

# PGMEC

PROGRAMA FRANCISCO EDUARDO MOURÃO SABOYA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Dissertação de Mestrado

O QUE SE DESEJA DE UMA  
DEFINIÇÃO DE VÓRTICES?

RAPHAEL DAVID AQUILINO BACCHI

NOVEMBRO DE 2009

RAPHAEL DAVID AQUILINO BACCHI

O QUE SE DESEJA DE UMA DEFINIÇÃO DE  
VÓRTICES?

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-graduação em Engenharia Mecânica  
UFF como parte dos requisitos para a  
obtenção do título de Mestre em Ciências em  
Engenharia Mecânica

Orientador(es): Roney Leon Thompson, Ph.D. (PGMEC/UFF)

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE  
NITERÓI, NOVEMBRO DE 2009

# O QUE SE DESEJA DE UMA DEFINIÇÃO DE VÓRTICES?

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

## **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

na área de concentração de Termociências, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora formada pelos membros abaixo:

---

Roney Leon Thompson (D.Sc.)  
Universidade Federal Fluminense – PGMEC/UFF  
(Orientador)

---

Felipe Bastos de Freitas Rachid (D.Sc.)  
Universidade Federal Fluminense – PGMEC/UFF

---

Aristeu da Silveira Neto (D.Sc.)  
Universidade Federal de Uberlândia – UFU

---

Átila Pantaleão SilvaFreire (D.Sc.)  
Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE/UFRJ

# Dedicatória

À Cristiane, pelo amor, carinho e paciência.

# Agradecimentos

Ao professor Roney Thompson pela orientação conduzida de forma exemplar, por me ensinar que a mecânica dos fluidos pode ser observada sob uma outra ótica e pela paciência quanto às minhas ausências.

Ao Felipe José pela ajuda na etapa inicial deste trabalho.

Ao Ricardo Damian pelo incentivo e pelos ensinamentos na ciência oculta da dinâmica dos fluidos computacional.

Ao Marcos Reis e ao Ricardo Serfaty que permitiram que eu conciliasse o mestrado com as responsabilidades profissionais.

Aos amigos do trabalho, Karolline, João, Maurício, Carlos, Roberto, Daniel Bruno e tantos outros que sempre se mostraram interessados sobre o andamento de minha dissertação e que me ajudaram nas etapas mais difíceis me incentivando a terminar esse trabalho.

Ao amigo Alexandre pelas memoráveis conversas e situações vividas na UFF nos últimos 3 anos.

Aos amigos João Paulo e João Bernardo que, mesmo de longe, sempre me deram forças para continuar.

Aos amigo Hugo Koji pela necessárias interrupções do presente trabalho para divertidas seções de jogos eletrônicos.

Aos meus pais, Cezar e Elisabeth, por me apoiarem nos momentos de dificuldade e por relevar minha ausência durante os momentos críticos.

À minha amada, Cristiane, que conviveu comigo todo esse tempo, sempre do meu lado com uma palavra de apoio e incentivo.

# Resumo

Uma nova classe de critérios de identificação de vórtices é proposta e avaliada no presente trabalho. Os principais critérios existentes na literatura são revisados, suas qualidades e limitações são denotadas e uma base de requisitos para definições de vórtices é proposta. A invariância euclidiana é apontada com uma característica importante para uma definição de vórtices, em contraponto a maioria dos critérios existentes na literatura. Versões objetivas dos critérios descritos na literatura são propostas, além de novos critérios, baseados na persistência de deformação e que contemplam formulações isotrópicas e anisotrópicas, quanto às direções principais de deformação ou outras direções normais a planos característicos no escoamento e que são pertinentes a formação, evolução ou dissipação de estruturas vorticais. Os novos critérios e formulações são avaliados em conjunto com os critérios existentes em escoamentos analíticos bidimensionais, tridimensionais integráveis e caóticos, além de escoamentos modelados por meio da simulação das grandes escalas e simulação numérica direta. Os critérios propostos no presente trabalho, apesar de se basearem em parâmetros cinemáticos, possibilitam a integração com conceitos dinâmicos, avaliados pelos termos do gradiente das equações de momentum.

Palavras-Chave: Identificação de vórtices, estruturas coerentes em turbulência e persistência de deformação.

# Abstract

A new class of vortex identification criteria is proposed and studied in the present work. The main existing criteria are reviewed, their qualities and limitations are pointed and a new basis of requisites for vortex identification is also proposed. The euclidian invariance is pointed as an important requisite for a vortex definition, in contrast with most existing criterion requisites in literature. Objectives versions of existing criteria are proposed and a new set of criteria, based on persistence of straining with isotropic and anisotropic formulations, considering the straining main directions and specific characteristic directions to the formation, evolution and dissipation of coherent structures. Both the new and existing criteria are evaluated in two-dimensional analytical, integrable and chaotic three-dimensional flows, as soon as on some modeled cases using large-eddy simulation approach and direct numerical simulation. The proposed criteria is related with dynamical aspects, as a function of the momentum gradient equations.

Keywords: Vortex identification, coherent structures in turbulence and persisting of straining.

# Sumário

<b>Dedicatória</b> . . . . .	iv
<b>Agradecimentos</b> . . . . .	v
<b>Resumo</b> . . . . .	vi
<b>Abstract</b> . . . . .	vii
<b>1. Introdução</b> . . . . .	1
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 Estado da Arte . . . . .	4
1.3 Metodologia . . . . .	11
<b>2. Critérios Existentes</b> . . . . .	12
2.1 Quanto à Descrição do Critério . . . . .	13
2.2 Quanto à Invariância na Transformação do Observador . . . . .	15
2.2.1 Invariância galileana . . . . .	15
2.2.2 Invariância euclidiana ou Objetividade . . . . .	19
2.3 Quanto à Relação com a Cinemática do Escoamento . . . . .	23
2.4 Avaliação dos Critérios Existentes . . . . .	24
2.4.1 Linhas de Corrente e de Trajetória . . . . .	24
2.4.2 Vorticidade . . . . .	25
2.4.3 Pressão Local Mínima . . . . .	26
2.4.4 Critério Proposto por Chong et al. [1] . . . . .	28
2.4.5 Critério Proposto por Hunt et al. [2] . . . . .	32
2.4.6 Critério Proposto por Jeong e Hussain [3] . . . . .	37
2.4.7 Equivalência Entre os Critérios $Q$ , $\Delta$ e $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ para Escoamentos Bidimensionais . . . . .	40
2.4.8 Critério Proposto por Tabor e Klapper [4] . . . . .	42

2.4.9	CrITÉrios Propostos por Zhou et al. [5], Chakraborty et al. [6] e Wu et al. [7] . . . . .	49
2.4.9.1	Escoamentos com $\zeta = 1$ . . . . .	57
2.4.9.2	Escoamentos com $\zeta = 0.5$ . . . . .	59
2.4.9.3	Escoamentos com $\zeta = 0$ . . . . .	60
2.4.9.4	Escoamentos com autodireções ortonomais do gradiente de velocidades . . . . .	60
2.4.10	CrITÉrio Proposto por Kida e Miura [8] . . . . .	62
2.4.11	CrITÉrio Proposto por Cucitore et al. [9] . . . . .	64
2.4.12	CrITÉrio Proposto por Horiuti [10] . . . . .	66
2.4.13	CrITÉrio Proposto por Levy et al. [11] e Zhang e Choudhury [12] . . . . .	75
2.4.14	CrITÉrio Proposto por Kolář [13] . . . . .	76
2.4.15	CrITÉrio Proposto por Haller [14] . . . . .	80
2.5	O que se esperar de uma definição de vórtices? . . . . .	89
<b>3.</b>	<b>Identificação de Vórtices: Novas Perspectivas</b> . . . . .	<b>92</b>
3.1	Classificação de Escoamentos . . . . .	93
3.1.1	CrITÉrio de Classificação Proposto por Tanner e Huilgol [15] . . . . .	95
3.1.2	Bases Para Classificação de Escoamentos Proposta por Astarita [16] . . . . .	97
3.1.3	Persistência de Deformação e Classificação de Escoamentos . . . . .	98
3.1.3.1	O CrITÉrio de Classificação de Escoamento de Astarita [16] . . . . .	99
3.1.3.2	CrITÉrio Proposto por Thompson e de Souza Mendes [17] . . . . .	102
3.1.3.3	CrITÉrio Proposto por Thompson [18] . . . . .	106
3.2	Cinemática da Vorticidade . . . . .	110
3.2.1	Vetor de Lamb e Helicidade . . . . .	115
3.2.2	Escoamentos Beltramianos Generalizados . . . . .	116

3.3	Identificação de vórtices: Critérios Implementados . . . . .	119
3.4	Interpretação do tensor $\mathbf{A}_2$ . . . . .	120
3.4.1	Critérios Existentes Estudados . . . . .	121
3.4.1.1	Critério $Q$ . . . . .	121
3.4.1.2	Critério $\Delta$ . . . . .	122
3.4.1.3	Critério $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ . . . . .	122
3.4.1.4	Operadores $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ e $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ . . . . .	123
3.4.1.5	Critério $G$ . . . . .	124
3.4.1.6	Critérios $H$ e $H_e$ . . . . .	125
3.4.2	Formulações Objetivas dos Critérios Existentes . . . . .	126
3.4.2.1	Critério $Q_s$ . . . . .	128
3.4.2.2	Critério $\Delta_s$ . . . . .	128
3.4.2.3	Critérios $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\overline{\mathbf{W}}^2}$ e $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2+\mathbf{D}\Omega^{\mathbf{D}}-\Omega^{\mathbf{D}}\mathbf{D}}$ . . . . .	129
3.4.2.4	Operadores $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$ e $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$ . . . . .	130
3.4.2.5	Critério $G_s$ . . . . .	131
3.4.2.6	Critério $H_{es}$ . . . . .	131
3.4.3	Novos Critérios . . . . .	132
3.4.3.1	Critério Isotrópico . . . . .	132
3.4.3.2	Critérios Anisotrópicos . . . . .	133
3.4.4	Identificação de Vórtices e as Equações de Euler . . . . .	138
<b>4.</b>	<b>Resultados Analíticos</b> . . . . .	<b>141</b>
4.1	Soluções Analíticas de Vórtices . . . . .	141
4.1.1	Vórtices axissimétricos colunares . . . . .	145
4.1.1.1	Vórtices colunares livres de estiramento axial . . . . .	145
4.1.1.2	Vórtices Colunares Viscosos com Estiramento Axial	180
4.2	Escoamentos com Linhas de Corrente Caóticas . . . . .	190
4.2.1	Escoamento de uma Gota Imersa em Fluido de Stokes . . . . .	191
4.2.2	Escoamento ABC . . . . .	220

<b>5. Turbulência e Estruturas Coerentes</b> . . . . .	235
5.1 Estruturas Coerentes e Vórtices . . . . .	236
5.1.1 Estruturas Coerentes e Ondas . . . . .	241
5.1.2 Dois Processos Fundamentais em Turbulência . . . . .	243
5.1.2.1 Produção Coerente . . . . .	244
5.1.2.2 Cascata Turbulenta . . . . .	246
5.2 Modelagem da Turbulência . . . . .	248
5.2.1 Simulação das Grandes Escalas . . . . .	251
5.2.2 Simulação Numérica . . . . .	259
5.3 Exemplos de escoamentos turbulentos . . . . .	261
5.3.1 escoamentos em Cavidades . . . . .	261
5.3.2 Turbulência Isotrópica Forçada . . . . .	262
<b>6. Resultados Numéricos</b> . . . . .	265
6.1 escoamentos em Cavidades . . . . .	265
6.1.1 Avaliação dos Critérios de Identificação de Vórtices - Caso 0 Graus . . . . .	267
6.1.2 Avaliação dos Critérios de Identificação de Vórtices - Caso 45 Graus . . . . .	284
6.2 Turbulência Isotrópica Forçados . . . . .	302
<b>7. Conclusões</b> . . . . .	312
7.1 Temas Para Trabalhos Futuros . . . . .	315
<b>BIBLIOGRAFIA</b> . . . . .	316
<b>8. Bibliografia</b> . . . . .	316

# Lista de Figuras

2.1	Representação da descrição atual e da descrição de referência de um corpo . . . . .	14
2.2	Representação de um referencial inercial e um segundo com velocidade constante . . . . .	18
2.3	(a) Representação esquemática do escoamento em um tornado. (b) Influência da variação do movimento do observador na descrição das linhas de corrente . . . . .	30
2.4	(a) Resultado da análise com o critério $\Delta$ no escoamento representativo de um tornado. (b) Resultado da análise com o critério $\Lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ no escoamento representativo de um tornado. Ambos reproduzidos de [3] . . . . .	31
2.5	(a) Resultado da análise com o critério $Q$ no escoamento representativo de um tornado. (b) Resultado da análise com o critério $\Lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ no escoamento representativo de um tornado. Ambos reproduzidos de [3] . . . . .	34
2.6	Representação de um vórtice axissimétrico que alocado ao longo eixo de um anel vortical . . . . .	35
2.7	Comparação dos critério $Q$ ((a)) e $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ((b)) na identificação de um vórtice axissimétrico. Ambos reproduzidos de [3] . . . . .	36
2.8	Representação do escoamento de Bödewadt . . . . .	37
2.9	Comparação entre os critérios $Q$ (a) e $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ (b) na identificação de vórtices no escoamento de Bödewadt. Ambos reproduzidos de [3] . . . . .	38
2.10	Representação de um filamento $\mathbf{l}$ descrito na base dos autovetores do tensor taxa de deformação $\mathbf{D}$ . . . . .	44
2.11	Linhas de corrente locais em relação aos autovetores do gradiente de velocidades $\nabla\mathbf{v}$ . . . . .	51

2.12 Orientação do vetor vorticidade  $\boldsymbol{\omega}$  com relação ao sistema de coordenadas da base canônica de  $\mathbf{D}$  . . . . . 56

2.13 Região vortical no espaço  $(\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|}, \psi)$  para valores constantes de  $\zeta = 1$  (a),  $\zeta = 0.5$  (b),  $\zeta = 0$  (c). Os contornos representam:  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} = 0$  (linha traço-ponto),  $\lambda_2^{\nabla \mathbf{D} + \nabla \mathbf{W}} = 0$  (linha contínua),  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$  (linha tracejada). . . . . 57

2.14 Distribuições radiais dos autovalores do tensor taxa de deformação  $\lambda^{\mathbf{D}}$ , do tensor  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$ , avaliado na base dos autovetores de  $\mathbf{D}$ ,  $\lambda^{\mathbf{J}}$  e das funções  $\frac{\omega_k \omega_k}{4}$  e  $\frac{D_{ik} D_{ki}}{2}$ , obtidas para o modelo de vórtice de Burgers. Reproduzido de [10] . . . . . 68

2.15 Geometria do modelo de camada vortical de Burgers. As setas mais espessas representam a direção da vorticidade enquanto que as setas mais finas representam a distribuição da velocidade na camada cisalhante. . . . . 71

2.16 Distribuições radiais dos autovalores do tensor taxa de deformação  $\lambda^{\mathbf{D}}$ , do tensor  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$ , avaliado na base dos autovetores de  $\mathbf{D}$ ,  $\lambda^{\mathbf{J}}$  e das funções  $\frac{\omega_k \omega_k}{4}$  e  $\frac{D_{ik} D_{ki}}{2}$ , obtidas para o modelo de camada vortical de Burgers. Reproduzido de [10] . . . . . 73

2.17 Direções das trajetórias materiais na fronteira do cone  $Z$  (em  $\boldsymbol{\alpha} = 0$ ) quando o tensor  $\mathbf{A}_2$  é positivo definido nesse cone. Reproduzido de Haller [14] . . . . . 84

2.18 Direções das trajetórias materiais na fronteira do cone  $Z$  (em  $\boldsymbol{\alpha} = 0$ ) quando o tensor  $\mathbf{A}_2$  é positivo semi-definido nesse cone. Reproduzido de Haller [14] . . . . . 85

2.19 Direções das trajetórias materiais na fronteira do cone  $Z$  (em  $\boldsymbol{\alpha} = 0$ ) quando o tensor  $\mathbf{A}_2$  é indefinido nesse cone. Reproduzido de Haller [14] . . . . . 86

3.1 Eixos de coordenadas intrínseco a uma linha de corrente  $C$  . . . . . 112

4.1	Função de determinação da complexidade dos autovalores do gra- diente de velocidades no modelo analítico do vórtice de Batchelor	147
4.2	Critérios $Q$ , $\Delta$ , $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ , $H$ , $He$ e $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ ao longo da direção radial, avaliados contra o módulo da vorticidade no modelo de vórtice de Batchelor . . . . .	148
4.3	Critérios $Q$ , $Q_s$ , além dos operadores $AR_{1,2,3}^A$ , $IR$ e $AR^{\omega-\Omega}$ avalia- dos ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Batchelor .	149
4.4	Critérios $Q$ , $Q_s$ , além dos operadores $AR_{1,2,3}^B$ , $IR$ e $AR^{\omega-\Omega}$ avalia- dos ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Batchelor .	150
4.5	Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Batchelor . . . . .	151
4.6	Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Batchelor . . . . .	151
4.7	Critério $M_z$ avaliado ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Batchelor . . . . .	152
4.8	Função de determinação da complexidade dos autovalores do gra- diente de velocidades no modelo analítico do vórtice de Oseen-Lamb	155
4.9	Critérios $Q$ , $\Delta$ , $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ , $H_e$ , além do operador $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ avaliados con- tra a vorticidade no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para $t=0,01$ e $Re_{\Gamma_0} = 1$ . . . . .	156
4.10	Critérios $Q$ , $\Delta$ , $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ , $H_e$ , além do operador $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ avaliados con- tra a vorticidade no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para $t=10$ e $Re_{\Gamma_0} = 1$ . . . . .	156
4.11	Critérios $Q$ , $\Delta$ , $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ , $H_e$ , além do operador $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ avaliados con- tra a vorticidade no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para $t=100$ e $Re_{\Gamma_0} = 1$ . . . . .	157
4.12	Critérios $Q$ , $Q_s$ , além dos operadores $AR_{1,2}^A$ , $IR$ , $AR^{\omega-\Omega}$ e $AR^{nswirls}$ avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para $t=0,01$ e $Re_{\Gamma_0} = 1$ . . . . .	158

4.13 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1159$

4.14 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1 \dots \dots \dots 159$

4.15 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1 \dots \dots \dots 160$

4.16 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1160$

4.17 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1 \dots \dots \dots 161$

4.18 Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1 \dots \dots \dots 162$

4.19 Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1 \dots \dots \dots 163$

4.20 Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1 \dots \dots \dots 163$

4.21 Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10 \dots \dots \dots 164$

4.22 Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10 \dots \dots \dots 165$

4.23 Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$  . . . . . 165

4.24 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$  . . . . . 166

4.25 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$  167

4.26 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$  . . . . . 167

4.27 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$  . . . . . 168

4.28 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$  168

4.29 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$  . . . . . 169

4.30 Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$  . . . . . 170

4.31 Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$  . . . . . 170

4.32 Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$  . . . . . 171

4.33 Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Taylor para  $t=0,01$  . . . 173

4.34 Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Taylor para  $t=10$  . . . . 173

4.35 Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Taylor para  $t=100$  . . . 174

4.36 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Taylor para  $t=0,01$  . . . . . 175

4.37 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Taylor para  $t=10$  . . . . . 175

4.38 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Taylor para  $t=100$  . . . . . 176

4.39 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Taylor para  $t=0,01$  . . . . . 176

4.40 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Taylor para  $t=10$  . . . . . 177

4.41 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Taylor para  $t=100$  . . . . . 177

