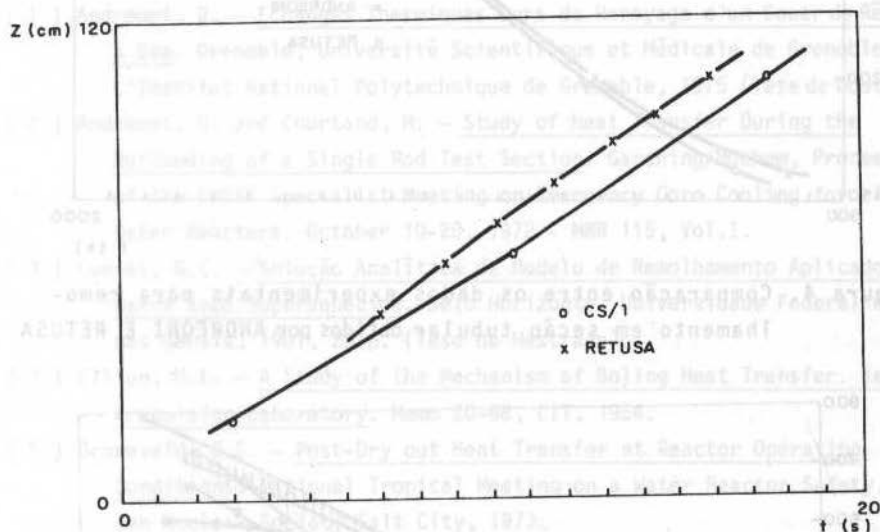


Figura 3. Comparação entre dados experimentais obtidos no CS/1 e RETUSA

A Figura 4 compara os resultados experimentais obtidos por Andreoni sobre seu circuito de ensaio com os dados simulados pela RETUSA. O código acompanha a curva experimental em toda sua extensão, com exceção dos valores do último termopar, ficando um desvio de 1 a 2% entre ambos os dados. É bom indicar que o comprimento de tubo de CS/1 é 120cm e, no de Andreoni, 320cm.

A Figura 5 representa uma confrontação do código RETUSA com outros códigos de cálculo, reconhecidos universalmente na área de refrigeração de emergência: HYDROFLUT, REPLUX-GRS, RELAP4-Mod.6. Observa-se que os pontos simulados pelo RETUSA são os que têm melhor concordância com os dados experimentais.

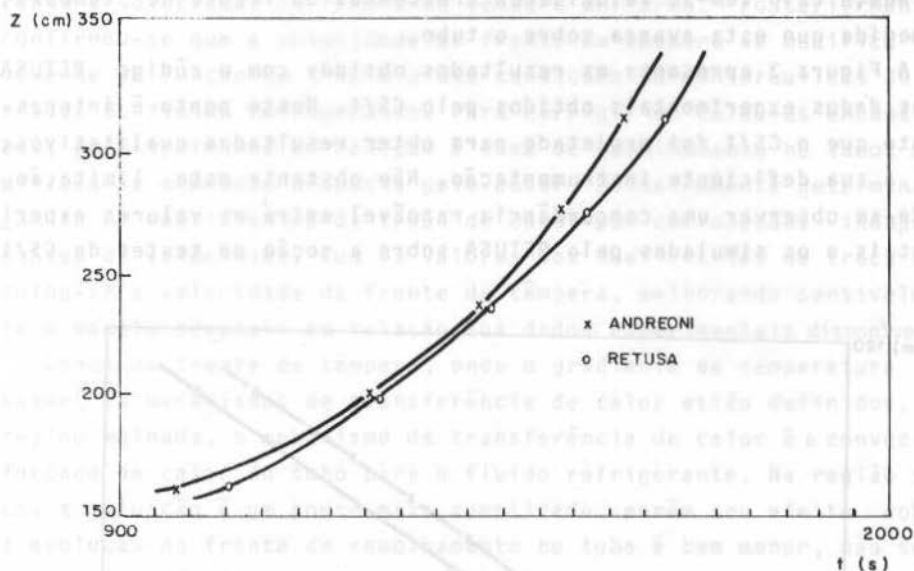


Figura 4. Comparação entre os dados experimentais para remoção em seção tubular obtidos por ANDREONI E RETUSA