4.42 Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  . 179

4.43 Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  . . 179

4.44 Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  . 180

4.45 Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 1$  . . . . . 183

4.46 Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 10$  . . . . . 184

4.47 Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 100$  . . . . . 184

4.48 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 1$  . . . . . 185

4.49 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 10$  . . . . . 186

4.50 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 100$  . . . . . 186

4.51 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 1$  . . . . . 187

4.52 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 10$  . . . . . 187

4.53 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 100$  . . . . . 188

4.54 Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 1$  . . . . . 189

4.55 Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 10$  . . . . . 189

4.56 Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 100$  . . . . . 190

4.57 Geometria das linhas de corrente do escoamento de Stokes ao redor de uma gota esférica para  $\omega = 0$ . Os pontos pretos representam pontos de sela ou pontos fixos. . . . . 195

4.58 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0.199$

4.59 Critérios  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\overline{\mathbf{W}}^2}$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2+\mathbf{D}\Omega-\Omega\mathbf{D}}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^{\mathbf{P}}$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0$ . . . . . 200

4.60 Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0$ . . . . . 201

4.61 Critérios  $H$ ,  $H_e$  e  $H_{es}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa e do operador  $AR^{\mathbf{n}swirlS}$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0$ . . . . . 202

4.62 Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0.203$

4.63 Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0.204$

4.64 Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{\mathbf{n}swirlS}$  e  $AR^{\mathbf{P}}$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0$ . . . . . 205

4.65 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ . . . . . 206

4.66 Critérios  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\overline{\mathbf{W}}^2}$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2+\mathbf{D}\Omega-\Omega\mathbf{D}}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^{\mathbf{P}}$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_z = 5$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ . . . . . 207

4.67 Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_z = 5$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ . . . 208

4.68 Critérios  $H$ ,  $H_e$  e  $H_{es}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa e do operador  $AR^{n_{swirls}}$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_z = 5$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ . . . . . 209

4.69 Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_z = 5$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ . . . . . 210

4.70 Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_z = 5$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ . . . . . 211

4.71 Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{n_{swirls}}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_z = 5$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ . . . . . 212

4.72 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ . . . . . 214

4.73 Critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\overline{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ . . . . . 215

4.74 Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla v}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ . . . . . 216

4.75 Critérios  $H$ ,  $H_e$  e  $H_{es}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa e do operador  $AR^{n_{swirls}}$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ . . . . . 217

4.76 Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ . . . . . 218

4.77 Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ . . . . . 219

4.78 Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{nswirls}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ . . . . . 220

4.79 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento ABC. . . . . 226

4.80 Critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\overline{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  para o escoamento ABC. . . . . 227

4.81 Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla v}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento ABC. . . . . 228

4.82 Critérios  $H$ ,  $H_e$  e  $H_{es}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa e do operador  $AR^{nswirls}$  para o escoamento ABC. . . . . 229

4.83 Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento ABC. . . . . 230

4.84 Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento ABC. . . . . 231

4.85 Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{nswirls}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento ABC. . . . . 232

4.86 Operadores  $IR_{(D-W)(D+W)}$ ,  $IR_P$ ,  $IR_{(D-W)(D+W)}^{A2}$ ,  $IR_P^{A2}$ ,  $IR_{(D-W)(D+W)}^{A2'}$  e  $IR_P^{A2'}$  para o escoamento ABC. . . . . 234

5.1 Diagrama esquemático do processo de cascata turbulenta. Baseado em [19] . . . . . 247

6.1 Planos de avaliação dos critérios propostos no caso 0 graus (a) e no caso 45 graus (b). . . . . 266

6.2 Coeficiente do modelo LES dinâmico. . . . . 267

6.3 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 1. . . . . 268

6.4 Critérios  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\overline{\mathbf{W}}^2}$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2+\mathbf{D}\Omega-\Omega\mathbf{D}}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^{\mathbf{P}}$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 1. . . . . 269

6.5 Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 1. . . . . 270

6.6 Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 1. . . . . 271

6.7 Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 1. . . . . 272

6.8 Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{\mathbf{n}_{swirlS}}$  e  $AR^{\mathbf{P}}$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 1. 273

6.9 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 2. . . . . 274

6.10 Critérios  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\overline{\mathbf{W}}^2}$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2+\mathbf{D}\Omega-\Omega\mathbf{D}}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^{\mathbf{P}}$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 2. . . . . 275

6.11 Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 2. . . . . 276

6.12 Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 2. . . . . 277

6.13 Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 2. . . . . 278

6.14 Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{n_{swirls}}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 2. 279

6.15 Isosuperfícies dos critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus. 280

6.16 Isosuperfícies dos critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\overline{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus. . . . . 281

6.17 Isosuperfícies dos operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus. 282

6.18 Isosuperfícies dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus. 283

6.19 Isosuperfícies dos operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{n_{swirls}}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus. . . . . 284

6.20 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 1. . . . . 286

6.21 Critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\overline{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 1. . . . . 287

6.22 Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla v}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 1. . . . . 288

6.23 Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 1. . . . . 289

6.24 Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 1. . . . . 290

6.25 Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{n_{swirls}}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 1.291

6.26 Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 2. . . . . 292

6.27 Critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\overline{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 2. . . . . 293

6.28 Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla v}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 2. . . . . 294

6.29 Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 2. . . . . 295

6.30 Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 2. . . . . 296

6.31 Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{n_{swirls}}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 2.297

6.32 Isosuperfícies dos critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus. . . . . 298

6.33 Isosuperfícies dos critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\overline{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus. . . . . 299

6.34 Isosuperfícies dos operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus.300

6.35 Isosuperfícies dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus.301

6.36	Isosuperfícies dos operadores $AR^{\omega-\Omega}$ , $AR^{n_{swirls}}$ e $AR^P$ e $IR$ avaliados com os critérios $Q$ e $Q_s$ para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus. . . . .	302
6.37	Espectro de energia médio temporal avaliado na simulação de turbulência isotrópica da base de dados em turbulência da Universidade John Hopkins. Retirado de [20] . . . . .	304
6.38	Energia cinética instantânea e número de Reynolds $Re_\lambda$ . Retirado de [20] . . . . .	304
6.39	Critérios $Q$ , $Q_s$ , $\Delta$ e $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento de turbulência isotrópica forçada. . . . .	306
6.40	Critérios $\lambda_2^{D^2+W^2}$ , $\lambda_2^{D^2+\overline{W}^2}$ , $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ , $G$ e $G_s$ , além do operador $AR^P$ para o escoamento de turbulência isotrópica forçada. . . . .	307
6.41	Operadores $\lambda_{ci}^{\nabla v}$ e $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ , $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$ e $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla v}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento de turbulência isotrópica forçada. . . . .	308
6.42	Operadores $AR_{1,2,3}^A$ e $IR$ avaliados com os critérios $Q$ e $Q_s$ para o escoamento de turbulência isotrópica forçada. . . . .	309
6.43	Operadores $AR_{1,2,3}^B$ e $IR$ avaliados com os critérios $Q$ e $Q_s$ para o escoamento de turbulência isotrópica forçada. . . . .	310
6.44	Operadores $AR^{\omega-\Omega}$ , $AR^{n_{swirls}}$ e $AR^P$ e $IR$ avaliados com os critérios $Q$ e $Q_s$ para o escoamento de turbulência isotrópica forçada. . . . .	311

# Lista de Tabelas

2.1	Comparação entre os critérios $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ e $Q$ com relação aos autovalores do tensor $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$ . Reproduzido de [3] . . . . .	40
-----	--	----

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

O conceito de vórtice, apesar de exaustivamente estudado desde os primórdios do estudo da hidrodinâmica e bastante utilizado para descrever e explicar padrões em problemas fluidodinâmicos, ainda não encontra uma definição aceita por toda comunidade científica. O correto entendimento da dinâmica dos vórtices em um dado escoamento permite não só o entendimento de fenômenos relacionados que sofrem influência direta e indireta dessa entidade como mistura, transferência de calor e massa, combustão, predição de arrasto hidrodinâmico, geração de ruídos, vibração induzida por vórtices, mas também pode ser uma via de modelagem da turbulência.

Escoamentos turbulentos são dominados por regiões compactas, coerentes temporalmente, conhecidas como estruturas coerentes. As equações da dinâmica da vorticidade governam a evolução e a interação entre estruturas coerentes e o seu acoplamento com a turbulência. Uma definição de vórtice deve identificar esse tipo de estrutura, explicar sua formação e evolução e classificá-la quanto a sua morfologia. Apesar do avanço no entendimento e na modelagem dos fenômenos relacionados a escoamentos turbulentos nas últimas décadas, algumas lacunas encontram-se ainda sem uma definição plena. Devido ao forte caráter rotacional

da turbulência em fluidos, a correta descrição das zonas coerentes assume grande importância na classificação e na captura da evolução do escoamento.

O conceito de vórtices geralmente é confundido com o conceito de vorticidade. Esse último, matematicamente definido e associado a taxa de rotação relativa de filamentos de materiais, apresenta valores elevados nas regiões vorticais. Entretanto, a característica apresentada pela sentença anterior é subjetiva e não encontra plenitude na sua descrição, visto que seu inverso não é verdade. Diversos critérios de identificação e classificação ou mesmo conceitos de definição de vórtices foram propostos ao longo dos anos. Baseados, em quase sua maioria, no tensor gradiente de velocidade e no seu antagonismo entre taxas de rotação e deformação, esses critérios possuem limitações ao se definir premissas básicas para uma definição ideal e, em alguns casos, apresentam limitações em sua formulação em determinados tipos de escoamentos, como os compressíveis ou mesmo com densidade variável. Um dos motivos para a inexistência de um critério com aceitação comum, entre outros, encontra-se na falta de consenso acerca dos requisitos principais, o que, de certa forma, promove uma reflexão mais profunda sobre o assunto e a evolução dos critérios existentes.

Alguns critérios procuram descrever a evolução das estruturas vorticais a partir de conceitos dinâmicos e às forças resultantes dessas interações, ou seja, relacionadas a causas na alteração do campo cinemático. Por outro lado, um conjunto de critérios fundamentam-se na descrição das manifestações diretas no campo de velocidade, analisando somente as características cinemáticas do escoamento. Cabe lembrar que mesmo critérios relacionados a causa na alteração do campo cinemático apresentam formulações matemáticas baseadas nesses mesmos campos.

Outro ponto de bastante discussão e pouco consenso na identificação de vórtices é a base na qual se fundamenta essa descrição. Alguns autores defendem que a análise da trajetória de partículas e a captura dos efeitos que evidenciam a presença dessa partícula em um vórtice é a melhor abordagem para sua identi-

ficação, característica da mecânica lagrangiana. Outros autores acreditam que o acompanhamento da formação e evolução de estruturas vorticais deve ser avaliado em campos materiais de determinadas entidades, fundamentando a análise à mecânica euleriana.

Alguns autores consideram que um critério de identificação de vórtices deve ser invariante a uma transformação linear nos eixos de coordenadas tanto no tempo quanto ao longo do espaço, ou seja, que o critério deve ser invariante galileanamente. Trabalhos recentes vêm adotando uma posição mais restritiva e apontando a necessidade de critérios que sejam invariantes a qualquer tipo de transformação rígida no sistema de coordenadas adotado, acompanhando a definição de objetividade apontada pela mecânica do contínuo.

Muitos critérios existentes na literatura atribuem a identificação de estruturas vorticais ao fato de uma entidade atingir valor menor ou maior que um determinado patamar. Esse patamar geralmente depende das características do escoamento e não pode ser generalizado. Um critério de definição de vórtices deve ser pleno e seus patamares invariantes quanto ao escoamento analisado. Critérios que buscam valores característicos no escoamento para a escolha desses patamares podem perder a captura de estruturas que se comportem de maneira distinta do resto do escoamento, como, por exemplo, no caso de recirculações ou de vórtices secundários dispostos nas esteiras de escoamentos externos.

O presente trabalho têm por objetivos, propor novas bases para uma definição geral de estruturas vorticais e apresentar novos critério respaldados nessas bases. A essência dos critérios propostos nesse trabalho se difere da maioria dos critérios existentes na literatura, pois avaliam o tensor gradiente de velocidade e a variância material da parte simétrica do tensor. Os critérios propostos permitem não somente a identificação, mas certamente a classificação dessas estruturas vorticais, nos sentidos principais de deformação. Serão discutidos também os critérios existentes na literatura, suas limitações e propostas de modificações para adequação às premissas estabelecidas.

## 1.2 Estado da Arte

As primeiras tentativas de identificação de estruturas vorticais propostas procuravam associar conceitos intuitivos, como linhas de corrente que representassem curvas fechadas. Lugt [21] demonstrou que esse tipo de identificação de vórtices encontra falhas, principalmente se o objetivo for analisar a evolução no tempo desse tipo de estruturas. O autor propôs a mesma análise baseada em linhas de trajetória, na qual um vórtice seria "uma região cujas partículas materiais giram ao redor de um centro comum". Essa proposta de identificação foi uma das primeiras a associar estruturas vorticais à conceitos da mecânica lagrangiana.

Hussain [22] apresenta um vasto estudo sobre estruturas coerentes, discutindo desde sua formação até o seu desenvolvimento em escoamentos turbulentos, dando ênfase a necessidade de identificação desse tipo de estruturas. O autor define estas como regiões materiais compactas e que apresentam valores relativamente altos em módulo de vorticidade concentrados ao longo de sua extensão. Discute-se e apresenta-se também um critério de formação de estruturas coerentes baseada na evolução temporal da vorticidade em escoamentos turbulentos. Ressalta-se ainda a necessidade de se avaliar características do escoamento com o tensor de Reynolds no seio das regiões coerentes com o intuito de avaliar sua evolução e as interações com a regiões incoerentes que as circundam.

Hunt et al. [2] apresentam critérios para identificação de regiões relevantes em escoamentos fluidodinâmicos. São propostas definições de zonas de estagnação e extensionais, como função do segundo invariante do gradiente de velocidade e dos valores de velocidade e pressão relativas, sendo dada atenção especial para a definição de zonas vorticais, ampliando a definição proposta por alguns autores da presença de autovalores complexos do tensor gradiente de velocidade em regiões vorticais e que resulta na relação, para escoamentos incompressíveis

$$Q = \frac{1}{2} [\|\mathbf{W}\|^2 - \|\mathbf{D}\|^2] > 0 \quad (1.1)$$

onde

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (1.2)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (1.3)$$

e

$$[\nabla \mathbf{v}]_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (1.4)$$

representa o tensor gradiente do campo vetorial velocidade  $\mathbf{v}(x, t)$  e o operador  $\| \|$  representa a norma euclidiana. Hunt et al. propõem a complementação do critério definido acima com um critério de pressão relativa mínima local. Essa complementação é importante para excluir alguns casos particulares de escoamento onde a taxa de rotação assume um papel secundário em relação a taxa de deformação, como no caso de escoamento laminar sob uma placa plana, onde o primeiro critério é atendido, mesmo não se evidenciando a formação dessas estruturas. Todas essas zonas listadas são identificadas em resultados numéricos de decaimento isotrópico de turbulência bidimensional e a validade dos resultados apresentados em contraponto a simulações tridimensionais é discutida.

Tabor e Klapper [4] examinam e caracterizam conceitos cinemáticos e dinâmicos de alinhamento e alongamentos de quantidades escalares e vetoriais. Durante a avaliação em escoamentos bidimensionais do que denotam por "persistência de rotação e deformação" (cujos conceitos serão apresentados no decorrer do presente trabalho) os autores obtêm um critério de avaliação de regiões dominadas por rotação ou deformação de filamentos, definido pela relação

$$Q_s = \frac{1}{2} [\|\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}\|^2 - \|\mathbf{D}\|^2] > 0 \quad (1.5)$$

onde  $\mathbf{\Omega}$  representa a taxa de rotação dos autovetores da parte simétrica do gradiente de velocidades. Esse critério é considerado uma versão objetiva do critério proposto por Hunt et al. [2]. Os autores ressaltam que a avaliação desse tipo de critério para escoamentos tridimensionais pode levar a problemas

de identificação de zonas dominantes em rotação, pois, em escoamentos desse tipo pelo menos um autovetor do gradiente de velocidades possui um valor positivo na sua parte real, o que caracteriza estiramento local nessa direção. Discute-se também nesse trabalho questões relacionadas ao estiramento e alinhamento de passivos vetoriais, dando ênfase a gradientes de variáveis escalares e em quantidades vetoriais não-passivas, com ênfase a campos magnéticos em problemas magneto-hidrodinâmicos.

Chong et al. [1] discute a topologia das trajetórias de soluções de sistemas de equações tridimensionais de primeira ordem acopladas como função dos invariantes da matriz de coeficientes desse sistema, dando ênfase ao campo de velocidade e ao tensor gradiente de velocidade associado. Essas trajetórias são analisadas em planos provenientes do espaço formado por esses invariantes e um dos objetivos desse estudo é a identificação de pontos críticos em condições de contorno de não-deslizamento e de deslizamento livre. Os autores definem pontos críticos como posições no espaço onde a velocidade nas três direções é nula a curvatura das linhas de correntes é indeterminada. A identificação de vórtices também é abordada no trabalho e, segundo os autores, vórtices são regiões do espaço onde o módulo da vorticidade é suficientemente grande a permitir que a taxa de rotação dos filamentos materiais domine sobre sua taxa de deformação, ou seja, vórtices são regiões que apresentam autovalores complexos do tensor gradiente de velocidade.

Truesdell [23] introduziu em seu livro o número de vorticidade  $N_k$  com o objetivo de aferir a relação entre vorticidade e taxa de deformação. Ele definiu  $N_k$  a partir da equação

$$N_k = \frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|} \quad (1.6)$$

Assim,  $N_k$  é a medida local da vorticidade, normalizada pela norma da taxa de deformação. Os casos  $N_k > 1$ , em uma primeira análise são idênticos aqueles que atendem o critério proposto por Hunt et al. [2]. Entretanto,  $N_k$  não discrimina

vórtices com valores acentuados e reduzidos de vorticidade e, conseqüentemente, o critério  $Q$  é mais restritivo que o critério  $N_k$ . Casos particulares de  $N_k \rightarrow \infty$  e  $N_k = 0$  correspondem a rotação de corpo rígido e escoamento irrotacional, respectivamente.

Jeong e Hussain [3] definem vórtices como regiões de pressão mínima nos planos ortogonais a vórtices por meio da análise do gradiente da equação de Navier-Stokes e chegando em uma relação para o segundo autovalor do tensor simétrico  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$ , que define o comportamento da Hessiana da pressão. Os autores apontam desvantagens nos critérios clássicos de identificação de vórtices e apresentam exemplos de escoamentos que levam a conclusões incorretas ao se analisar dados com os critérios existentes discutidos no trabalho. O critério é comparado com outros existentes na análise de campos de velocidade obtidos analiticamente e numericamente. Foi dada ênfase a descrição do critério em escoamentos incompressíveis de fluidos Newtonianos e são apresentados resultados baseados nas equações de Euler e Navier Stokes.

Kida e Miura [8] revisam os critérios existentes, denotando suas limitações e desvantagens e propõem um novo critério de identificação de estruturas vorticais baseado na topologia das linhas de corrente presentes avaliadas em um plano normal ao terceiro autovetor da Hessiana da pressão. Assim, o critério proposto busca ter como base a condição de pressão mínima local na identificação de estruturas vorticais. A formulação do critério se baseia no sinal do discriminante do polinômio característico dado pelo tensor formado pela projeção do gradiente de velocidades no plano avaliado. Os resultados são analisados em escoamentos turbulentos e em soluções analíticas de vórtices.

Cucitore et al. [9] apresentam uma das primeiras definições de regiões vorticais a partir de um critério não local, associando um critério a características da mecânica lagrangiana. Os autores partem da premissa que uma região vortical é compacta e deve manter essa característica ao longo de todo o tempo de observação ou, pelo menos, por grande parte dele. Assim, duas partículas (a,b) em

pontos distintos no escoamento cuja trajetória coincida com a direção e módulo da velocidade têm avaliadas suas velocidades locais  $u_a$  e  $u_b$  a partir da relação

$$R(\mathbf{x}, t) = \frac{|\int_0^t u_a(\tau) d\tau - \int_0^t u_b(\tau) d\tau|}{\int_0^t |u_a(\tau) - u_b(\tau)| d\tau}. \quad (1.7)$$

Enquanto o numerador da Eq. (1.7) avalia a evolução da distância relativa entre duas partículas ao longo do tempo, o denominador mede a diferença nas trajetórias das partículas tempo a tempo. Assim, partículas presentes na região de vórtices evidenciam relações com denominadores crescendo rapidamente e numeradores com um crescimento mais lento, convergindo assim para a vinculação do critério descrito acima a valores menores nessas regiões vorticais. Os autores propõe ainda a associação do critério apresentado a regiões que obedecem o critério proposto por Chong et al. [1]. Esse critério é comparado com critérios tradicionais em uma solução analítica de vórtice.

Horiuti [10] propõe a identificação de regiões vorticais a partir de uma análise de similaridade com soluções analíticas de vórtices, baseadas na solução das equações de Navier-Stokes e que são predominadas pela vorticidade (vórtice de Burgers), pela taxa de deformação (estruturas em fita curvas presentes próximas as paredes dos dutos em escoamentos internos) e por ambas, de maneira balanceada (estruturas em fita alongadas encontradas na região da camada de vórtices da solução analítica de Burgers). O método foi desenvolvido baseado no segundo autovalor da Hessiana da pressão definida por Jeong e Hussain [3] na base dos autovetores do tensor das deformações  $\mathbf{D}$  e que sofre reordenação de acordo com o alinhamento com o vetor vorticidade. O critério é comparado com outros clássicos em um escoamento do tipo ABC, solução das equações de Euler e que pode apresentar linhas de corrente caóticas.

Zhou et al. [5] se baseia no critério proposto por Chong et al. [1] e identifica estruturas vorticais como regiões onde a parte imaginária dos autovetores complexos do gradiente de velocidade possui valores acima de um determinado patamar, baseado nos limites máximo e mínimo no domínio. O autovalor real

avalia se a região vortical está submetida a compressão ou estiramento na sua respectiva direção principal. Entre as vantagens apresentadas pelo autores, são ressaltadas a invariância do critério a certas transformações nos sistemas de coordenadas e a eliminação na análise de regiões com grandes concentrações de vorticidade, mas sem movimentação vortical local, como no exemplo do escoamento laminar sob uma placa plana móvel com velocidade constante. Os autores focam o objeto de estudo do trabalho na identificação de vórtices do tipo grampo de cabelo, estrutura comum de ser encontradas no desenvolvimento da turbulência em escoamentos de camada limite.

Chakraborty et al. [6] propõem a complementação do critério apresentado por Zhou et al. [5] com a relação entre as partes real e imaginárias do autovalor complexo do gradiente de velocidades. Esse critério local possibilita, segundo os autores a identificação de zonas compactas não locais. Trata-se de uma das primeiras tentativas de avaliar vortices a partir de noções da mecânica lagrangiana por intermédio de ferramentas da mecânica euleriana. A medida que os valores da relação proposta tendem a grandes valores negativos, as linhas de correntes tendem a seguir rapidamente para o centro de uma zona em movimento vortical. Os critérios  $Q$ ,  $\Delta$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$  são apresentados como funções das partes real e imaginárias dos autovalores complexos e do autovalor real e são comparados ao critério proposto em soluções analíticas e numéricas de formação de vórtices.

Wu et al. [7] propõem um critério semelhante aquele apresentado por Zhou et al. [5], a partir da análise dos critérios propostos por Hunt et al. [2], Chong et al. [1] e Jeong e Hussain [3] como funções das partes real e imaginárias dos autovalores complexos do gradiente de velocidade. Analisando o critério proposto por Chong et al. [1], os autores chegam a conclusão que a relação proposta por Chakraborty et al. [6], como complemento ao critério indicado por Zhou et al. [5] não é necessária, visto que essa relação avalia somente o quão "rápido" as linhas de corrente divergem ou convergem de um ponto situado no eixo de um vórtice, o que em síntese não serviria para destacar uma região vortical no contínuo.

O autores baseiam suas conclusões nas comparações apresentadas por Jeong e Hussain [3] que provam a superioridade de seu critério em relação ao proposto por Hunt et al. [2] e a partir de soluções analíticas de vórtices que comparam as definições mencionadas.

Em reposta as conclusões de Wu et al. [7], Chakraborty et al. [24] reafirmam a necessidade da relação complementar proposta no trabalho anterior desses autores, justificando que o mesmo avalia o quão compactas partículas materiais se mantêm em uma região do escoamento e, para que a evolução dessa região vortical seja observada, é necessário que o nível de compactação seja mantido. Em tréplica a esse artigo, Wu et al. [25] justificam que não pretendiam propor nenhum novo critério e que o objetivo do trabalho foi somente de diferenciar a definição de vórtices de um identificador de estruturas filamentosas e ressaltar a importância da avaliação do estiramento de linhas materiais na direção do eixo vortical.

Zhang e Choudhury [12] condicionam a presença de estruturas vorticais a regiões onde o vetor normal aos vetores formados pela parte real e imaginária do autovetor complexo do gradiente de velocidade se encontram alinhados com o vetor vorticidade. Os autores reforçam a necessidade de normalização dos critérios, com o intuito de criar uma base de comparação entre os critérios, que geralmente apresentam limites distintos. Uma das vantagens indicadas pelos autores é a aplicação desse tipo de identificação em escoamentos compressíveis.

Haller [14] apresenta uma definição de vórtices objetiva avaliando o tensor aceleração da taxa de deformação na base dos autovetores do tensor taxa de deformação. Assim, vórtices são definidos com regiões do espaço onde esses tensores são ortogonais. Segundo o autor, o critério só poderia ser usado na identificação de estruturas vorticais em escoamentos incompressíveis e uma versão simplificada é apresentada para identificação em escoamentos bidimensionais. A base da definição proposta se encontra na mecânica lagrangiana e vórtices são identificados como um conjunto de trajetórias "desafiam" a tendência proposta pelo

gradiente de velocidades. O critério é avaliado por meio de expoentes de Lyapunov e comparado com outros critérios existentes, inclusive o critério proposto por Tabor e Klapper [4], sendo um dos primeiros trabalhos a reconhecer esse com uma versão objetiva do critério proposto por Hunt et al. [2].

Kolář [13] resume os requisitos apresentados pelos principais trabalhos na literatura para a identificação e classificação de vórtices e determina novas bases para uma definição com validade para escoamentos compressíveis e que identificam o eixo de rotação dessa estrutura. O autor também propõe um critério baseado na decomposição do gradiente de velocidade e em especial dos tensores vorticidade e taxa de deformação em três componentes, baseada na extração do que se entende por "movimentação cisalhante pura efetiva" da movimentação vortical real. Essa decomposição resulta no surgimento de dois termos adicionais à vorticidade (e à taxa de deformação consequentemente): a componente cisalhante e uma segunda componente residual. Essa componente residual, segundo o autor representa uma medida direta do movimento real rotativo de um vórtice.

### 1.3 Metodologia

O presente trabalho têm por objetivos analisar os critérios de identificação de estruturas vorticais existentes, propor alterações nesse critério de tal forma a torná-los objetivos e apresentar uma nova proposta de definição que cumpra os requisitos necessários e que serão relatados no capítulo 2, assim como a discussão em torno dos critérios existentes. O capítulo 3 introduzirá a nova definição de vórtices e toda a base de conhecimento necessária para seu entendimento. O capítulo 4 apresentará a aplicação do novo critério, assim como a comparação com os critérios existentes em escoamentos obtidos analiticamente e numericamente, com atenção especial na identificação de estruturas coerentes em escoamentos turbulentos. Serão discutidas as metodologias de solução e o estado da arte dos problemas simulados.

# Capítulo 2

## Critérios Existentes

Na tentativa de identificar a presença de estruturas vorticais em diferentes tipos de escoamento, diversos critérios foram propostos nas últimas três décadas. Essa necessidade de identificação está intimamente ligada a necessidade de “visualização” da evolução da turbulência. A preocupação em observar a heterogeneidade das estruturas coerentes e, conseqüentemente, identificar, por exemplo, questões relacionadas ao alinhamento dessas estruturas com fenômenos correlatos aguçou a busca por critérios mais abrangentes, válidos a diferentes tipos de reologias, e mais precisos. Uma conseqüência dessa busca encontra-se no fato de que com o passar dos anos, as bases ou requisitos ressaltados pelos trabalhos na área para uma correta identificação de estruturas vorticais vêm acumulando um número maior de exigências, eliminando assim a validade de alguns critérios propostos no passado. Entretanto, conforme indicado no primeiro capítulo, existem alguns requisitos que ainda são temas de debate e que divergem os pesquisadores.

Na primeira parte deste capítulo, serão relacionados esses pontos de divergências entre os critérios apontados no capítulo 1, sendo discorridos com mais detalhes. Posteriormente, serão reapresentados os critérios repassados no primeiro capítulo também com maiores detalhes, apontando suas características, os requisitos apontados pelos autores para uma definição e suas deficiências. Por fim, como um resumo do que fora mostrado ao longo do capítulo, será apontado um

novo conjunto de requisitos que o presente trabalho entende como necessários para a identificação e classificação de vórtices.

## 2.1 Quanto à Descrição do Critério

Suponha um corpo que, em qualquer instante de tempo  $t$  possua volume  $V$  e área superficial  $A$ . Para que um ponto material nesse corpo, ou seja, uma partícula, seja localizada no interior desse corpo e seu movimento possa ser descrito, torna-se necessária a introdução de um referencial  $R$ , onde se encontra a origem de um sistema de coordenadas  $O$ . A existência do referencial torna possível a aferição de posições e mudanças nas posições das partículas a partir de um vetor  $\mathbf{r}$  descrito do referencial  $R$  à partícula de acordo com a Fig. 2.1. Visando descrever o movimento do corpo e seu estado de deformações, torna-se necessária a introdução de uma configuração de referência  $C_0$  que representa um estado de referência do corpo analisado.

O vetor  $\mathbf{r}_0$  indica a posição da partícula analisada nessa configuração. O mapeamento  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  dos pontos  $\mathbf{x}$  em  $C$  com os pontos  $\mathbf{X}$  em  $C_0$  resulta na relação entre  $\mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{r}$  e, conseqüentemente, na descrição do movimento do corpo,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \quad (2.1)$$

O vetor de deslocamento da partícula,  $\mathbf{u}$  de  $C_0$  a  $C$  é descrito a partir da relação

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) - \mathbf{r}_0 \quad (2.2)$$

Quantidades físicas intensivas, ou seja, que dependem das partículas do corpo e são independentes do volume ou da massa do mesmo, podem ser escritas por funções de campo das coordenadas  $\mathbf{X}$  (assim como do vetor  $\mathbf{r}_0$ ) e do tempo ou das coordenadas  $\mathbf{x}$  (assim como do vetor  $\mathbf{r}$ ) e também do tempo. Funções de campo

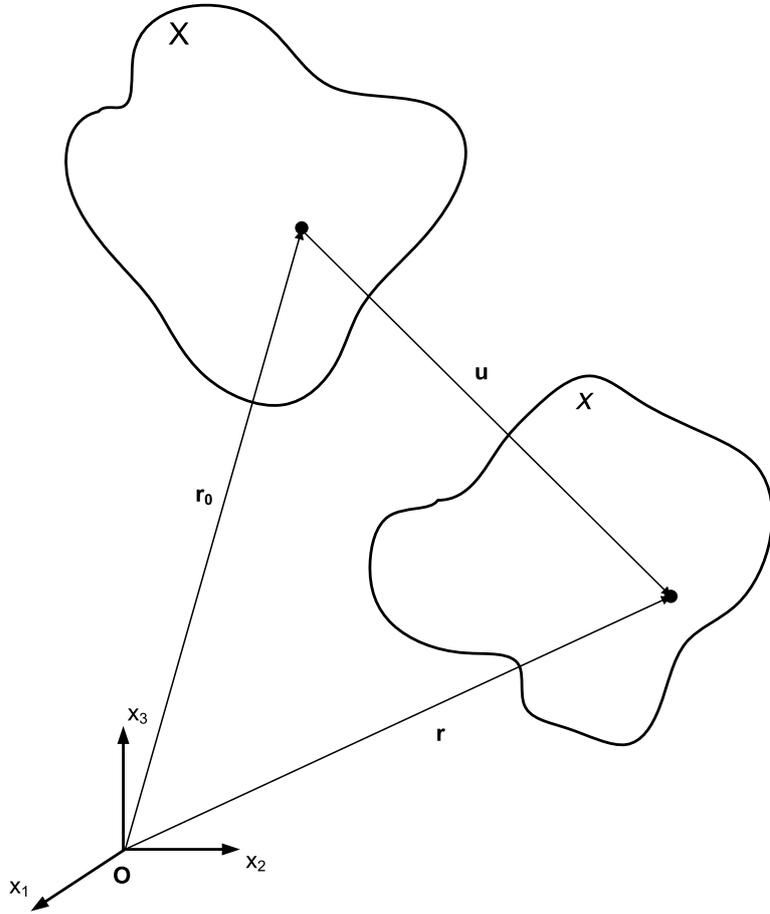


Fig. 2.1: Representação da descrição atual e da descrição de referência de um corpo

do tipo

$$f(\mathbf{r}_0, t) \equiv f(\mathbf{X}, t) \quad (2.3)$$

são conhecidas como funções de partículas e constituem a descrição lagrangiana ou de referência. Por outro lado, funções de campo escritas na forma

$$f(\mathbf{r}, t) \equiv f(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

são conhecidas como funções de posição e constituem a descrição euleriana ou espacial.

Definições de vórtices respaldadas na descrição lagrangiana, que avaliem ao

longo da trajetória das partículas se as características dessa trajetória advêm da presença dessa partícula em uma região vortical, vêm ganhando representatividade, pois obtêm consideráveis detalhes na captura dessas estruturas com relação aos critérios que têm como pano de fundo a descrição euleriana, sem a necessidade de avaliação de valores pré-determinados dentro da margem de variação das variáveis de interesse. Outra vantagem do critério lagrangiano frente ao euleriano é o fato de que o primeiro não necessita da avaliação das derivadas da velocidade, que podem apresentar distúrbios quando avaliados em escoamento turbulentos. Entretanto, o fato do custo computacional ser elevado e a implementação mais complexa, somada a subjetividade na escolha do tempo de integração inerentes na avaliação de estruturas vorticais ou qualquer outra propriedade na descrição lagrangiana, resulta na não aceitação plena desta categoria de critérios.

## 2.2 Quanto à Invariância na Transformação do Observador

### 2.2.1 Invariância galileana

O objetivo dessa seção é apresentar os critérios de invariância quanto a transformações no sistemas de coordenadas que os principais trabalhos na área de identificação de vórtices acreditam que sejam necessárias para uma definição de estruturas vorticais. É prudente lembrar que serão tratadas apenas transformações rígidas, ou seja, que não alterem a condição de ortonormalidade do sistema de coordenadas.

O estudo da mecânica se divide em três áreas do conhecimento distintas *a priori*, mas interdependentes em suas formulações: Cinemática, Estática e Dinâmica. A cinemática se dedica ao estudo do movimento dos corpos e pontos materiais. Em um primeiro momento, parece plausível afirmar que o estudo da mecânica e, em particular, da cinemática se fundamenta nas noções de “trajetória”, “velocidade” e “aceleração”. A primeira é definida como a curva que um ponto material

percorre durante o movimento. Define-se velocidade como a diferença de posição que um ponto material experimenta, dividido pelo intervalo de tempo necessário para que essa diferença ocorra

$$u(t) = \frac{d}{dt}s(t) \quad (2.5)$$

Por último, define-se aceleração como a diferença de velocidades de um ponto material em movimento em dois instantes de tempo, dividido pela magnitude do instante de tempo de observação.

$$a(t) = \frac{d}{dt}u(t) \quad (2.6)$$

Entretanto, trajetória e velocidade são entidades que não tem significado para a mecânica e, portanto, não podem ser objetos de estudo [26]. Essa afirmação se fundamenta em um dos princípios básicos da mecânica, o “princípio de relatividade de Galileu”. Galilei [27], por meio da observação nas mudanças no movimento de objetos e animais ao seu redor e do simples ato de pular na direção longitudinal em uma embarcação, sendo esta em primeiro momento parada e logo em seguida em movimento uniforme sobre um mar calmo, procura ressaltar a importância da diferença do observador na mudança da trajetória e da velocidade de um mesmo experimento. Um corolário desse princípio define uma propriedade passível de estudo pelas leis da mecânica clássica como aquela que pode ser observada sem distinções por dois observadores, sendo um deles em movimento uniforme em relação ao primeiro em qualquer direção, conduzindo o mesmo experimento. Em outras palavras, entidades mecânicas de objetos móveis não devem se alterar sob transformações galileanas.

Considere dois sistemas de coordenadas  $A$  e  $A'$ . Uma manifestação física ocorrida em  $A$ , em um instante de tempo  $t$ , se encontrará na posição  $s(x(t), y(t), z(t))$ . Suponha que o referencial  $A'$  se mova com velocidade uniforme  $U$  em relação ao referencial  $A$ . Assim, um observador em  $A'$  verificará que a posição de um ponto

situado em  $A$  experimenta movimento

$$s'(t) = s(t) - Ut \quad (2.7)$$

A velocidade do ponto material pode ser dada por

$$u'(t) = \frac{d}{dt}s'(t) = \frac{d}{dt}s(t) - U = u(t) - U \quad (2.8)$$

A aceleração do ponto material pode ser obtida finalmente

$$a'(t) = \frac{d}{dt}u'(t) = \frac{d}{dt}u(t) - 0 = a(t) \quad (2.9)$$

Essa simples demonstração carrega consigo a essência do princípio de relatividade de Galileu, pois, se a massa for invariante, a segunda lei de Newton quando observada em um referencial, vale para todos os referenciais inerciais. Suponha que um referencial bidimensional  $(x_1, x_2)$  se encontre no instante  $t = t_0$  distante de  $a$  e  $b$ , respectivamente, em relação às suas coordenadas principais de um referencial  $(x'_1, x'_2)$  que se move com velocidades constantes  $U$  e  $V$ , respectivamente, em relação às coordenadas principais deste segundo referencial. Suponha ainda que no instante inicial o referencial  $(x'_1, x'_2)$  se encontre defasado de um ângulo  $\alpha$  de  $(x, y)$ . A Fig. (2.2) apresenta uma representação gráfica do exemplo explicitado.