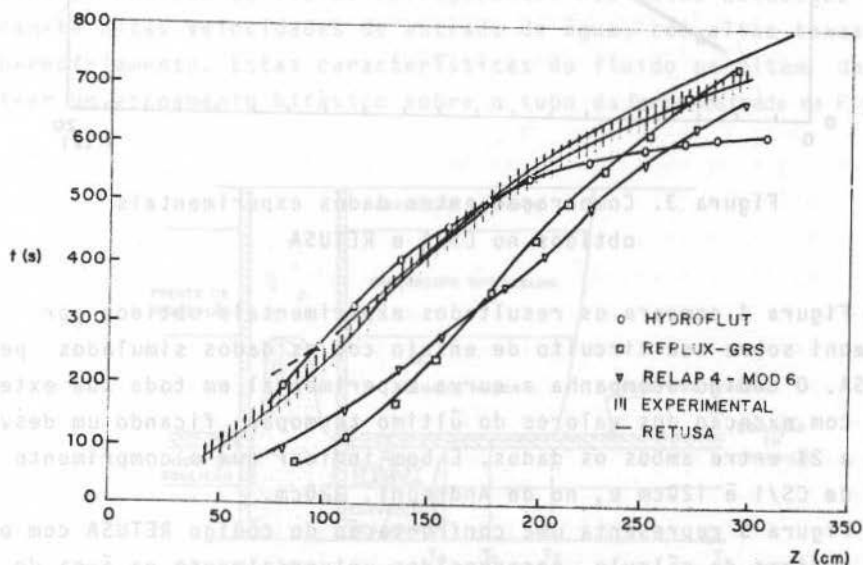


Figura 5. Comparação entre os dados experimentais para remoção em seção tubular obtidos em GRENOBLE e os cálculos por diferentes códigos entre eles ou RETUSA

## AGRADECIMENTOS

A Universidade Federal de Minas (UFMG), pela cessão de uma de suas teses de mestrado, fonte de pesquisa deste trabalho.

Aos Funcionários do Laboratório de Termohidráulica da Divisão de Testes do Departamento de Tecnologia de Reatores do Centro de Desenvolvimento de Tecnologia Nuclear (CDNT) da Nuclebrás, pela colaboração.

## REFERÊNCIAS

- [ 1 ] Andreoni, D. — Echanges Thermiques Lors do Renoyage d'un Couer de Réacteur a Eua. Grenoble, Université Scientifique et Médicale de Grenoble et L'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1975 (Tese de Doutorado).
- [ 2 ] Andreoni, D. and Courtand, M. — Study of Heat Transfer During the Reflooding of a Single Rod Test Section. Garching/Müchem, Proceedings of the CREST Specialist Meeting on Emergency Core Cooling for Light Water Reactors. October 10-20, 1972 - MRR 115, Vol.I.
- [ 3 ] Cuevas, G.E. — Solução Analítica de Modelo de Remolhamento Aplicado a uma Barra Seca Superaquecida. Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas Gerais, 1981, 201p. (Tese de Mestrado).
- [ 4 ] Ellion, M.E. — A Study of the Mechanism of Boiling Heat Transfer. jet Propulsion Laboratory. Memo 20-88, CIT, 1954.
- [ 5 ] Groneveld, D.C. — Post-Dry out Heat Transfer at Reactor Operating Conditions. National Tropical Meeting on a Water Reactor Safety, American Nuclear Society Salt City, 1973.
- [ 6 ] Jacob, M. — Heat Transfer. New York: John Wiley and Sons Inc., 1956.
- [ 7 ] Köhler, W. — Precalculation of CSNI LOCA Standar Problem nº 7, on Reloading with the Hydroflut Code. Arbeitsbericht KMU - R513/9/79.
- [ 8 ] Kreider, D.; Kuller, D.; Ostberg, O.R.; Perkins, F.E. — Introdução à Análise Linear. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico Vol. II, 1972.
- [ 9 ] Kreith, F. — Princípios de Transmissão de Calor. São Paulo, Blücher, 1977.
- [ 10 ] Pereira, V.Q. — Resfriamento de Segurança por Imersão. Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas Gerais, 1981 (Tese de Mestrado).
- [ 11 ] Polomik, E.E.; Levy, S. and Sawochka, S.G. — Heat Transfer Coefficient with Annular Flow During Once Through Boiling of Water to 10% of Quality to at 800, 1000 and psi. GEAP 2703, 1961.
- [ 12 ] 10 CFR 50. Appendix A. General Desing Criteria for Nuclear Powers Plants. Code of Federal Regulations. Title 10, Atomic Energy Commission. Part 50, Licensing of Production and Utilization Facilities.