Podemos descrever a transformação do sistema de coordenadas  $(x', y')$ , em notação matricial, de acordo com a relação

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Assim, podemos afirmar que o significado matemático do princípio da relatividade de Galileu pode ser descrito a partir do fato de que as equações que descrevem as propriedades mecânicas (no espaço bidimensional) devem ser invariantes na sua formulação a transformações dadas pela equação acima. Gener-

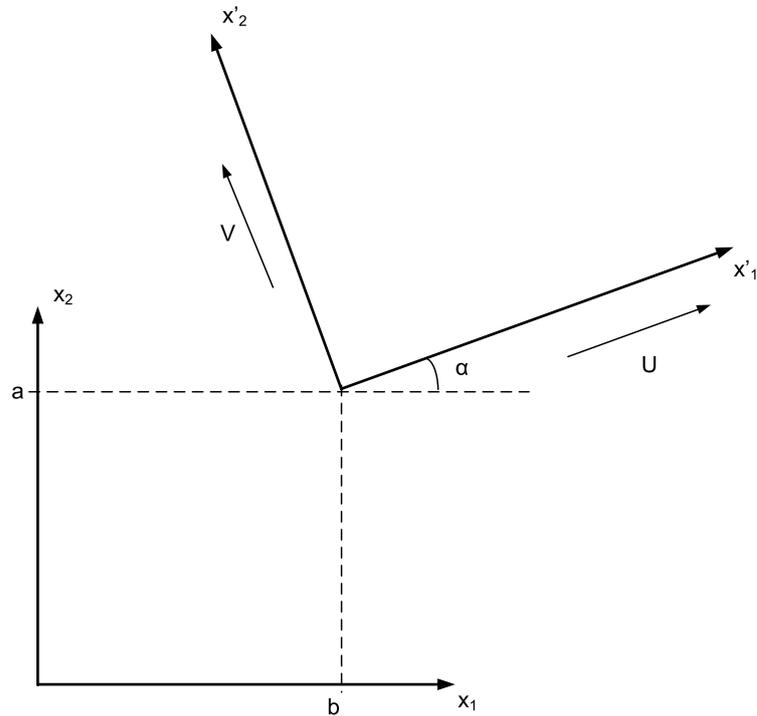


Fig. 2.2: Representação de um referencial inercial e um segundo com velocidade constante

alizando para o espaço tridimensional, podemos descrever as operações galileanas como aquelas que transformam um sistema de coordenadas  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  em um sistema de coordenadas  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  a partir da relação

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{a}t \quad (2.11)$$

Onde  $\mathbf{Q}$  é um tensor que relaciona a transformação referencial no instante inicial de análise (com relação a rotação dos eixos) e  $\mathbf{a}$  é o vetor velocidade relativa constante de um sistema em relação ao outro. A maioria dos critérios de identificação de estruturas vorticais que se baseiam no tensor gradiente de velocidades, denotam a importância da invariância galileana como um dos requisitos básicos para uma definição de vórtices. Podemos escrever a velocidade derivando no tempo a Eq. (2.11)

$$\mathbf{v}' = \mathbf{Q}\mathbf{v} + \mathbf{a} \quad (2.12)$$

Assim, escrevendo o gradiente de velocidades obtido a partir do referencial  $\mathbf{x}'$  obtemos

$$\nabla_{\mathbf{v}'} = \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.13)$$

Podemos concluir a partir da relação apresentada em (2.13) que o tensor gradiente de velocidades é invariante a transformações galileanas.

### 2.2.2 Invariância euclidiana ou Objetividade

Um dos principais axiomas da mecânica do contínuo prega que toda propriedade passível de ser avaliada pelas equações que regem essa extensão do conhecimento deve ser invariante a mudanças de observador [28]. A magnitude das forças atuantes, por exemplo, em um filamento material deve ser obtida igualmente por dois observadores, seja um deles inercial e outro em movimento acelerado em relação ao primeiro. Esse conceito, também conhecido como objetividade, é comumente omitido em leituras de mecânica elementar, por ser inerentes a praticamente todas as repostas materiais que são objetos de estudo dessa ciência. Matematicamente, definimos objetividade como o conjunto de propriedades que são invariantes a transformações nos referenciais que seguem a relação

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{c}(t) \quad (2.14)$$

Onde  $\mathbf{Q}(t)$  e  $\mathbf{c}(t)$  são um tensor ortogonal e um vetor, respectivamente, ambos funções no tempo. Esse tipo de transformação é conhecido também como transformação euclidiana. Observando a transformação (2.14), podemos concluir que, diferente da invariância galileana, as transformações euclidianas englobam também acelerações, assim como rotações dos referenciais avaliados, descrevendo assim a forma mais geral de transformação rígida no sistemas de coordenadas

entre dois observadores. Grandezas escalares ( $\gamma$ ) atendem ao requisito de objetividade de acordo com a relação

$$\gamma' = \gamma \quad (2.15)$$

Dois observadores que sofram qualquer transformação rígida nos seus sistemas de coordenadas referenciais devem avaliar, por exemplo, o mesmo valor de temperatura em um fenômeno termodinâmico. A concentração de um determinado componente em uma mistura também é caracterizada por um escalar que não pode variar de acordo com o observador. Um vetor  $\mathbf{v}$  objetivo deve poder ser escrito com base no sistema de coordenadas de um observador  $(x_1, x_2, x_3)$  e de um segundo, cuja base  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  sofre uma transformação dada pela relação (2.14).

$$\mathbf{v} = v_{x_1} \hat{e}_{x_1} + v_{x_2} \hat{e}_{x_2} + v_{x_3} \hat{e}_{x_3} = v_{x'_1} \hat{e}_{x'_1} + v_{x'_2} \hat{e}_{x'_2} + v_{x'_3} \hat{e}_{x'_3} \quad (2.16)$$

Multiplicando os termos de ambos os lados da Eq. (2.16) pelos termos da base  $\hat{e}_{x'_i}$  individualmente, é possível obter a relação entre os termos de  $\mathbf{v}$  escritos na base  $\mathbf{x}'$  com relação a aqueles escritos na base  $\mathbf{x}$

$$\begin{bmatrix} v_{x'_1} \\ v_{x'_2} \\ v_{x'_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_{x_1} \hat{e}_{x'_1} & \hat{e}_{x_2} \hat{e}_{x'_1} & \hat{e}_{x_3} \hat{e}_{x'_1} \\ \hat{e}_{x_1} \hat{e}_{x'_2} & \hat{e}_{x_2} \hat{e}_{x'_2} & \hat{e}_{x_3} \hat{e}_{x'_2} \\ \hat{e}_{x_1} \hat{e}_{x'_3} & \hat{e}_{x_2} \hat{e}_{x'_3} & \hat{e}_{x_3} \hat{e}_{x'_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{x_2} \\ v_{x_3} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Se a transformação da base  $\mathbf{x}'$  para a base  $\mathbf{x}$  ocorrer de acordo com a Eq. (2.14), então o tensor de segundo grau da relação (2.17) é o próprio tensor  $\mathbf{Q}(t)$  e grandezas vetoriais objetivas seguem a condição

$$\mathbf{v}' = \mathbf{Q}\mathbf{v} \quad (2.18)$$

Assim, a Eq. (2.18) mostra que a relação entre os termos de um vetor objetivo devem refletir somente a rotação de um sistema de coordenadas com relação ao outro. É importante ressaltar que as linhas do tensor de segunda ordem do tensor

(2.17) representam a transformação versorial dos termos da base  $\mathbf{x}'$  com relação a  $\mathbf{x}$ , enquanto que ao longo das colunas ocorre o inverso conseqüentemente. Um tensor  $\mathbf{T}$  considerado objetivo deve respeitar a relação com outros dois vetores objetivos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{v} \implies \mathbf{u}' = \mathbf{T}'\mathbf{v}' \quad (2.19)$$

Aplicando a relação (2.18) no lado direito da Eq. (2.19)

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{T}'\mathbf{Q}\mathbf{v} \implies \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{T}'\mathbf{Q}\mathbf{v} \quad (2.20)$$

Multiplicando ambos os lados da relação final em (2.20), chegamos a relação que caracteriza a objetividade de um tensor

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T \quad (2.21)$$

A partir do que foi mostrado em (2.18) e (2.21), é possível avaliar que a velocidade é uma entidade não objetiva, pois

$$\mathbf{v}' = \mathbf{Q}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{c}} \quad (2.22)$$

Entretanto, a distância entre dois pontos  $A$  e  $B$  é uma propriedade objetiva, uma vez que

$$\mathbf{x}'_a - \mathbf{x}'_b = \mathbf{Q}(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) + \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) \quad (2.23)$$

A característica de invariância euclidiana é claramente mais restritiva que a invariância galileana. Avaliando o tensor gradiente de velocidades em um referencial  $\mathbf{x}'$  que sofre transformações descritas pela Eq. (2.14) em relação a um segundo referencial  $\mathbf{x}$ :

$$\nabla\mathbf{v}' = \frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial\mathbf{x}'} = \dot{\mathbf{Q}}(t)\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}'} + \mathbf{Q}(t)\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}'} \quad (2.24)$$

$$\nabla \mathbf{v}' = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\nabla \mathbf{v}\mathbf{Q}^T \neq \mathbf{Q}\nabla \mathbf{v}\mathbf{Q}^T \quad (2.25)$$

A partir do que foi mostrado nas relações (2.24) e (2.25) e do que foi introduzido na Eq. (2.21), é possível chegar a conclusão que o tensor gradiente de velocidades não é objetivo. Avaliando a parte simétrica e antissimétrica do gradiente de velocidades, ou seja, os tensores taxa de deformação  $\mathbf{D}$  e vorticidade  $\mathbf{W}$ , respectivamente, quanto a sua objetividade, chegamos às relações

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}' + \nabla \mathbf{v}'^T) = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T \quad (2.26)$$

$$\mathbf{W}' = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}' - \nabla \mathbf{v}'^T) = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T \neq \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T \quad (2.27)$$

Assim, de acordo com as eqs. (2.26) e (2.27), é possível concluir que o tensor taxa de deformação é objetivo, enquanto que o tensor vorticidade não. Avaliando as interpretações físicas dos dois tensores, as duas afirmativas apresentadas na sentença anterior são coerentes, pois enquanto o tensor vorticidade está relacionado a velocidade rotacional de filamentos materiais inicialmente ortogonais e, portanto, dois observadores podem avaliar diferentes velocidades relativas, o tensor taxa de deformação avalia a taxa de alongamento e compressão de filamentos, o que caracteriza uma propriedade que não varia com o observador, pois o comprimento, conforme avaliado em (2.23), é uma propriedade objetiva.

Um dos principais objetivos do presente trabalho é apresentar um critério de definição de vórtices invariante quanto a transformações euclidianas. No capítulo 3 será discutida a formulação e um operador que assume grande importância nessa formulação, e em tantas outras na mecânica do contínuo, é a derivada material. Portanto, torna-se de grande importância a verificação da objetividade desse operador. Suponha um tensor de segunda ordem  $\mathbf{A}$ , objetivo. A derivada do tensor  $\mathbf{A}'$ , relacionado com o tensor  $\mathbf{A}$  pela transformação (2.14) pode ser obtida de acordo com a relação abaixo.

$$\mathbf{A}' = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T \quad (2.28)$$

$$\dot{\mathbf{A}}' = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{A}\dot{\mathbf{Q}}^T \neq \mathbf{Q}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^T \quad (2.29)$$

De acordo com a relação (2.29), a derivada material é um operador não-objetivo, ou seja, um operador que não preserva a objetividade da propriedade operada.

### 2.3 Quanto à Relação com a Cinemática do escoamento

Conceitos intuitivos de definição de estruturas vorticais estão relacionados a características diretas do campo de velocidade. Os primeiros critérios de identificação buscavam por linhas de corrente circulares e fechadas para indicar a presença de vórtices. Ainda hoje é comum o uso do termo vórtice para designar uma recirculação, característica de linhas de corrente fechadas. Entretanto, na avaliação de escoamento transientes, a análise e o conceito de linhas de corrente tornam essa definição de estruturas vorticais falha, uma vez que a linha de corrente avalia cada instante de tempo de maneira independente, sem qualquer preocupação com a evolução temporal do que é identificado por esse critério. Nesse cenário, a avaliação da topologia do escoamento por meio de linhas de trajetória apareceu como uma solução para problemas transientes. Entretanto, esse tipo de conceito fundado em uma base puramente cinemática vêm perdendo espaço devido a problemas na sua formulação e na variação dos resultados quanto a transformações no referencial, mas ainda são utilizados em situações que não requerem uma preocupação formal na captura de estruturas vorticais.

Critérios que se baseiam na dinâmica do escoamento começaram a ser definidos no início da década de 1980 e suplantaram, quase que completamente, aqueles que se baseiam em conceitos puramente cinemáticos. Por serem critérios que avaliam não somente o comportamento do campo de velocidades, mas também

as tendências de alinhamento que culminam no escoamento avaliado, conseguem, com alguma precisão identificar estruturas vorticais em diversas categorias de escoamentos e, em alguns casos, independentes do comportamento do observador. Entretanto, ainda que baseados em conceitos dinâmicos, essa categoria de critérios utiliza em sua formulação conceitos cinemáticos, o que torna difícil a associação deste com os termos das equações que regem a dinâmica dos fluidos principalmente da equação da conservação da quantidade de movimento. Um critério que permitisse esse tipo de associação, possibilitaria a avaliação dos termos dessas equações, quanto a dissipação ou excitação de vórtices em um dado escoamento.

## 2.4 Avaliação dos Critérios Existentes

Serão abordadas nessa seção as definições e critérios de identificação e classificação de vórtices propostos ao longo das últimas 3 décadas e que foram brevemente introduzidos no capítulo 1. Esses estudos serão criticados quanto a sua formulação e quanto ao atendimento dos requisitos propostos pelos diversos autores ao longo dos anos e que foram parcialmente abordados na seção anterior.

### 2.4.1 Linhas de Corrente e de Trajetória

Lugt [21] propôs a avaliação de vórtices por meio de linhas de trajetória que apresentem topologia fechada ou em espiral. Como foi mostrado na relação (2.7), a trajetória descrita por uma partícula constitui um critério que não atende aos requisitos de invariância galileana e, portanto, não atende aos requisitos mínimos apontados por diversos autores para uma definição ideal de vórtices. Além disso, o tempo de integração necessário para uma avaliação completa da topologia da trajetória de uma partícula é um parâmetro subjetivo, pois depende de uma escolha que pode incorrer a erros, principalmente quando o problema não é conhecido *a priori* ou quando mais de uma estruturas vortical, com diferentes tempos de existência coexistem em um dado escoamento. Por último, outro problema do critério encontra-se no fato de que durante a evolução de um vórtice, a trajetória

das partículas que se encontram na região vortical podem não completar uma revolução completa, principalmente quando este se encontra em processos não lineares que tendem a diminuir o “tempo de vida” um vórtice, acelerando sua dissipação [3].

O mesmo critério baseado em linhas de corrente falha pelos mesmos motivos citados acima, com a exceção de que nesse caso a evolução temporal não é contemplada, o que exclui a questão de subjetividade. seja  $d\mathbf{s} = (dx_1, dx_2, dx_3)$  um elemento de arco disposto ao longo de uma linha de corrente. Se o vetor velocidade local é dado por  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ , por definição, ao longo da linha de corrente

$$\frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} = \frac{dx_3}{u_3} \quad (2.30)$$

Aplicando a mesma condição em um segundo observador  $d\mathbf{s}' = (dx'_1, dx'_2, dx'_3)$  que translada à velocidade constante em relação ao primeiro de acordo com a transformação (2.11), temos que:

$$\frac{Q_{1i}dx_i}{Q_{1i}u_i + a_1} = \frac{Q_{2i}dx_i}{Q_{2i}u_i + a_2} = \frac{Q_{3i}dx_i}{Q_{3i}u_i + a_3} \quad (2.31)$$

A relação (2.31) confirma que a linha de corrente não é uma entidade invariante galileana e, portanto, o critério pode levar a conclusões distintas para diferentes observadores.

## 2.4.2 Vorticidade

Um critério bastante intuitivo, o critério de vorticidade é um dos critérios mais utilizados em artigos científicos para identificação de estruturas coerente em escoamento turbulentos. Ele é constituído constitui na varredura e identificação de regiões conectadas com elevado módulo de vorticidade  $\|\boldsymbol{\omega}\|$ . Parece inteiramente lógico e natural ligar vórtices com vorticidade. Não é um acaso que estas duas palavras tenham mesmo radical que é ligado ao conceito de rotação. No entanto, em escoamentos predominantemente cisalhantes, o critério de vorticidade

falha ao identificar vórtices. Em escoamentos de camada limite, principalmente em regime turbulento, a região parietal apresenta grandes concentrações de vorticidade, devido ao forte gradiente de velocidades na direção normal a parede, mascarando a presença de possíveis estruturas coerentes no restante do domínio devido a diferença entre os patamares de  $\|\boldsymbol{\omega}\|$ .

Outro exemplo que pode denotar problemas na análise da vorticidade é o de vórtices axissimétricos com forte variação de vorticidade na direção axial, onde o presente critério pode identificar uma única região vortical como um conjunto de vórtices segmentados [3]. Mesmo para um referencial inercial, a vorticidade apresenta limitações como ferramenta de identificação de vórtices. Um exemplo encontra-se em um tanque que gira a velocidade de rotação cuja ordem de grandeza ultrapassa aquela das estruturas vorticais confinadas no interior deste tanque. Um critério que se baseie na vorticidade perderá a heterogeneidade dessas estruturas vorticais e identificará um único grande vórtice. Finalmente, a identificação por meio do módulo da vorticidade constitui um critério fortemente subjetivo, pois, além da escolha do patamar a ser considerado como limite inferior para evidenciar a presença de um vórtice ser dependente de caso a caso, em escoamentos heterogêneos, sem o prévio conhecimento de sua dinâmica, zonas vorticais distintas podem ser filtradas na análise. Conforme apresentado anteriormente na relação (2.27), a vorticidade é uma propriedade não objetiva e pode resultar em erros na análise se avaliada por um observador que gire, por exemplo, em relação a um referencial inercial.

### 2.4.3 Pressão Local Mínima

Em uma região vortical, onde as forças centrífugas são balanceadas pela pressão (balanço ciclostrófico), em uma região próxima do eixo desse vórtice a pressão tende a assumir um valor menor que a pressão de referência. Esse critério é bastante aplicado independentemente ou, de acordo com o critério proposto por Hunt et al. [2], como um complemento a um critério principal. O

conceito de pressão mínima requer um aprofundamento no que diz respeito a sua associação com a classificação de vórtices, pois, esse mínimo pode ocorrer em todas as direções ou em um plano normal ao eixo do vórtice, o que diferencia a topologia vortical existente.

Valores locais mínimos de pressão podem ocorrer mesmo em escoamentos irrotacionais, sem a presença de qualquer movimento vortical. Jeong e Hussain [3] citam um exemplo de escoamento extensional axissimétrico, ou seja, livre de cisalhamento [29], dado pelo campo de velocidades  $u_r = -\alpha(t)r$ ,  $u_\theta = 0$  e  $u_z = 2\alpha(t)z$ . Esse escoamento, solução das equações de Euler, tem o seu campo de pressão de acordo com a equação

$$p = (\dot{\alpha} - \alpha^2)\frac{1}{2}r^2 + (-\dot{\alpha} - \alpha^2)z^2 \quad (2.32)$$

Na relação acima,  $\dot{\alpha}$  é a derivada temporal da taxa de deformação  $\alpha(t)$ . Quando  $\dot{\alpha} - \alpha^2 > 0$ , a pressão terá um mínimo local em todo plano  $(r, \theta)$ , mesmo o escoamento apresentando componentes nulas para o tensor vorticidade, visto que o componente do vetor velocidade em uma direção não varia com nenhuma outra, nem qualquer movimento vortical típico. A pressão mínima nesse caso é consequência somente do comportamento transiente da taxa de deformação  $\alpha(t)$ . Ainda segundo Jeong e Hussain [3], mesmo em escoamentos permanentes, a força centrífuga pode ser equilibrada pelas forças viscosas, sem aparente modificação no perfil de pressão em planos normais ao eixo do vórtice. Em escoamentos com baixos números de Reynolds (escoamentos de Stokes), a força devido a pressão é balanceada pelas forças viscosas e a pressão obedece a equação de Laplace. Sendo assim em escoamentos planos, a força devido a pressão não pode apresentar um mínimo local, mesmo sendo evidenciada a presença de vórtices em cantos vivos maiores ou menores que  $90^\circ$ , de acordo com o trabalho analítico de Moffatt [30].

#### 2.4.4 Critério Proposto por Chong et al. [1]

Chong et al. [1] condiciona a presença de vórtices ao fato do tensor gradiente de velocidades apresentar autovalores complexos. Esse tipo de condição indica que as linhas de corrente apresentam curvas fechadas, delimitando a estrutura vortical ao interior desta região. Entretanto, diferente dos critérios baseados em linhas de corrente fechadas, essa característica é respeitada para um observador que se move a mesma velocidade que o centro do vórtice, ou seja, o critério é invariante a translações a velocidade constante no sistemas de coordenadas. Seja  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  um campo de velocidades no  $\mathbb{R}^3$ . Os autovalores  $\lambda^{\nabla\mathbf{v}}$  do gradiente de velocidades,  $\nabla\mathbf{v}$ , devem satisfazer o polinômio característico

$$\lambda_{\nabla\mathbf{v}}^3 + P\lambda_{\nabla\mathbf{v}}^2 + Q\lambda_{\nabla\mathbf{v}} + R = 0 \quad (2.33)$$

Onde  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são conhecidos como os invariantes dos tensor gradiente de velocidades e obedecem as relações, em notação indicial

$$P = -\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.34)$$

$$Q = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{u} - tr(\nabla\mathbf{u})^2) = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \left( P^2 - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.35)$$

$$R = -det \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.36)$$

O operador  $det()$  na Eq. (2.36) representa o determinante do tensor operado. A condição indicada por Chong et al. [1] pode ser descrita matematicamente a partir dos invariantes do tensor gradiente de velocidades de acordo com a relação

$$\frac{1}{4} \left( R + \frac{2}{27}P^3 - \frac{1}{3}PQ \right)^2 + \frac{1}{27} \left( Q - \frac{1}{3}P^2 \right)^3 > 0 \quad (2.37)$$

Na maioria dos trabalhos científicos que citam a condição (2.37), também

referenciada como critério delta ( $\Delta$ ), o primeiro invariante,  $P$ , é comumente excluído, assim como os termos aos quais se encontra multiplicado, por avaliarem quase sempre escoamentos incompressíveis. Nesse caso, a equação

$$\left(\frac{1}{2}R\right)^2 + \left(\frac{1}{3}Q\right)^3 > 0 \quad (2.38)$$

Como a formulação do critério depende unicamente dos termos do tensor gradiente de velocidades, novamente é possível chegar conclusão que  $\Delta$  pode ser considerado invariante a transformações galileanas, reforçando o significado físico apresentado no início da seção. Porém, devido ao fato de  $\Delta$  depender também da parte antissimétrica do tensor gradiente de velocidade, ou seja, o tensor vorticidade ( $\mathbf{W}$ ), o critério não pode ser considerado objetivo.

Jeong e Hussain [3] apresentam três exemplos onde o critério  $\Delta$  falha: um deles trata de uma proposta analítica de representação de um tornado e os outros dois são exemplos numéricos, o primeiro baseado no problema de camada de mistura e o segundo em um jato circular. No problema analítico, o campo de velocidades que representa um modelo de tornado com simetria cônica é dado pelas funções, em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$

$$u_r = -\frac{\psi'(x)}{r}, \quad u_\theta = -\frac{\psi(x)}{r \sin \theta}, \quad u_\phi = \frac{\Gamma(x)}{r \sin \theta}, \quad x = \cos \theta \quad (2.39)$$

No campo de velocidades (2.39),  $\psi(x)$  e  $\psi'(x)$  representam a função de corrente de Stokes e sua derivada com relação a  $x$ , respectivamente. O parâmetro  $\Gamma(x)$  constitui uma função adimensional que garante o comportamento assintótico das linhas de corrente no plano de simetria cônica [31]. O critério delta falha nesse escoamento, pois detecta mais de uma região vortical, devido a diferença na velocidade entre as diferentes linhas de corrente ao longo da direção meridional. Um observador que se movimenta com a mesma velocidade de um ponto disposto sobre uma linha de corrente central, na sua região de maior curvatura observa uma

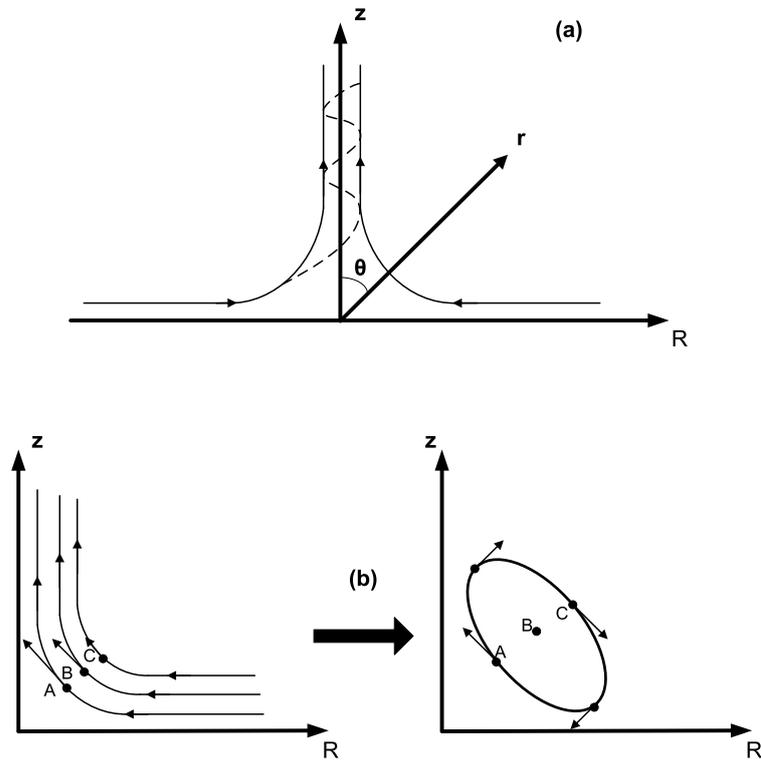


Fig. 2.3: (a) Representação esquemática do escoamento em um tornado. (b) Influência da variação do movimento do observador na descrição das linhas de corrente

topologia fechada, pois um ponto qualquer também na região de maior curvatura de linha de corrente mais interna apresenta velocidade maior que a de uma linha mais externa.

Em um escoamento de camada de mistura, inicializado com um perfil de velocidades hiperbólico na direção do fluxo e com um perfil senoidal ao longo da direção transversal para a vorticidade, Jeong e Hussain [3] mostram que a região vortical capturada pelo critério  $\Delta$  apresenta uma região com diversas perturbações de pequena escala, o que não é observado quando aplicado o critério proposto pelos autores (critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ) e que será discutido mais a frente no capítulo, nem mesmo o critério de vorticidade  $\|\boldsymbol{\omega}\|$ . Os autores justificam que aumentando o valor de restrição de  $\Delta$  acima de zero, essas perturbações de menor escala desaparecem sem remover a região vortical principal, o que evidencia o

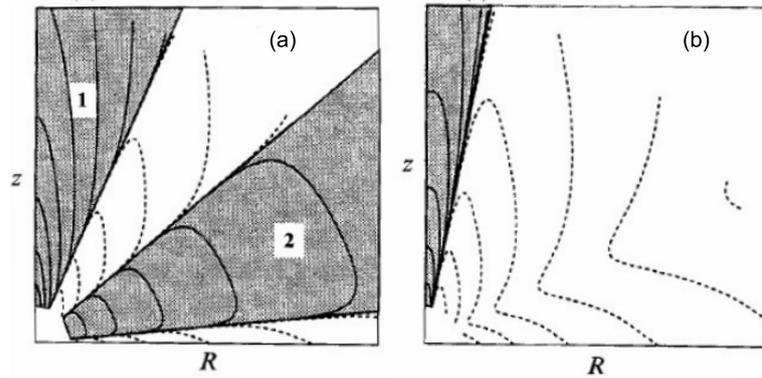


Fig. 2.4: (a) Resultado da análise com o critério  $\Delta$  no escoamento representativo de um tornado. (b) Resultado da análise com o critério  $\Lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$  no escoamento representativo de um tornado. Ambos reproduzidos de [3]

fato de que essas perturbações na região vortical apontada pelo critério não reflete unicamente distúrbios no campo de velocidades obtido numericamente via Simulação Numérica Direta (DNS), mas também incorreções na captura das estruturas coerentes de menor escala.

No último contra-exemplo apresentado por Jeong e Hussain [3] esse tipo de perturbação também é evidenciada na captura de um vórtice toroidal obtido a partir de uma simulação DNS de um jato circular. Novamente, esse tipo de perturbação não é visualizado no critério proposto pelos autores nem na região vortical produzida pelo critério de vorticidade acima de um determinado patamar pré-definido.

Finalmente, como uma proposta de modificação no intuito de restringir a identificação do que o critério  $\Delta$  por estruturas vorticais, Zhou et al. [5] indica a necessidade da inclusão do critério de vorticidade local concentrada acima de um determinado patamar ao critério  $\Delta$ , com intuito de retirar da análise grandes zonas difusas de cisalhamento, que contemplam autovalores complexos para o gradiente de velocidades, mas que não representam estruturas vorticais. Essa proposta está em acordo com a idéia de identificação proposta por Zhou et al. [5] de identificar vórtices como zonas compactas que mantenham a distância entre partículas imersas nessas regiões, durante a “vida” dessa estruturas vortical.

### 2.4.5 Critério Proposto por Hunt et al. [2]

Truesdell [23] apresentou o número de vorticidade,  $N_k$ , com o objetivo de aferir a severidade de rotação local, ponderando a taxa de rotação local pela taxa de deformação de acordo com a relação

$$N_k = \frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|} \quad (2.40)$$

Onde  $\|\mathbf{D}\| = [\text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{D}^T)]^{\frac{1}{2}}$ ,  $\|\mathbf{W}\| = [\text{tr}(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)]^{\frac{1}{2}}$  e o operador traço,  $\text{tr}()$ , em notação indicial, é dado por  $\text{tr}(A) = A_{ii}$ . Melander e Hussain [32] e, recentemente, Pradeep e Hussain [33] aplicaram esse número na identificação de estruturas vorticiais, classificando-as como regiões compactas com  $N_k > 1$ .  $N_k = 0$  contempla escoamentos extensionais, ou seja, sem cisalhamento e  $N_k \rightarrow \infty$  representa situações características de rotação de corpo rígido.

Semelhante ao critério  $N_k$ , Hunt et al. [2] descrevem vórtices como regiões onde o segundo invariante do tensor gradiente de velocidades,  $Q$  é maior que zero

$$Q = \frac{1}{2}[\|\mathbf{W}\|^2 - (\|\mathbf{D}\|^2 - P^2)] > 0 \quad (2.41)$$

Ou seja, a intensidade da taxa de rotação local, medida pela norma euclidiana da vorticidade, deve suplantar a taxa de deformação dada pelo tensor  $\mathbf{D}$  além da taxa de deformação inerente a variação volumétrica, em casos de escoamento compressíveis ou de densidade variável.  $Q$  também pode ser interpretada como o termo fonte de pressão na equação de Navier-Stokes [3]. A partir da equação de Poisson para a pressão

$$\nabla^2 p = 2\rho Q \quad (2.42)$$

Um ponto de máximo para a pressão ocorrerá quando  $Q > 0$  e a pressão mínima ocorrerá quando  $Q < 0$ . Entretanto, para ambos as situações as recíprocas não são verdadeira. Por esse motivo, Hunt et al. [2] explicitaram a necessidade de acrescentar ao critério  $Q$  a condição de pressão mínima local, para a identi-

ficação de um vórtice. Essa extensão do critério é comumente desconsiderado das análises de estruturas vorticais, mas sua importância deve ser considerada pelos motivos já apresentados.

Apesar de tanto o número de vorticidade quanto o critério  $Q$  dependerem da norma do tensor vorticidade diretamente em suas formulações, diferente do critério  $\|\boldsymbol{\omega}\|$ , esses critérios não apresentam saltos nos valores em regiões parietais, pois, assim como a vorticidade, a taxa de deformação também apresenta valores acentuados, o que elimina a identificação de estruturas vorticais nessas regiões, onde é óbvia sua inexistência. Além disso, também por dependerem do tensor vorticidade, esses critérios são invariantes a transformações galileanas, mas não são entidades objetivas. Por fim, é possível concluir-se que o critério  $Q$  é claramente mais restritivo que o critério  $\Delta$  apresentado por Chong et al. [1] já que, pela Eq. (2.41) se  $Q > 0 \Rightarrow \Delta > 0$ . Em outras palavras, uma região vortical segundo o critério  $Q$  é menor que uma mesma região vortical representada pelo critério  $\Delta$ .

O campo de velocidades em coordenadas esféricas proposto por Shtern e Hussain [31] que modela um tornado e que foi relatado no exemplo anterior também é descrito por Jeong e Hussain [3] como um exemplo de escoamento onde tanto o número de vorticidade quanto o critério  $Q$  apresentam problemas na identificação da estrutura vortical junto ao eixo da simetria cônica. A Fig. (2.5) reproduz o resultado apresentado pelos autores da captura da região vortical utilizando o critério  $Q$ . Como é possível notar, a região de  $Q > 0$  se encontra fora do eixo, e não captura a região onde o movimento vortical é proeminente, ou seja, próximo do eixo.

Outra situação que apresenta a deficiência da captura do critério  $Q$  é o caso de um vórtice axissimétrico no centro de um anel vortical [3]. Um anel vortical com um raio relativamente pequeno ( $\frac{L_r}{L} = 10^{-3}$ , onde  $L_r$  e  $L$  representam o raio do anel e o tamanho do domínio na direção radial, respectivamente) e no centro desse anel passa um vórtice axissimétrico. A Fig. (2.6) apresenta um esquema

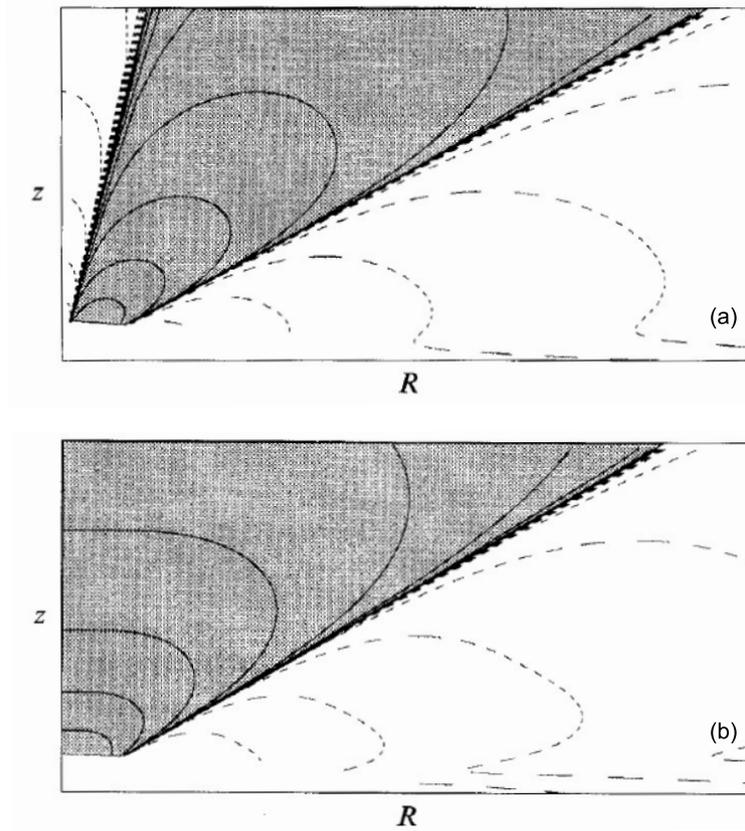


Fig. 2.5: (a) Resultado da análise com o critério  $Q$  no escoamento representativo de um tornado. (b) Resultado da análise com o critério  $\Lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$  no escoamento representativo de um tornado. Ambos reproduzidos de [3]

do problema.

Para obterem a solução do problema, Jeong e Hussain [3] utilizaram um domínio com razão de aspecto  $L_r/L_z = 4/3$  e uma malha de 400x400 nós para resolver a equação elíptica em regime permanente

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r\omega_\theta = r^2 \frac{dH}{d\psi} - \Gamma \frac{d\Gamma}{d\psi} \quad (2.43)$$

Onde  $\psi$  é a função de corrente e  $H = p/\rho + \frac{1}{2}v^2$  é a pressão total. As condições de contorno para a velocidade na direção azimutal,  $u_\theta(r, -L_z)$ , para a vorticidade,  $\omega_\theta(r, -L_z)$  e para a velocidade axial  $u_z(r, \pm L_z)$  são

$$\Gamma = ru_\theta(r, -L_z) = \Gamma_0(1 - \exp(-(r/\delta)^2)) \quad (2.44)$$

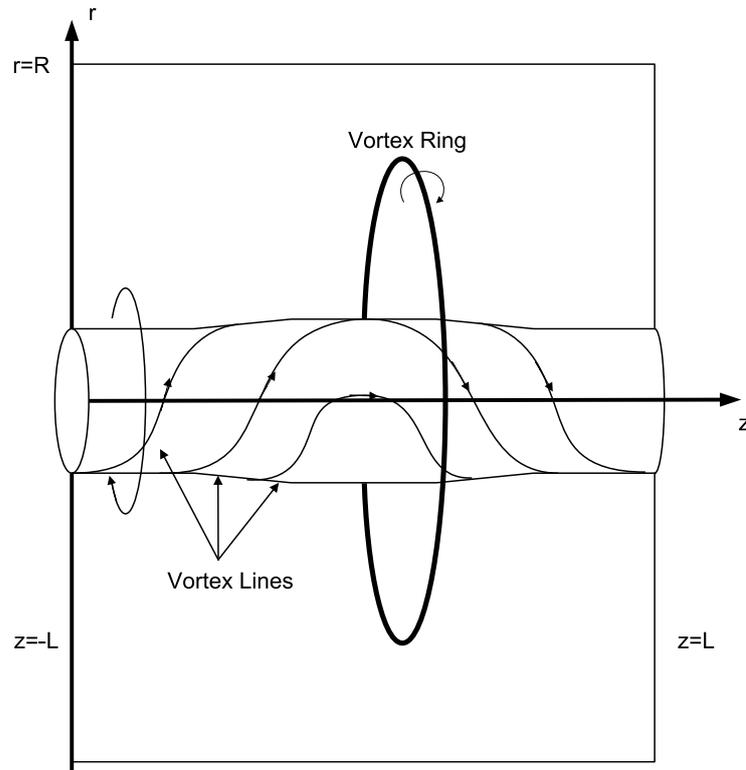


Fig. 2.6: Representação de um vórtice axissimétrico que alocado ao longo eixo de um anel vortical

$$\omega_{\theta}(r, -L_z) = U_a \exp(-(r/\delta)^2) \quad (2.45)$$

$$u_z(r, z = \pm L) = U_b + U_a \exp(-(r/\delta)^2) \quad (2.46)$$

Onde  $U_b$  e  $U_a$  são, respectivamente, a velocidade de propagação do anel vortical e a velocidade no centro induzida pela vorticidade na direção teta,  $\omega_{\theta}$  do vórtice axissimétrico. O resultado da avaliação da região do vórtice axissimétrico é apresentado na Fig. 2.7. Pode-se notar que o critério  $Q$  representa 3 regiões vorticais segmentadas onde deveria existir, pela solução do problema demonstrada na figura, uma única região alongada. O vórtice axissimétrico acaba por expandir próximo da posição axial na qual o anel vortical se encontra por interferência desse. Jeong e Hussain [3] afirmam com esse exemplo que o critério  $Q$  não é

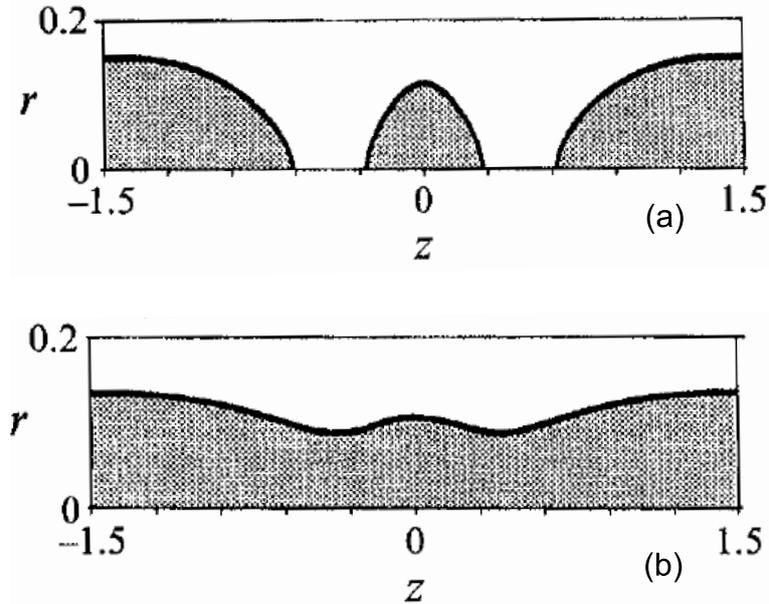


Fig. 2.7: Comparação dos critérios  $Q$  ((a)) e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$  ((b)) na identificação de um vórtice axissimétrico. Ambos reproduzidos de [3]

capaz de capturar uma região vortical quando essa é submetida, devido a algum efeito não-linear, à expansão local.