# APLICAÇÃO DE B-SPLINES NO PROBLEMA DE WEISZ-HICKS

**Fabio H. L. A. Ribeiro**  
IME/Seção de Química

**Jorge Gusmão da Silva**  
IME/Seção de Química

**Rubens Sampaio**  
Deptº de Engenharia Mecânica - PUC/RJ

## SUMÁRIO

Apresenta-se o método da colocação, usando-se como aproximantes as funções B-Splines, na solução de um problema clássico de reação-difusão que ocorre no interior de um catalisador poroso (problema de Weisz-Hicks). Esses métodos combinados permitem a resolução numérica de uma EDO não-linear, com condições de contorno não-lineares, com programação simples a partir de subrotinas, implantadas. O método se mostrou eficiente na resolução de EDO com soluções múltiplas, e em problemas que apresentem variações bruscas da variável dependente em um ou mais pontos do domínio, i.e., do tipo encontrado em problemas que envolvem uma camada limite.

## INTRODUÇÃO

O problema físico consiste em se obter a taxa global de uma reação não isotérmica de primeira ordem do tipo  $A+B$ , que ocorre em uma pelota homogênea de catalisador poroso, em condições estacionárias, e isentas de restrições externas ao transporte de massa ou energia.

As interações entre a difusão interna, a condução de calor e a reação química são descritas pelo sistema de EDO de segunda ordem: [1]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} = \theta^2 \exp\left[\gamma\left(1 - \frac{1}{t}\right)\right] y \quad (1)$$

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dt}{dx} = -\beta \vartheta^2 \exp\left[\gamma\left(1 - \frac{1}{t}\right)\right] y \quad (2)$$

onde  $y$ ,  $t$  e  $x$  são respectivamente a concentração, temperatura e coordenada radial dimensionais.  $\vartheta$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  representam o módulo de Thiele e os parâmetros de termicidade e energia de ativação.

Supõe-se que a solução seja simétrica em relação à origem e que as condições externas sejam conhecidas, ou seja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} = 0 \quad \text{em } x = 0 \quad (3)$$

$$y = t = 1 \quad \text{em } x = 1 \quad (4)$$

As equações (1) e (2) podem ser desacopladas [2], resultando para a conservação de massa

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} = \vartheta^2 y \exp\left[\gamma\beta \frac{1-y}{1+\beta(1-y)}\right] \quad (5)$$

O interesse reside na determinação do fator de efetividade  $\eta$ , que é definido como a relação entre a taxa observada para toda pelota e aquela que seria observada na ausência de restrições aos transportes de massa e energia. Deduz-se [1] dessa definição que

$$\eta = \frac{3}{\vartheta^2} y'(1) \quad (6)$$

Por se tratar de um problema não-linear de valor de contorno, (3)-(5) pode apresentar soluções múltiplas em determinadas regiões dos parâmetros  $\vartheta$ ,  $\gamma$  e  $\beta$ .

Alguns autores [3-5] já aplicaram o método da colocação com polinômios de Jacobi na resolução desse problema. Aproveitando a simetria propuseram uma solução da forma

$$y^{(n)} = y(1) + (1-x^2) \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n)} P_i(x^2) = 1 + (1-x^2) \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n)} P_i(x^2) \quad (7)$$

onde  $P_i$  é o  $i$ -ésimo polinômio de Jacobi [6].

Observe-se que a aproximante já satisfaz as condições de contorno. Os parâmetros  $a_i^{(n)}$  foram determinados satisfazendo-se a EDO(5) em  $n$  pontos de colocação, criteriosamente escolhidos como os zeros de  $P_n(x^2)$ .

Na faixa de parâmetros onde não ocorrem variações bruscas de concentração na fronteira, o método acima se mostrou eficiente. Contudo, quando existem tais variações, a convergência é demorada, pela dificuldade de se reproduzir o comportamento anômalo com apenas um polinômio.

Nesse trabalho expressou-se a aproximante como uma função poli-nomial seccionalmente contínua, gerada através das B-Splines.

### AS FUNÇÕES B-SPLINES

A Figura 1 ilustra uma função polinomial seccionalmente contínua (função PSC). Os pontos  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_5$  são chamados pontos de quebra de  $f$ . Em cada subintervalo  $f$  é um polinômio de ordem  $K$ , ou seja  $f(x) = p_i(x)$  se  $\xi_i < x < \xi_{i+1}$   $i = 1, \dots, 4$ .

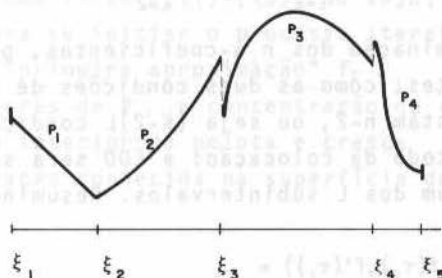


Figura 1. Exemplo de função polinomial seccionalmente contínua

Tais funções podem ser descontínuas nos pontos de quebra. Contudo, a aproximante deve ser escolhida dentre as funções PSC que sejam continuamente diferenciáveis. O conjunto de tais funções é um espaço vetorial denotado por  $\mathbb{P}_{K, \xi, V}$ ; onde  $V = (V_1, \dots, V_i, \dots, V_L)$  é tal que  $V_i$  especificada a suavidade da curva nos pontos de quebra interiores  $\xi_2, \dots, \xi_L$ .

A definição das funções B-Splines, assim como o teorema de Curry e Schomberg, que permite construir as B-Splines (Splines de base) como uma base para o espaço  $\mathbb{P}_{K, \xi, V}$ , constam do apêndice.

Duas vantagens de empregarmos as B-Splines são:

- i) qualquer elemento de  $\mathbb{P}_{K, \xi, V}$  pode ser gerado facilmente em um computador;
- ii) os elementos da base têm suporte limitado, isto é, são não-nulos apenas em uma pequena região de seus domínios. Isto implicará

que a matriz associada ao método da colocação concentre os elementos não-nulos em torno da diagonal principal.

#### O METODO NUMERICO

A aproximante, por ser um elemento de  $\mathbb{P}_{K,\xi,v}$ , é escrita como uma combinação linear das B-Splines, ou seja

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{j,K,t}(x)$$

onde a sequência de nós ( $t$ ) e a dimensão  $n$  de  $\mathbb{P}_{K,\xi,v}$  são determinadas pelo teorema de Curry e Schomberg (apêndice), mais especificamente,

$$n = KL - \sum_{i=2}^L v_i = KL - \sum_{i=2}^L 2 = (K-2)L + 2$$

Para a determinação dos  $n$   $\alpha$ -coeficientes, precisamos de  $n$  condições independentes; como as duas condições de contorno devem ser satisfeitas, restam  $n-2$ , ou seja  $(K-2)L$  condições. Estas serão fornecidas pelo método da colocação: a EDO será satisfeita em  $(K-2)$  pontos em cada um dos  $L$  subintervalos. Resumindo, devemos satisfazer:

$$D^2 f(\tau_i) = F(\tau_i, f(\tau_i), f'(\tau_i)) = -\frac{2}{\tau_i} f'(\tau_i) + \theta^2 \tau_i \exp\left[\gamma\beta \frac{1-\tau_i}{1+\beta(1-\tau_i)}\right] \quad i=1, \dots, (K-2)L \quad (8)$$

$$f'(0) = 0 \quad (9)$$

$$f(1) = 1 \quad (10)$$

Os pontos de colocação ( $\tau_i$ ) são distribuídos da mesma maneira em cada subintervalo, a partir dos zeros do  $(K-2)$ -ésimo polinômio de Legendre, de modo a se obter boa precisão [6].

Por ser não-linear, (8)-(10) será resolvido pelo método da quase-linearização [7]. Seja  $f_j$  a solução aproximada após a  $i$ -ésima iteração ( $f_j \in \mathbb{P}_{K,\xi,v}$ ). A função  $f_{j+1}$  é obtida resolvendo-se o sistema linear [6].

$$\sum_{m=1}^n (LB_{m,\xi,t})(\tau_i) \alpha_m^{j+1} = h(\tau_i) \quad (11)$$



$$\sum_{m=1}^n \alpha_m^{j+1} B'_{m,K,t}(0) = 0 \tag{12}$$

$$\sum_{m=1}^n \alpha_m^{j+1} B_{m,k,t}(1) = 1 \tag{13}$$

onde

$$(Lz)(x) = (D^2z)(x) + v_1(x) Dz(x) + v_0(x) z(x)$$

$$v_k(x) = - \left. \frac{\partial F}{\partial z_k} (x, z_0, z_1) \right|_{(x, f_j(x), f'_j(x))} \quad k = 0, 1$$

$$h(x) = F(x, f_j(x), f'_j(x)) + v_0(x) f_j(x) + v_1(x) f'_j(x) \Rightarrow$$

Demonstra-se que (8)-(10) possui uma solução  $f = \lim f_j$  onde  $f_{j+1}$  é a solução do problema linear (11)-(13), ou seja,  $\alpha_m = \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_m^j$ .