Outro exemplo que denota a deficiência do critério  $Q$  é o vórtice de Bödewadt. Esse tipo de escoamento atua de forma contrária ao famoso “bombeio vortical de Kármán”, pois, longe da parede, a força centrífuga é equilibrada pelo gradiente de pressão radial (balanço ciclostrófico). Entretanto os efeitos viscosos na parede diminuem a velocidade angular e, em consequência da diminuição da força próximo a parede, a força devido ao gradiente de pressão se sobressai a primeira e move o escoamento para a próximo do eixo, enquanto que o fluido próximo do eixo move-se, pela continuidade, ao longo da direção axial. Assim, o campo de velocidades e pressão podem ser representados pelas relações

$$u_r = -rF(z), \quad u_\theta = rG(z), \quad u_z = H(z), \quad P = \frac{1}{2}r^2 + P_0(z) \quad (2.47)$$

Onde  $F(z)$ ,  $G(z)$ ,  $H(z)$  e  $P(z)$  são funções apropriadas [34]. A Fig. 2.8 mostra um esquema de representação do escoamento.

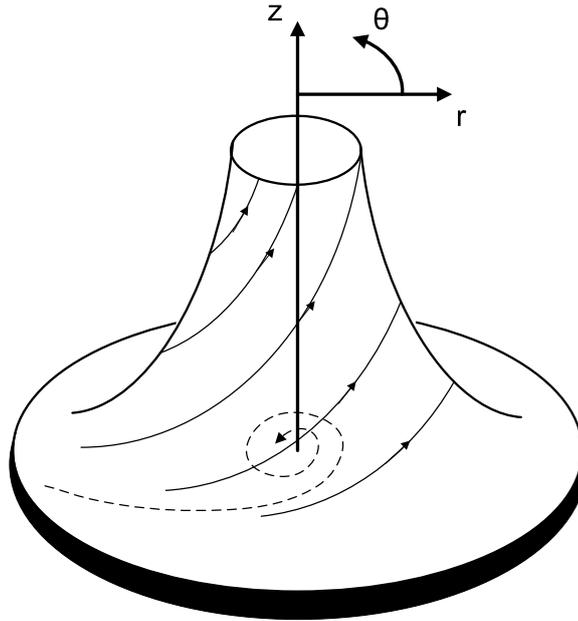


Fig. 2.8: Representação do escoamento de Bödewadt

A Fig. 4.2 apresenta o gráfico de variação do critério  $Q$  com o critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$  proposto por Jeong e Hussain [3]. É possível notar pelo campo de velocidades que ao longo de toda a região parietal existe movimento vortical e este não é capturado no início pelo critério  $Q$ , onde essa região parietal ainda se encontra relativamente distante do eixo e ainda não é possível para o critério identificar a tendência suave de rotação, que promove uma curvatura mais suave às linhas de corrente, ainda que existente.

#### 2.4.6 Critério Proposto por Jeong e Hussain [3]

A condição de pressão mínima, avaliada com base no gradiente da equação de Navier-Stokes é a base para a definição proposta por Jeong e Hussain [3]. Segundo os autores, dois fatores afastam o critério de pressão mínima local da definição de vórtices:

- A deformação oriunda de efeitos transientes pode gerar uma região de pressão mínima sem movimento vortical associado (vide o escoamento extensional discutido na subseção 2.4.3);
- Efeitos viscosos podem se equilibrar com a força de pressão na região vortical,

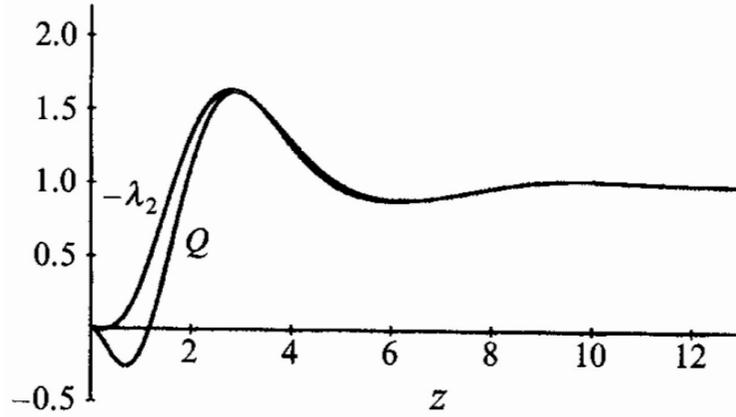


Fig. 2.9: Comparação entre os critérios  $Q$  (a) e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  (b) na identificação de vórtices no escoamento de Bödewadt. Ambos reproduzidos de [3]

difundindo assim uma zona local de pressão mínima.

Pela lei de relação de máximo e mínimo de uma função, chega-se a conclusão que é necessário avaliar as derivadas de segunda ordem da pressão, ou seja, o tensor Hessiana da pressão,  $P_{ij}$ . Este pode ser obtido aplicando-se o operador gradiente na equação de Navier-Stokes

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{p} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.48)$$

$$\frac{D}{Dt} (\nabla \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{P} + \nu \nabla^2 \mathbf{D} \quad (2.49)$$

Abrindo o gradiente de velocidades,  $\nabla \mathbf{u}$  na soma de sua parte antissimétrica ( $\mathbf{W}$ ) com sua parte simétrica ( $\mathbf{D}$ ), temos que o lado esquerdo da Eq. (2.49) pode ser reescrito como

$$\frac{D}{Dt} (\nabla \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = \left[ \frac{D}{Dt} (\mathbf{D}) + \mathbf{W}\mathbf{W} + \mathbf{D}\mathbf{D} \right] + \left[ \frac{D}{Dt} (\mathbf{W}) + \mathbf{W}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{W} \right] \quad (2.50)$$

O lado direito da relação (2.50) foi também dividido em um parte simétrica e antissimétrica, respectivamente. A parte antissimétrica corresponde a equação

de transporte da vorticidade [35]

$$\frac{D}{Dt}(\mathbf{W}) = -\mathbf{D}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{D} + \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla p + \nabla \times \left( \frac{\nabla \cdot \mathbf{T}}{\rho} \right) + \nabla \times \mathbf{B} \quad (2.51)$$

simplificada para um escoamento com forças de corpo desprezíveis ou constantes ao longo do domínio ( $[\nabla \times \mathbf{B}] = 0$ ), sem difusão de vorticidade por efeitos viscosos ( $[\frac{\nabla \cdot \mathbf{T}}{\rho}] = 0$ ), compressível ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) e com um fluido barotrópico ( $[\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla p] = 0$ ). A parte simétrica da Eq. (2.50) é então equalizada ao lado direito da equação do gradiente de Navier-Stokes, resultando na relação

$$\frac{D}{Dt}(\mathbf{D}) - \nu\nabla^2\mathbf{D} + \mathbf{W}\mathbf{W} + \mathbf{D}\mathbf{D} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{P} \quad (2.52)$$

Os dois primeiros termos da relação (2.52) são desconsiderados. Estes representam a influência na Hessiana da pressão da derivada material da deformação instantânea local e de efeitos viscosos. A derivada material computa os termos transientes que não contribuem para estruturas vorticais como descrito anteriormente utilizando o escoamento extensional que deu origem à Eq. 2.52 e, segundo os autores, a eliminação destes termos resulta em um “indicador mais preciso para a existência de um vórtice”.

A ocorrência de um mínimo de pressão em um plano requer dois autovalores positivos para a Hessiana da pressão. Sendo assim, Jeong e Hussain [3] definem vórtices como regiões compactas onde o tensor resultante  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$ , que equilibra o termo de pressão, apresenta dois autovalores negativos. Uma vez que o tensor  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$  é simétrico, este possui somente autovalores reais. Sabendo que os autovalores,  $\lambda_i^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  são ordenados de tal forma que  $\lambda_1^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} \geq \lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} \geq \lambda_3^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$ , que  $\lambda_1^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  é sempre positivo e que  $\lambda_3^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  é sempre negativo, o critério define estruturas vorticais como regiões conexas onde  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} < 0$ , ou seja, onde dois autovalores são negativos. A relação entre o critério proposto por Jeong e Hussain [3] (critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$ ) e aquele definido por Hunt et al.[2] (critério  $Q$ ) é dada por

$$Q = -\frac{1}{2}tr(\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2) = -\frac{1}{2} \left( \lambda_1^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} + \lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} + \lambda_3^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} \right) \quad (2.53)$$

Cabe ressaltar que o critério  $Q$  descrito por Jeong e Hussain não contém a critério de pressão associado. Assim, o critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  incorpora os dois requisitos necessários para o atendimento do critério  $Q$ , pois enquanto que o segundo observa o quanto a vorticidade excede a taxa de deformação em todas as direções, o primeiro realiza essa mesma observação em um plano específico. Esse fato denota uma outra deficiência do critério  $Q$ , pois este busca, por intermédio de uma única variável, o quanto a vorticidade domina em todas as direções, o que impede que a possibilidade de classificação de estruturas vorticais quanto às direções principais de alinhamento de seu eixo. De acordo com a tabela 2.1 e de alguns dos contra-exemplos que foram apresentados na seção 2.4.5, é possível concluir que os critérios não necessariamente atendem a mesma identificação irrestritamente.

$\lambda_1^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$	$\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$	$\lambda_3^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$	$\Sigma \lambda_i^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$	Critério $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$	Critério $Q$
+	-	-	-	região vortical	região vortical
+	-	-	+	região vortical	região não-vortical
+	+	-	-	região não-vortical	região vortical
+	+	-	+	região não-vortical	região não-vortical

Tab. 2.1: Comparação entre os critérios  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  e  $Q$  com relação aos autovalores do tensor  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$ . Reproduzido de [3]

#### 2.4.7 Equivalência Entre os Critérios $Q$ , $\Delta$ e $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$ para Escoamentos Bidimensionais

Entretanto, quando comparamos o critério introduzido por Chong et al. [1] (critério  $\Delta$ ), o critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  e o critério  $Q$  em escoamentos bidimensionais, encontramos que os três critérios são equivalentes. Seja um campo de velocidades proveniente de um escoamento incompressível bidimensional que resulte no gradiente de velocidades

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

A equação característica do tensor (2.54) é  $\phi^2 - (a^2 + bc) = \phi^2 + Q = 0$ , onde  $\phi$  são os autovalores de  $\nabla \mathbf{u}$ . Assim,  $\phi = \pm(-Q)^{\frac{1}{2}} = \pm(a^2 + bc)^{\frac{1}{2}}$  e para que o gradiente de velocidades apresentem autovalores complexos necessariamente o critério  $Q$  tem de ser atendido, resultando na equivalência entre  $\Delta$  e  $Q$ . Avaliando o tensor  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$

$$\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2 = \begin{bmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

chega-se finalmente a conclusão que, valores negativos de  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  requerem que  $a^2 + bc < 0$ , ou seja,  $Q > 0$  e que os três critérios capturam a igualmente estruturas vorticais em escoamentos bidimensionais.

Assim como os critérios  $\Delta$  e  $Q$ , o critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  se baseia em operadores e entidades não objetivas em sua formulação e, portanto, o mesmo é identificado de maneira diferente por observadores que sofram transformações euclidianas. Apesar do critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  se fundamentar em conceitos dinâmicos, o fato dos termos transiente e viscoso serem deliberadamente excluídos da formulação do critério torna o mesmo carente da avaliação da influência das propriedades reológicas do fluido na formação e na dissipação dos vórtices e de um acompanhamento completo da evolução transiente da região vortical. Além disso, a relação entre a “pressão” avaliada pelo critério e a pressão real apreciada pelo escoamento é indeterminada *a priori*, principalmente em escoamentos compressíveis ou de fluidos não-Newtonianos, que não são contemplados na formulação do critério, visto que o mesmo se baseia na equação de Navier-Stokes e de transporte de vorticidade com severas simplificações. Com o objetivo de avaliar a Hessiana da pressão para escoamento compressíveis, Cucitore et al. [9] avaliam a equação de Navier-Stokes, contabilizando o termo compressível,

$$\rho \frac{D}{Dt} \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \left( \frac{1}{3} \mu + \mu^{II} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (2.56)$$

onde  $\mu^{II}$  é o segundo coeficiente de viscosidade. A relação para a Hessiana da Pressão ( $\mathbf{P}$ ) é obtida aplicando o operador gradiente na Eq. (2.56) e retirando a parte simétrica do termo à esquerda da mesma

$$\begin{aligned} -\mathbf{P} = & \rho \frac{D}{Dt} (\mathbf{D}) + \rho (\mathbf{D}\mathbf{D} + \mathbf{W}\mathbf{W}) - \mu \nabla^2 \mathbf{D} - \left( \frac{1}{3} \mu + \mu^{II} \right) \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \\ & + \frac{1}{2} \left[ (\nabla \cdot \rho) \frac{D}{Dt} \mathbf{D} + \nabla \rho \left( \frac{D}{Dt} \cdot \mathbf{D} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde os dois primeiros termos representam a contribuição do divergente da velocidade e do gradiente de densidade para a Hessiana da pressão. Efeitos que, em alguns casos de escoamentos incompressíveis, poderiam ser desprezados, como a influência das propriedades do material na dissipação ou excitação de estruturas vorticais, principalmente da densidade e da direção de seu gradiente têm de ser incorporados ao critério. A desvantagem dessa incorporação encontra-se no fato de que nem todo efeito relacionado a esses termos adicionais diz respeito a movimento vortical. Por exemplo, efeitos de choque tendem a gerar valores máximos ou mínimos locais de pressão e alteram o comportamento de Hessiana da pressão quando avaliada em sua forma plena.

#### 2.4.8 Critério Proposto por Tabor e Klapper [4]

Haller [14] discute a importância da objetividade como requisito fundamental para um critério identificador de estruturas vorticais e apresenta um exemplo relativamente simples que reforça essa necessidade. Seja um campo de velocidades linear

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \sin 4t & 2 + \cos 4t & 0 \\ -2 + \cos 4t & -\sin 4t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.58)$$

Os critérios  $\Delta$ ,  $Q$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$ , além do critério baseado em linhas de corrente fechadas identificam que todo ponto  $\mathbf{x}$  se encontra em um mesmo vórtice. Para um segundo observador que apresente movimento rotacional em relação ao primeiro de acordo com a transformação

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t & 0 \\ -\sin 2t & \cos 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (2.59)$$

resultando assim no campo de velocidades transformado

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}' \quad (2.60)$$

Esse último campo de velocidades representa para o segundo observador um campo onde a vorticidade é nula. Os critérios  $\Delta$ ,  $Q$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$ , assim como todos os critérios que se baseiam no gradiente de velocidades ou, mais especificamente, na sua parte antissimétrica não detectam uma região vortical quando seu sistema de coordenadas sofre a transformação indicada na Eq. (2.59).

O trabalho de Tabor e Klaper [4] foi dos primeiros a expressar matematicamente um critério objetivo de avaliação da velocidade de deformação em contraponto a rotação local, baseado no segundo invariante do tensor gradiente de velocidade, sendo semelhante aquele proposto por Hunt et al. [2]. O critério pode ser obtido analiticamente analisando-se um escoamento no  $\mathbb{R}^2$ . Considerando um filamento material  $\mathbf{l}$  que sofre a influência do gradiente de velocidade  $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ , sendo avaliado em uma base  $\{\boldsymbol{\xi}_1^{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\xi}_2^{\mathbf{D}}\}$  formada pelos autovetores de  $\mathbf{D}$ , de tal forma que esse tensor apresente valores não-nulos somente em sua diagonal prin-

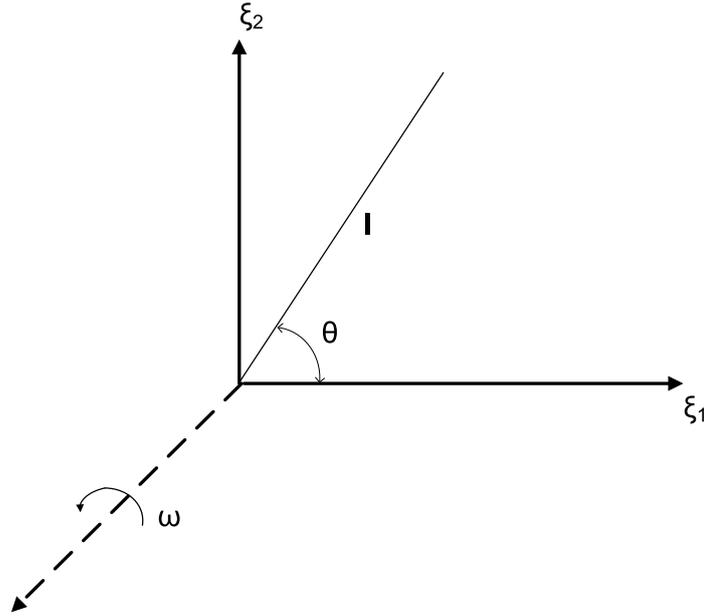


Fig. 2.10: Representação de um filamento  $\mathbf{l}$  descrito na base dos autovetores do tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$

principal, iguais aos seus autovalores,  $\lambda_1^{\mathbf{D}}$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}}$ . O escoamento é incompressível, ou seja,  $\lambda_1^{\mathbf{D}} + \lambda_2^{\mathbf{D}} = 0$  e, por ordenação,  $\lambda_1^{\mathbf{D}} > \lambda_2^{\mathbf{D}}$ . O vetor vorticidade,  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$  é normal ao plano do escoamento e seu sentido de rotação é indicado na Fig. 2.10.