Observe-se que para se iniciar o processo iterativo é necessário se fornecer uma "primeira aproximação"  $f_0$ .

Para elevados valores de  $\emptyset$ , a concentração do reagente se torna praticamente nula no interior da pelota e cresce repentinamente, atingindo a concentração conhecida na superfície desta, conforme ilustra a Figura 2.

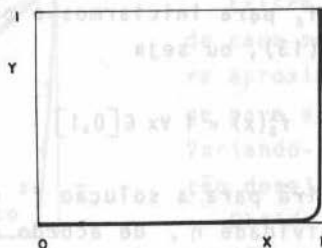


Figura 2. Perfil de concentração para elevados valores de  $\emptyset$

Nesses problemas onde ocorre variação brusca da variável dependente em um ou mais pontos do domínio, consegue-se uma melhor aproximação redistribuindo-se os pontos de quebra, de modo a concentrar os pontos de colocação nas regiões de elevados gradientes, conforme descrito em de Boor [8].

## PROCEDIMENTO

Aplicar-se-á o método na obtenção da curva  $\eta \times \theta$  para o caso particular  $\gamma = 30$ ,  $\beta = 0,6$  e  $0,05 \leq \theta \leq 1$ , para o qual podem existir até 3 soluções [1], conforme ilustra a Figura 3. Dividir-se-á o procedimento em três partes, de acordo com a solução procurada.

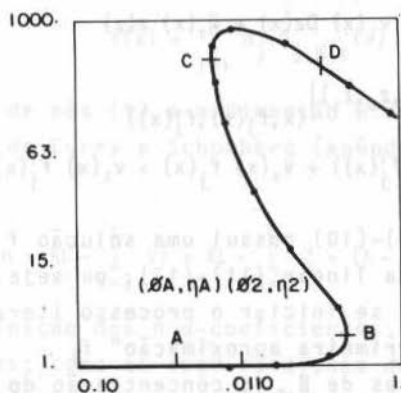


Figura 3. Curva  $\eta \times \theta$  (escala logarítmica)

i) Obtenção do trecho A-B – Para pequenos valores de  $\theta$ , a concentração no interior do catalisador não difere muito daquela encontrada na superfície externa. Essa informação nos facilita obter uma "primeira aproximação"  $f_0$  para iniciarmos o processo iterativo, seguindo as equações (11)-(13), ou seja

$$f_0^1(x) = 1 \quad \forall x \in [0,1] \quad (14)$$

Tal processo convergirá para a solução  $f^1$  de (8)-(10), com a qual obtemos o fator de efetividade  $\eta$ , de acordo com (6). Mas esse par  $(\theta_A = \theta_1, \eta_A = \eta_1)$  é apenas um ponto da curva  $\theta \times \eta$ . Para obtermos outro, incrementamos  $\theta$ , ou seja,  $\theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$ . Como o ponto  $(\theta_2, \eta_2)$  está próximo do anterior  $(\theta_1, \eta_1)$ , ao invés de usarmos (14) como aproximação inicial para esse novo ponto, devemos fazer  $f_0^2 = f^1$ . Esta aproximação é bastante superior (portanto diminuirá o tempo necessário para a convergência), e nos garantirá que a aproximação ficará restrita ao trecho A-B na região de soluções múltiplas, uma vez que a convergência ocorre para a solução mais "próxima da aproximação" inicial fornecida. Dessa forma pode-se prosseguir na curva  $\theta \times \eta$

até o ponto crítico B (Figura 3).

Como a cada novo ponto obtido corresponde um acréscimo em  $\theta$ , o gradiente de concentração se eleva próximo a  $x = 1$ . Por isso, a cada novo valor de  $\theta$ , redistribuem-se os pontos de quebra, conforme descrito anteriormente.

ii) Obtenção do trecho C-D — Uma vez obtido o primeiro ponto nesse trecho, prossegue-se em direção ao ponto crítico C (Figura 3), de maneira análoga ao item anterior. Basta-nos, portanto, fornecer uma boa "primeira aproximação",  $f_0^D$ , para o ponto  $(\theta_D, \eta_D)$ . Como os perfis nessa região se assemelham aquele indicado na Figura 2, faremos

$$f_0^D = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

iii) Obtenção do trecho B-C — O primeiro ponto nessa região teve como primeira aproximação a função

$$f_0^{B-C}(x) = 1 + (1 - y_0)(x - 1) \quad \forall x \in [0,1]$$

onde  $y_0$  é um parâmetro que se fez variar entre 0 e 1. A Figura 4 ilustra os três perfis possíveis para esse valor de  $\theta$ .

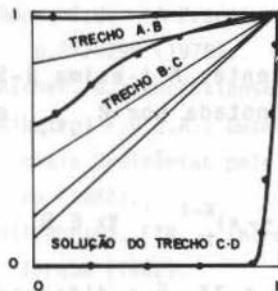


Figura 4

Existe uma vizinhança em torno de cada solução, na qual a "primeira aproximação" fornecida converge para essa solução específica. Variando-se  $y_0$ , obtêm-se a solução desejada.

Obtido o primeiro ponto nessa região, os demais são encontrados conforme o item i.

## CONCLUSÃO

O método da colocação com funções B-Splines se mostrou eficiente na resolução numérica de problemas de valor de contorno em EDO não-lineares. O problema de se determinar qual dos elementos de  $P_{K,\xi,v}$  satisfaz as condições de contorno e a EDO nos pontos de colocação se reduz à resolução de um sistema linear repetidas vezes.

Como as B-Splines possuem suporte limitado [8], tal sistema concentra os valores não-nulos em torno da diagonal principal, o que facilita bastante a resolução do sistema linear. Observe-se que cada condição de contorno é traduzida por uma equação em tal sistema, como as equações (12) e (13) de nosso exemplo; essa característica torna simples a resolução de problemas em que as condições estejam em dois ou mais pontos do domínio. Além da aplicação na solução de uma única EDO, esses programas podem ser generalizados de modo a se resolverem sistemas de EDO não-linear, como foi realizado por Ascher et al [9].

O algoritmo [8] para a redistribuição dos pontos quebra se mostrou bastante eficiente para problemas que apresentem variações bruscas da variável dependente em um ou mais pontos do domínio.

O método também se mostrou eficiente na obtenção de soluções múltiplas de EDO. Contudo, um conhecimento do problema físico é necessário a fim de se fornecer uma primeira aproximação a cada uma das múltiplas soluções.

As subrotinas usadas podem ser encontradas em de Boor [8], juntamente com o suporte teórico e outras aplicações de B-Splines. Para utilização imediata das subrotinas (que podem ser conseguidas com os autores), recomendamos Ribeiro [10].

## APÊNDICE

### DEFINIÇÃO [8]

Seja  $t = (t_i)$  uma seqüência não decrescente. A  $i$ -ésima B-Spline de ordem  $K$  para a seqüência de nós  $t$ , é denotada por  $B_{i,K,t}$  e definida por

$$B_{i,K,t}(x) = (t_{i+K} - t_i) [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+K}]_+^{K-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

onde  $(z)_+^{K-1} = [\max\{z, 0\}]^{K-1}$  e  $[t_i, t_{i+1}, \dots, t_j]_+^j$  é a diferença dividida de ordem  $j-1$  de  $f$  nos pontos  $t_i, \dots, t_j$  [11].

A seqüência de nós  $t$  que permite construir as B-Splines como base de  $\mathbb{P}_{K,\xi,v}$  é especificada pelo teorema abaixo.

### TEOREMA DE CURRY E SCHOMBERG [8]

Para uma dada seqüência estritamente crescente  $\xi = (\xi_i)_1^{L+1}$  e uma dada seqüência de inteiros não negativos  $V = (V_i)_2^L$ ,  $(f^{(j-1)}(\xi_i^+) - f^{(j-1)}(\xi_i^-) = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, V_i$ ) com  $V_i \leq K$  para todo  $i$ , faça

mos  $n = K + \sum_{i=2}^L (K - V_i) = KL - \sum_{i=2}^L V_i = \dim \mathbb{P}_{K, \xi, V}$  e seja  $t = (t_i)_1^{n+K}$  qualquer seqüência não decrescente, de maneira que:

- i)  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_K \leq \xi_1$  e  $\xi_{L+1} \leq t_{n+1} \leq \dots \leq t_{n+K}$
- ii) para  $i = 2, \dots, L$ , o número  $\xi_i$  ocorre exatamente  $K - V_i$  vezes em  $t$ .