O filamento  $\mathbf{l}$ , em um dado instante, apresenta componentes  $(l_1, l_2)$ , avaliados no sistema de coordenadas do problema, e se encontra submetido a ação conjunta da vorticidade, que tende a girá-lo no sentido anti-horário e do tensor taxa de deformação, que tende a girá-lo no sentido horário, para que este se alinhe a direção de maior deformação  $\boldsymbol{\xi}_1^{\mathbf{D}}$ . No instante de análise  $t$ , este filamento se encontra na posição indicada na Fig. 2.10 e forma um ângulo  $\theta$  com o eixo  $\boldsymbol{\xi}_1^{\mathbf{D}}$ . As novas componentes  $(l_1, l_2)$  do filamento avaliadas após um intervalo de tempo  $\Delta t$  podem ser escritas de acordo com as relações

$$l_1(t + \Delta t) = l_1(t) + (\lambda_1^{\mathbf{D}} l_1(t) - \boldsymbol{\omega} l_2(t)) \quad (2.61)$$

$$l_2(t + \Delta t) = l_2(t) + (\lambda_2^{\mathbf{D}} l_2(t) - \boldsymbol{\omega} l_1(t)) \quad (2.62)$$

Se o ângulo  $\theta$  se mantém constante após o intervalo  $\Delta t$ , por intermédio do

equilíbrio dos efeitos aos quais o filamento se encontra submetido, temos que

$$\tan \theta = \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_2(t + \Delta t)}{l_1(t + \Delta t)} = \frac{l_2}{l_1} \left[ \frac{1 + (\lambda_2^{\mathbf{D}} - \omega l_1/l_2)}{1 + (\lambda_1^{\mathbf{D}} - \omega l_2/l_1)} \right] \quad (2.63)$$

A relação (2.63) implica que

$$1 = \frac{1 + (\lambda_2^{\mathbf{D}} - \omega l_1/l_2)}{1 + (\lambda_1^{\mathbf{D}} - \omega l_2/l_1)} \quad (2.64)$$

Desenvolvendo a relação (2.64), é possível chegar a conclusão que a diferença entre os autovetores do tensor taxa de deformação é dada por

$$\lambda_2^{\mathbf{D}} - \lambda_1^{\mathbf{D}} = -\omega \left( \frac{l_2}{l_1} + \frac{l_1}{l_2} \right) = -\frac{2\omega}{\sin 2\theta} \quad (2.65)$$

Assim, se a relação (2.65) possui solução para  $\theta$ , temos que a seguinte condição deve ser atendida

$$\frac{4\omega^2}{(\lambda_2^{\mathbf{D}} - \lambda_1^{\mathbf{D}})^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (\lambda_2^{\mathbf{D}} - \lambda_1^{\mathbf{D}})^2 - 4\omega^2 \geq 0 \quad (2.66)$$

Visto que o problema trata de um escoamento compressível, temos que  $\lambda_2^{\mathbf{D}} = -\lambda_1^{\mathbf{D}} = \lambda^{\mathbf{D}}$  e a relação (2.66) pode ser reescrita como

$$(\lambda^{\mathbf{D}})^2 - \omega^2 \geq 0 \quad (2.67)$$

Se a condição de existência de uma solução para  $\theta$  for respeitada, esta solução também indica as autodireções do gradiente de velocidade, que possui autovalores iguais a  $\pm \left( (\lambda^{\mathbf{D}})^2 - \omega^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ . Supondo que os autovalores de  $\mathbf{D}$  girem com velocidade angular constante  $\omega'$ , conforme descrito pelos autores, é possível aplicar o mesmo argumento aplicado anteriormente na relação (2.67), somente trocando o termo  $\omega$  por  $(\omega - \omega')$ , ou seja, pela rotação relativa experimentada por um observador no sistema de coordenadas  $\{\xi_1^{\mathbf{D}}, \xi_2^{\mathbf{D}}\}$ , resultando, finalmente no critério  $Q_s$  particularizado para o caso de escoamento bidimensionais,  $Q_s$

$$Q_s = (\lambda^{\mathbf{D}})^2 - (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}')^2 \geq 0 \quad (2.68)$$

Esta forma remonta o critério de Astarita [16]. Ele propôs um critério para classificação de escoamentos, no contexto de fluidos viscoelásticos, baseado na razão

$$R_{\mathbf{D}} = \frac{w^2}{3a^2 + \epsilon^2} \quad (2.69)$$

Este número é análogo ao número de vorticidade proposto por Truesdell [23] para a vorticidade relativa. O critério para a identificação de estruturas vorticiais deve ser tal que  $Q_s \leq 0$ . Entretanto, Tabor e Klapper [4] ressaltam que, diferente dos casos bidimensionais, pode existir deformação local de filamentos em casos tridimensionais, mesmo que  $Q_s$  apresente valores negativos, pois em praticamente todos os tipos de escoamentos abrangidos pelas simplificações aplicadas na definição do operador  $Q_s$  o tensor gradiente de velocidade apresentará pelo menos um autovalor com a parte real positiva.

Os autores classificam  $Q_s$  como um quantificador do que entendem por “persistência de deformação”, ou seja, o quanto o efeito combinado da vorticidade e da rotação dos eixos principais da base formada pelos autovalores do tensor taxa de deformação é pequeno o suficiente de tal forma que permita que, localmente, filamentos materiais se alinhem com a direção principal de deformação dado pelo autovalor  $\lambda_1^{\mathbf{D}}$ . Para a descrição matemática deste conceito, o critério  $Q_s$ , parece ser bastante adequado pois este contabiliza o termo  $\boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{D}}$  e, conseqüentemente, o alinhamento de filamentos pode ser avaliado mesmo que os autovetores de  $\mathbf{D}$  se movimentem ao longo do tempo em relação a um referencial inercial. Considerações mais profundas a cerca do tema serão tecidas no capítulo 3.

Ainda no trabalho de Tabor e Klapper [4] uma variação do critério  $Q_s$  é proposta, com o objetivo de avaliar como a vorticidade tende a estirar-se e se alinhar com a direção de deformação intermediária  $\boldsymbol{\xi}_2^{\mathbf{D}}$  de tal forma que localmente

o escoamento se comporta como os casos bidimensionais, ou seja, a vorticidade aponta para a direção  $\boldsymbol{\xi}_2^{\mathbf{D}}$  e filamentos materiais rotacionam no plano  $(\boldsymbol{\xi}_1^{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\xi}_3^{\mathbf{D}})$ . Assim, a avaliação dessa persistência de deformação “bidimensional” é dada por

$$Q_{2-Ds} = (\lambda_1^{\mathbf{D}} - \lambda_3^{\mathbf{D}})^2 - \|\omega_2^D - \omega_2^{D'}\|^2 \quad (2.70)$$

Onde  $\omega_2^D$  e  $\omega_2^{D'}$  representam as componentes de  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\boldsymbol{\omega}'$  na direção  $\boldsymbol{\xi}_2^{\mathbf{D}}$ . Assim, valores positivos de  $Q_{2-Ds}$  indicam que a deformação de filamentos materiais ocorrerá no plano  $(\boldsymbol{\xi}_1^{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\xi}_3^{\mathbf{D}})$ .

Visto que o critério  $Q_s$  depende diretamente da rotação das direções principais de deformação, para que considerações sobre a influência de fenômenos associados a turbulência em fluidos sejam tecidas, torna-se necessária a avaliação de conceitos dinâmicos, relacionados aos termos da equação de Navier-Stokes. Uma vez que as autodireções  $\boldsymbol{\xi}_i^{\mathbf{D}}$  formam uma base ortonormal, temos uma expressão para o cálculo da taxa de rotação dos autovetores de  $\mathbf{D}$ . Esta é dada por

$$\left\langle \frac{d\xi_i^{\mathbf{D}}}{dt}, \xi_i^{\mathbf{D}} \right\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \xi_i^{\mathbf{D}} = \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{\xi}_i^{\mathbf{D}} \quad (2.71)$$

Onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o produto interno. Derivando com relação ao tempo a equação característica  $\mathbf{D}\xi_i^{\mathbf{D}} = \lambda_i^{\mathbf{D}}\xi_i^{\mathbf{D}}$  e aplicando na Eq. (2.71), temos que

$$\omega'_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\langle \xi_i^{\mathbf{D}}, \frac{d}{dt} \mathbf{D}\xi_i^{\mathbf{D}} \rangle}{\lambda_i^{\mathbf{D}} - \lambda_j^{\mathbf{D}}} \quad (2.72)$$

Aplicando o operador gradiente na equação de Navier-Stokes (2.48) e retirando a parte simétrica da derivada material, semelhante a operação aplicada na formulação do critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$ , obtemos

$$\frac{D}{Dt}(\mathbf{D}) - \nu \nabla^2 \mathbf{D} + \mathbf{W}\mathbf{W} + \mathbf{D}\mathbf{D} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{P} \quad (2.73)$$

Aplicando (2.72) em (2.73), temos, portanto,  $\boldsymbol{\omega}'$  para o caso particular de um fluido que obedece Navier-Stokes dado por

$$\omega'_k = \varepsilon_{ijk} \frac{-\omega_i \omega_j - (1/\rho) P_{ij} + \nu \nabla^2 D_{ij}}{\lambda \mathbf{D}^i - \lambda \mathbf{D}^j} \quad (2.74)$$

Onde os termos com subscrito “ij” representam a projeção dessas entidades vetoriais e tensoriais nas direções principais da taxa de deformação, ou seja,  $\omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\xi}_i^{\mathbf{D}}$ ,  $P_{ij} = \boldsymbol{\xi}_i^{\mathbf{D}} \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_j^{\mathbf{D}}$  e  $\nabla^2 D_{ij} = \boldsymbol{\xi}_i^{\mathbf{D}} \nabla^2 \mathbf{D} \boldsymbol{\xi}_j^{\mathbf{D}}$ . Visto que os termos na Eq. (2.74) se encontram separados, podemos reescrever a mesma da seguinte forma

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}'_{\omega} + \boldsymbol{\omega}'_{\mathbf{P}} + \boldsymbol{\omega}'_{\nu} \quad (2.75)$$

Onde  $\boldsymbol{\omega}'_{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\omega}'_{\mathbf{P}}$ ,  $\boldsymbol{\omega}'_{\nu}$  representam as contribuições da vorticidade, da pressão e da dissipação viscosa na rotação das direções principais de deformação. Assim, por consequência da dependência de  $\boldsymbol{\omega}'$  com  $\boldsymbol{\omega}$ , temos que o termo  $\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}'\|^2$  da Eq. (2.76) constitui um termo não-linear de rotação na descrição do critério  $Q_s$  e que têm grande relevância, visto a dependência quadrática com  $\boldsymbol{\omega}$ .

O parâmetro  $Q_s$  constitui um critério promissor, pois, além de incorporar em sua formulação a possibilidade de quantização da persistência da deformação, a avaliação da influência de entidades dinâmicas, extraídas da equação de Navier-Stokes e da previsão do alinhamento e deformações de filamentos materiais em escoamentos turbulentos torna-se possível, no que diz respeito à descrição do comportamento da rotação das direções principais de deformação. Além disso, o critério é invariante a transformações euclidianas, o que o qualifica a identificar estruturas vorticiais, sem qualquer influência do movimento do observador nas quantidades identificadas.

Entretanto, o critério é fundamentado sobre a simplificação do escoamento ocorrer a volume constante, pois a soma dos autovalores de  $\mathbf{D}$  necessariamente têm de ser igual à zero. Haller [14] levanta uma questão interessante que é o fato de que este operador foi construído com base em análises bidimensionais, deixando sua aplicação tridimensional ainda por ser interpretada. Para escoamentos tridimensionais o operador  $Q_s$  pode ser reescrito como

$$Q_s = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^{\mathbf{D}}) - \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}'\|^2 = \|\mathbf{D}\|^2 - \|\mathbf{W} - \boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{D}}\|^2 \quad (2.76)$$

Onde  $\boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{D}}$  representa o vetor  $\boldsymbol{\omega}'$  escrito na sua forma tensorial ( $\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{ij}^{\mathbf{D}}$ ). Uma definição de vórtices deve identificar e descrever a evolução de estruturas vorticais para qualquer tipo de escoamento, sem distinção.

#### 2.4.9 Critérios Propostos por Zhou et al. [5], Chakraborty et al. [6] e Wu et al. [7]

O tensor gradiente de velocidade  $\nabla \mathbf{v}$ , quando decomposto com base em seus autovalores e autovetores, em coordenadas cartesianas de acordo com a relação, resulta em um tensor que mantém os mesmos invariantes  $Q$ ,  $R$  e  $P$ , visto que a base formada pelos autovetores de  $\nabla \mathbf{v}$  não necessariamente é ortogonal. Podemos representar esse tensor quando este admite autovalores complexos,

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_r^{\nabla \mathbf{v}} & \boldsymbol{\xi}_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} & \boldsymbol{\xi}_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_r^{\nabla \mathbf{v}} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} & \lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} \\ 0 & -\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} & \lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_r^{\nabla \mathbf{v}} & \boldsymbol{\xi}_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} & \boldsymbol{\xi}_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.77)$$

onde  $\lambda_r^{\nabla \mathbf{v}}$  representa o autovalor real associado ao autovetor real  $\boldsymbol{\xi}_r^{\nabla \mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} \pm \lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}i$  representam os autovalores complexos associados aos autovetores complexos  $\boldsymbol{\xi}_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} \pm \boldsymbol{\xi}_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}i$ . As linhas de corrente locais podem ser expressas, em um sistema de coordenadas curvilíneas  $(x_{c1}, x_{c2}, x_{c3})$  definido pelos na base dos vetores  $\{\boldsymbol{\xi}_r^{\nabla \mathbf{v}}, \boldsymbol{\xi}_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}, \boldsymbol{\xi}_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}\}$ , de acordo com as funções

$$x_{c1} = C_1 \exp(\lambda_r^{\nabla \mathbf{v}} t) \quad (2.78)$$

$$x_{c2} = [C_2 \cos(\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} t) + C_3 \sin(\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} t)] \exp(\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} t) \quad (2.79)$$

$$x_{c3} = [C_3 \sin(\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} t) - C_2 \cos(\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} t)] \exp(\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} t) \quad (2.80)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são constantes. A Fig. 2.11 apresenta a topologia dessas linhas de corrente. Novamente, a idéia de rotação disposta somente no plano definido pelos vetores  $\boldsymbol{\xi}_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}$  e  $\boldsymbol{\xi}_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  é comprovada. É importante ressaltar que o plano de rotação do fluido, definido por  $\boldsymbol{\xi}_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}$  e  $\boldsymbol{\xi}_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$ , não é coincidente com o plano definido pelo vetor vorticidade. Com base nessas conclusões, Zhou et al. [5] propuseram a avaliação de vórtices como regiões conexas com concentração local de  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$ . Este critério é semelhante ao critério proposto por Chong et al. [1], (critério  $\Delta$ ) na medida em que  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} = 0 \rightarrow \Delta = 0$ . Entretanto, este novo critério utiliza um valor de referência a partir do qual determinada região pode ser considerada como uma região vortical. Matematicamente, é definido, portanto, por  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} \geq \alpha$ .

Uma vantagem apontada pelo autores é a de que, assim como no critério  $\Delta$ , o critério  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  não identifica regiões vorticais em escoamentos cisalhantes, com grande concentração de vorticidade, mas sem movimento vortical. Uma outra vantagem do critério é que, por depender de um valor de referência e não de uma condição restrita (no caso de  $\Delta > 0$ , por exemplo), o mesmo identifica não só estruturas vorticais, mas também quantifica a intensidade de rotação, uma vez que é possível concluir que o período de rotação dessas linhas de corrente é dado pela parte imaginária do autovalor de  $\nabla \mathbf{v}$ , pois  $p = 2\pi/\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  e identifica o plano de movimento vortical, ou seja, normal ao eixo do vórtice identificado. O critério, apesar de ser invariante a transformações galileanas, não é objetivo, ou seja, invariante a transformações rígidas nos observadores como rotações ou acelerações de translação. Além disso, o critério sofre os mesmos problemas apontados na seção 2.4.4 para um escoamento representativo de um tornado. Por fim, a escolha de um patamar aceitável, a partir do qual pode-se identificar estruturas vorticais é consideravelmente subjetivo e pode acarretar na filtragem de estruturas importantes ou na identificação de ruídos. Outra desvantagem deste patamar subjetivo é que ele varia de problema para problema, dificultando a aplicação *a priori* e

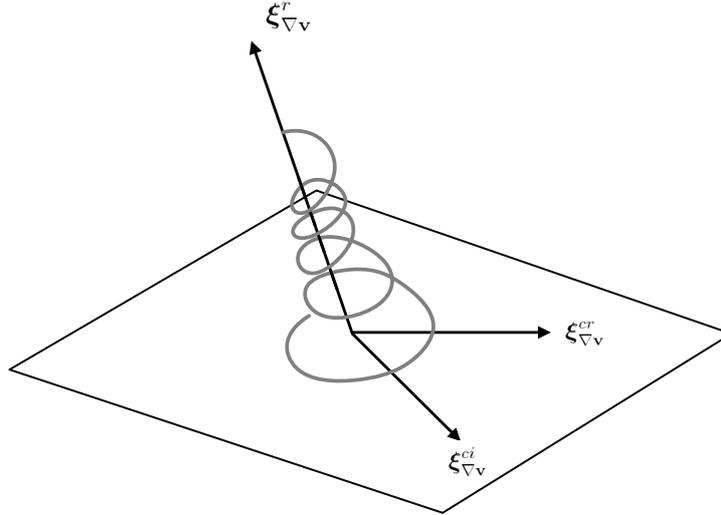


Fig. 2.11: Linhas de corrente locais em relação aos autovetores do gradiente de velocidades  $\nabla \mathbf{v}$ .

obrigando um conhecimento prévio do problema. Desta forma, é questionável quais seriam os benefícios de se ter um critério como este, visto que um dos objetivos do mesmo seria ajudar a conhecer o próprio problema.

Chakraborty et al. [6] propuseram uma complementação ao critério  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  baseando-se na compactação das órbitas não-locais avaliadas localmente em escoamentos tipicamente permanentes. Baseados no trabalho de Chong et al. [1], os autores avaliam duas partículas presentes no plano  $(\xi_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}, \xi_{ci}^{\nabla \mathbf{v}})$  que inicialmente se encontram distantes de  $r_0$  e que, após realizarem  $n$  revoluções, se encontram em uma distância cuja projeção no plano  $(\xi_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}, \xi_{ci}^{\nabla \mathbf{v}})$ ,  $r_f$  dada pela relação

$$\frac{r_f}{r_0} = \exp\left(2\pi n \frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}\right) \quad (2.81)$$

A partir da Eq. (??) é possível verificar que a distância  $r_f$  depende exponencialmente de  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$ , ou seja, a medida que essa relação tende a valores positivos crescente a distância entre duas partículas tende a aumentar e, conseqüentemente, quando essa relação tende a valores negativos, a distância tende a diminuir em relação a distância inicial  $r_0$ . Assim, é possível considerar a relação  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$  como uma medida da compactidade local das órbitas de partículas materiais no plano  $(\xi_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}, \xi_{ci}^{\nabla \mathbf{v}})$ . Sabendo que regiões vorticiais são necessariamente regiões cu-

jas partículas mantêm órbitas compactas, a relação  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}}$  pode ser usada também como avaliadora do sentido de rotação dessas trajetórias, se realizada de forma convergente ou divergente e sua tendência de aumento  $\left(\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}} < 0\right)$  ou diminuição  $\left(\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}} > 0\right)$  da compacidade dessas órbitas. O caso  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}} = 0$  resulta na manutenção da distância relativa ao longo de todas as revoluções, ou seja, um caso de movimento circular perfeito entre as partículas.