Então a seqüência  $B_1, \dots, B_n$  de B-Splines de ordem  $K$  para a seqüência de nós  $t$  é uma base para  $\mathbb{P}_{K, \xi, V}$ , consideradas como funções em  $[t_K, t_{n+1}]$ .

#### REFERÊNCIAS

- [ 1 ] Weisz, P.B. e Hicks, J.S. — Chem. Engng. Sci., 17, 265 (1962).
- [ 2 ] Damkohler, G. — Z. Phys. Chem., A 193, 16 (1943).
- [ 3 ] Villadsen, J.V. e Michelsen, M.L. — The Solution of Differential Equation Models by Polynomial Approximation, Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nova Jersey (1978).
- [ 4 ] Sorenson, J.P.; Guertin, E.W. e Stewart, W.E. — AIChE J., 19, 969 (1973).
- [ 5 ] Ferguson, N.B. e Finlayson, B.A. — Chem. Engng. J., 1, 327 (1970).
- [ 6 ] Boor, C.de e Swartz, B. — SIAM J. Numer. Anal., 10, 582 (1973).
- [ 7 ] Lee, E.S. — Quasilinearization and Invariant Imbedding, Academic Press, Nova Iorque (1968).
- [ 8 ] Boor, C.de — A Practical Guide to Splines, Springer-Verlag, Nova Iorque, p.277-298 (1978).
- [ 9 ] Ascher, U.; Christiansen, J. e Russel, R.D. — Math. Comp., 33, 659 (1979).
- [ 10 ] Ribeiro, F.H.L.A.; Gusmão, J. e Sampaio, R. — Solução de Equações Diferenciais Ordinárias pelo Método da Colocação, Editora do IME, Rio de Janeiro (1982).
- [ 11 ] Hildebrand, F.B. — Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill, Nova Iorque (1962).



The Revista Brasileira de Ciências Mecânicas (Brazilian Journal of Mechanical Sciences) is a technico-scientific publication of Editora Campus Ltda, sponsored by the Brazilian Association of Mechanical Sciences. It is intended as an organ for the publication of relevant papers of scientific and technological research in the areas of Civil, Mechanical, Metallurgical, Naval, Nuclear and Chemical Engineering as well as in the areas of Physics and Applied Mathematics. Short communications presenting interesting results obtained from well-known theories and techniques will be published under the Head of Technical Notes.

Manuscripts for submission must contain unpublished materials, i. e., materials that have not yet been published in any national or international journal. Exception can be made in some cases for publication of annals or proceedings. The decision on submitted papers will take into consideration its originality, contribution to science and/or technology, writing clearness, propriety of the subject and presentation. The final approval is a responsibility of the Editors and the Editorial Committee.

The papers must be written in Portuguese, Spanish or English. Instructions for typing and pasting of papers as well as models can be obtained from the Executive Editor at the following address:

*Prof. Rubens Sampaio*

PUC-Pontifícia Universidade Católica do RJ  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea  
22453 - Rio de Janeiro - RJ - Brasil

The presentation standards must be followed strictly. Papers not exceeding ten pages will be published without any charges for the author. Any exceeding page will be charged at a rate of US\$ 30.00. The equivalent amount must be remitted to the name of EDITORA CAMPUS Ltda, with the manuscripts.

When the manuscript is ready, the author should send to the Executive Editor two reduced copies - approx. 210 X 280 mm - with a letter containing title of the papers, name(s) of the institution(s) and author(s)' address(es).

Together with the letter, the author(s) must send also the title of paper and the summary in Spanish and in English. The texts in Spanish must be typed in a separate sheet.

*Do not send manuscripts before receiving confirmation of approval for publication.*

The submission of a paper implies the transfer of its copyright from author(s) to publisher.

The concepts of signed papers are the total and exclusive responsibility of the authors.

© Copyright, 1983 Editora Campus Ltda.

All rights reserved. No reproduction or transmission of any part of this journal by any means - electronic, mechanical, photographic, recording or any else - is allowed without written permission.

#### **Subscriptions**

Editora Campus Ltda.  
Rua Japeri, nº 35 Rio Comprido  
20261 Rio de Janeiro RJ Brasil  
End. Telegráfico: CAMPUSRIO