A partir de um mesmo valor de  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  é possível chegar a diferentes valores para a relação  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}}$ , o que evidencia que, apesar do período de rotação se manter o mesmo no plano  $(\xi_{cr}^{\nabla v}, \xi_{ci}^{\nabla v})$  em dois casos distintos, quanto mais próximo de zero for a relação  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}}$ , menor será a curvatura das linhas de corrente e, conseqüentemente segundo os autores, mais longe se encontra essa topologia de uma região vortical. A medida que o critério  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}}$  a valores cada vez mais negativos, as linhas de corrente tendem a convergir, em movimento vortical, com maior rapidez no plano  $(\xi_{cr}^{\nabla v}, \xi_{ci}^{\nabla v})$  e, em escoamento incompressíveis, na direção  $\xi_r^{\nabla v}$ , as órbitas tendem a divergir, pois  $\lambda_r^{\nabla v} = -2\lambda_{cr}^{\nabla v}$ . Assim, o critério  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}}$  permite a separação de estruturas vorticais onde a compacidade das órbitas é observada somente no plano  $(\xi_{cr}^{\nabla v}, \xi_{ci}^{\nabla v})$  daquelas cuja compacidade é também observada na direção  $\xi_r^{\nabla v}$ , permitindo uma análise quanto a classificação do tipo de estrutura vortical identificada.

Portanto, Chakraborty et al. [6] dividem o critério em dois tipos. Quando a compacidade das órbitas é desejada somente no plano  $(\xi_{cr}^{\nabla v}, \xi_{ci}^{\nabla v})$ , temos que o critério deve seguir os requisitos

1.  $\lambda_{ci}^{\nabla v} \geq \alpha$ ;
2.  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}} \leq \beta$ .

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são valores constantes positivos e avaliados a cada caso. Quando a compacidade das órbitas é desejada não somente no plano  $(\xi_{cr}^{\nabla v}, \xi_{ci}^{\nabla v})$ , mas também ao longo da direção  $\xi_r^{\nabla v}$ , os requisitos são alterados para

1.  $\lambda_{ci}^{\nabla v} \geq \alpha$ ;

$$2. -\gamma \leq \frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}} \leq \beta.$$

onde  $\gamma$  é um valor constante positivo e geralmente referenciado, quando não existe a necessidade de diferenciação da compacidade, como  $\frac{\beta}{2}$ , devido a relação entre o autovalor real ( $\lambda_r^{\nabla\mathbf{v}}$ ) e a parte real do autovalor complexo ( $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}$ ). Com o objetivo de associar os critérios  $\Delta$ ,  $Q$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$  com o critério proposto por Chakraborty et al. [6], os autores reescrevem esses critérios como funções dos parâmetros  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}}$  e  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ . Isso é possível por que os critérios se baseiam nos invariantes do tensor gradiente de velocidades e esses invariantes podem ser reescritos com base nos autovalores desse tensor, com a excessão direta do critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ . O critério proposto por Hunt et al. [2] (critério  $Q$ ) para escoamentos incompressíveis pode ser definido de acordo com a relação

$$Q = (\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}})^2 \left[ 1 - 3 \left( \frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}} \right)^2 \right] \quad (2.82)$$

De acordo com a Eq. (2.82), para que o critério seja atendido ( $Q > 0$ ), torna-se necessário que  $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ , ou seja, existe um controle da compacidade das órbitas tanto no plano ( $\xi_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}, \xi_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ ) quanto ao longo da direção  $\xi_r^{\nabla\mathbf{v}}$ . Pode-se observar, no entanto, que não há restrição de patamar para  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ , ou seja, basta que  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}} \neq 0$ . Além disso, é possível concluir que o critério  $Q$ , por possuir um limite inferior, não captura estruturas vorticiais em uma zona onde as linhas de corrente apresentam topologia espiral convergente com curvatura acima de um determinado limite, ou seja, quando essa convergência ocorre mais “rapidamente”.

Reescrevendo o critério  $\Delta$ , proposto por Chong et al. [1], como função da parte imaginária do autovalor complexo ( $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ ) e da razão de compacidade  $\left(\frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}}\right)$ , temos que

$$\Delta = \frac{(\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}})^6}{27} \left[ 1 + 9 \left( \frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}} \right)^2 \right]^2 \quad (2.83)$$

Conforme avaliado no início da seção, o critério  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ , proposto por Zhou et al. [5], se baseia no critério proposto por Chong et al. [1], fato que se comprova na

relação (2.83), pois para que o critério seja atendido ( $\Delta > 0$ ), necessariamente  $\lambda_{ci}^{\nabla v} > 0$ , visto que o termo entre colchetes sempre será positivo e maior que zero. Por conseguinte, a condição  $\Delta = 0$  é idêntica a  $\lambda_{ci}^{\nabla v} = 0$ . Entretanto, o critério  $\Delta$  não distingue diferenças na magnitude dos parâmetros  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}}$ , ou seja, regiões de grande velocidade angular, mas com curvatura mais suave das linhas de corrente são identificadas da mesma maneira pelo critério  $\Delta$  que regiões de menor velocidade angular, mas com curvatura relativamente mais acentuada. Para valores baixos da relação de compacidade  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}}$ , temos que

$$\frac{\Delta}{(\lambda_{ci}^{\nabla v})^6} \cong \frac{1}{27} + \frac{2}{3} \left( \frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}} \right)^2 \quad (2.84)$$

ou seja, a relação  $\frac{\Delta}{(\lambda_{ci}^{\nabla v})^6}$  atinge o menor valor de  $1/27$  quando as linhas de corrente são perfeitamente circulares, ou seja, quando  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}} = 0$ . O critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$ , proposto por Jeong e Hussain [3] não pode ser escrito com base nos autovalores de  $\nabla v$  e, portanto, não existe relação direta entre esse critério e aqueles propostos por Zhou et al. [5] e Chakraborty et al. [6]. Entretanto, esses autores relacionaram esses critérios separadamente, baseados em todas as possíveis configurações de  $\nabla v$  para escoamentos incompressíveis. Avaliando o escoamento na base dos autovetores do tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$  (dado pelos versores  $\{\boldsymbol{\xi}_1^{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\xi}_2^{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\xi}_3^{\mathbf{D}}\}$ ), que, devido ao fato deste tensor ser simétrico, forma uma base ortogonal e sabendo que seus autovalores são tais que  $\lambda_1^{\mathbf{D}} \geq \lambda_2^{\mathbf{D}} \geq \lambda_3^{\mathbf{D}}$  e  $\lambda_1^{\mathbf{D}} + \lambda_2^{\mathbf{D}} + \lambda_3^{\mathbf{D}} = 0$  (escoamento incompressível), temos que os tensores  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{W}$  podem ser reescritos nesta nova base, quando  $\lambda_1^{\mathbf{D}} \geq -\lambda_3^{\mathbf{D}}$ , como

$$\mathbf{D} = \lambda_1^{\mathbf{D}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\zeta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\zeta}{2} - 1 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -a \sin \theta \sin \phi & a \sin \theta \cos \phi \\ a \sin \theta \sin \phi & 0 & -a \cos \phi \\ -a \sin \theta \cos \phi & a \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & -a \sin \theta \sin \phi & a \sin \theta \cos \phi \\ -a \sin \theta \sin \phi & -\frac{\zeta}{2} & -a \cos \theta \\ -a \sin \theta \cos \phi & a \cos \theta & \frac{\zeta}{2} - 1 \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

onde  $\zeta$  representa o parâmetro que permite a classificação da natureza do campo de deformações,  $a = \frac{\|\boldsymbol{\omega}\|}{2\lambda_1^D}$  e os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  determinam a orientação do vetor vorticidade  $\boldsymbol{\omega}$  com a base avaliada nesse caso, de acordo com a Fig. 2.12. No caso em que  $\lambda_1^D \geq -\lambda_3^D$ , o estado de compressão no escoamento é encontrado no plano  $(\boldsymbol{\xi}_2^D, \boldsymbol{\xi}_3^D)$ , enquanto que, por se tratar de um escoamento incompressível, existe esticamento no escoamento na direção  $\boldsymbol{\xi}_1^D$  (escoamento convergente) e  $0 \leq \zeta \leq 1$ , onde  $\zeta = 0$  corresponde a deformação unicamente no plano  $(\boldsymbol{\xi}_1^D, \boldsymbol{\xi}_3^D)$  e  $\zeta = 1$  corresponde a deformação axissimétrica com relação a direção  $\boldsymbol{\xi}_1^D$ , visto que essa sempre apresenta valores positivos associados ao seu autovalor.

Nos casos em que  $\lambda_1^D < -\lambda_3^D$ , existe estiramento no plano  $(\boldsymbol{\xi}_2^D, \boldsymbol{\xi}_3^D)$  e compressão na direção  $\boldsymbol{\xi}_1^D$  (escoamento divergente) e  $-1 \leq \zeta \leq 0$ , onde  $\zeta = -1$  representa um estado de deformação divergente axissimétrico com o eixo na direção  $\boldsymbol{\xi}_3^D$ . Portanto, existe uma mudanças nas direções principais de deformação e as descrições para os tensores vorticidade e taxa de deformação apresentados nas relações (2.85) e (2.86) devem ser devidamente alteradas. Entretanto esses casos não serão relatados no presente trabalho, pois, pelo incompressibilidade do escoamento, é possível demonstrar que, quando  $\zeta < 0$ , os autovalores  $\lambda_1^D, \lambda_1^D$  e  $\lambda_3^D$  para são iguais, em módulo, aos autovalores  $\lambda_3^D, \lambda_2^D$  e  $\lambda_1^D$ , respectivamente quando  $\zeta \geq 0$ , ou seja, é necessário avaliar somente essa última configuração. É interessante observar que, quando se escolhe a base dos autovetores de  $\mathbf{D}$  para a descrição do problema, a vorticidade coincide com a vorticidade relativa, ou seja,  $\mathbf{W} = \overline{\mathbf{W}} - \boldsymbol{\Omega}^D$

Chakraborty et al. [6] utilizam o número de vorticidade, criado por Truesdell [23], como um outro parâmetro de varredura das possíveis configurações do tensor

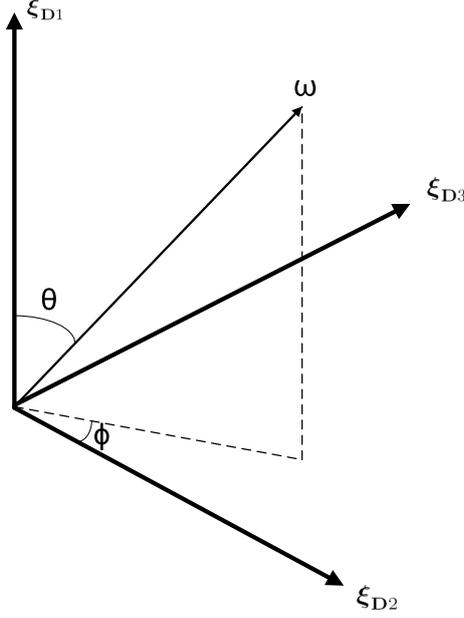


Fig. 2.12: Orientação do vetor vorticidade  $\omega$  com relação ao sistema de coordenadas da base canônica de  $\mathbf{D}$

gradiente de velocidades. Para as situações onde  $0 \leq \zeta \leq 1$ , temos que o número de vorticidade é dado por

$$\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{\frac{\zeta^2}{2} - \zeta + 2}} \quad (2.88)$$

Assim, considerando os limites,  $0 \leq \frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|} \leq \infty$ ,  $0 \leq \zeta \leq 1$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , todas as configurações possíveis em escoamentos incompressíveis do tensor gradiente de velocidades são passíveis de serem avaliadas e, conseqüentemente, as situações onde  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} < 0$  poderiam ser comparadas com regiões  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} > 0$ ,  $Q > 0$ , e com a variação de  $\frac{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$ . Visto que segundo invariante de  $\nabla \mathbf{v}$ ,  $Q$ , depende somente das normas euclidianas dos tensores taxa de deformação e vorticidade, este não varia com os ângulos  $\theta$  e  $\phi$ . Obtendo o determinante da matriz (2.87), é possível determinar que a forma de dependência do terceiro invariante,  $R$ , em relação aos ângulos  $\theta$  e  $\xi$  é através de uma variável  $\psi$ , dada por

$$\psi = \frac{3 \cos(2\theta) - 2(\zeta - 1) \cos(2\phi) \sin^2 \theta - (2\zeta - 5)}{2(4 - \zeta)} \quad (2.89)$$

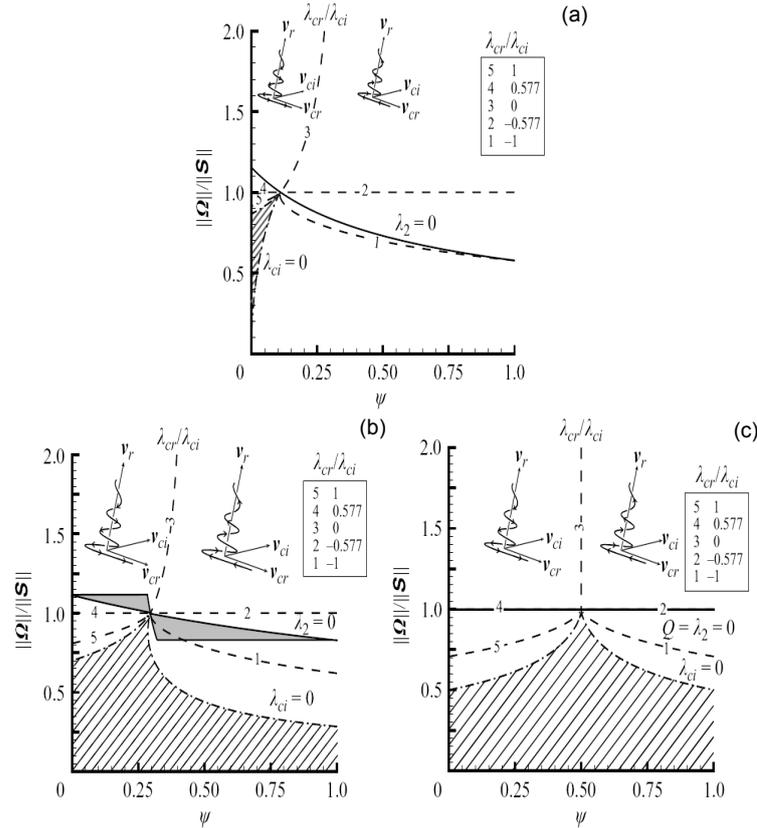


Fig. 2.13: Região vortical no espaço  $(\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|}, \psi)$  para valores constantes de  $\zeta = 1$  (a),  $\zeta = 0.5$  (b),  $\zeta = 0$  (c). Os contornos representam:  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}} = 0$  (linha traço-ponto),  $\lambda_2^{\nabla\mathbf{D}+\nabla\mathbf{W}} = 0$  (linha contínua),  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}}$  (linha tracejada).

e, portanto, os autovalores do gradiente de velocidades dependem somente de  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|}$ ,  $\zeta$  e  $\psi$ , sendo que este último varia, pela relação (2.89) e pelos intervalos apresentados anteriormente, entre zero e um. A Fig. 2.13, apresenta uma reprodução dos gráficos apresentados por Chakraborty et al. [6], onde são visualizados contornos de  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}}$ , como função dos parâmetros  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|}$  e  $\psi$  para três situações características de  $\zeta = 1$  (Fig. 2.13 (a) - escoamento axissimétrico com convergência radial),  $\zeta = 0.5$  (Fig. 2.13 (b)) e  $\zeta = 0$  (Fig. 2.13 (c) - estado de deformação planar). A região cujo gradiente de velocidades,  $\nabla\mathbf{v}$ , apresenta valores reais se encontra hachurada.

#### 2.4.9.1 Escoamentos com $\zeta = 1$

No caso de escoamento axissimétrico com convergência radial ( $\zeta = 1$ ), a convergência ocorre no plano  $(\xi_2^D, \xi_3^D)$ , enquanto que o eixo, onde ocorre divergência,

por consequência da compressibilidade, se encontra alinhado com a direção  $\xi_1^D$ . Nessa situação,  $\psi = \cos^2 \theta$ , logo, os resultados são independentes de  $\phi$ . Avaliando o gráfico (a) da Fig. 2.13, observamos que a zona hachurada, que representa autovalores do gradiente de velocidades reais, divide a região dentro do intervalo  $0 \leq \psi \leq 0,12$ , em duas regiões que contemplam autovalores complexos a  $\nabla \mathbf{v}$ . Conforme denotado por Chakraborty et al. [6] essa região possui comportamento peculiar, pois, para valores muito pequenos de  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|}$ , são observadas regiões vorticais pelos operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  (e, conseqüentemente, o critério  $\Delta$ ) e  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$ . Entretanto, a medida que os valores de  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|}$  crescem, essa região vortical não é mais observada ( $\nabla \mathbf{v}$  apresenta autovalores reais) e, novamente, após um determinado valor de  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|}$ , vórtices são reconhecidos por esses critérios. Esse comportamento, no âmbito da formulação dos critérios e de sua dependência com a vorticidade, pode ser denotada uma falha que os autores o classificam como um caso de “desaparecimento de vórtices”. Nesse tipo de situação, abaixo da região hachurada, o vetor normal ao plano de movimento rotacional experimentado pelas linhas de corrente (plano  $(\xi_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}, \xi_{ci}^{\nabla \mathbf{v}})$ ) se encontra próximo a ortogonalidade com o vetor vorticidade, enquanto que, na região acima da área hachurada, esses vetores tendem a se alinhar. Os autores indicam que a restrição  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}} \geq -\beta$ , onde  $\beta$  é um valor positivo, pode eliminar o problema de identificação de estruturas vorticais, quando, localmente, o escoamento se encontra na região abaixo da área hachurada no intervalo  $0 \leq \psi \leq 0,12$ .

Quando a vorticidade se encontra perfeitamente alinhada com a direção axial de deformação,  $\xi_1^D$ , ou seja,  $\psi = 1$ , o limite  $\lambda_2^{D^2+W^2} = 0$  corresponde a  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}} = -1$  e  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|} \approx 0,58$ . A medida que o alinhamento é desfeito, aumentando o valor de  $\theta$  (ou diminuindo  $\psi$ ), o critério  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$  e a linha correspondente a  $\lambda_2^{D^2+W^2} = 0$  tendem a aumentar: para  $\phi \approx 0,12$ , temos que  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}} \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}$  e  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|} \rightarrow 1$ . No intervalo  $0,12 \leq \psi \leq 1$ , a região de  $Q > 0$  somente é atendida para valores de  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|}$  maiores que a unidade, enquanto que a região  $\lambda_2^{D^2+W^2} < 0$  se encontra acima do contorno de  $\lambda_2^{D^2+W^2} = 0$ , o que leva a conclusão que o critério  $Q > 0$  é mais restritivo que

o critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2} = 0$  nessa região. O ponto  $\psi \approx 0,12$  e  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|} = 1$ , corresponde ao caso onde os três autovalores do gradiente de velocidades é nulo e, nessa região o critério  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}}$  é indeterminado. Finalmente, na região onde  $0 \leq \psi \leq 0,12$  é possível observar que a inflexão da curva  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\nabla\mathbf{W}^2} = 0$  se encontra acima da região  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|} = 1$  e, conseqüentemente, o critério  $Q > 0$  é menos restritivo que o critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ . Essa última região corresponde a valores positivos de  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}}$  que ao longo do intervalo de  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  até aproximadamente 0.4

#### 2.4.9.2 Escoamentos com $\zeta = 0.5$

Nesse caso, o estado de deformação não é nem axissimétrico nem planar. O caso de desaparecimento de vórtices (para  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}} = 0$  ou  $\Delta > 0$ ) continua acontecendo no intervalo de  $0.28 \leq \psi \leq 0.31$ . A inclusão de uma restrição do tipo  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}} \geq -\beta$  evita essa oscilação. Como, nessa situação, diferentes configurações de  $\theta$  e  $\phi$  podem avaliar um mesmo valor para  $\psi$ , é possível concluir que, para um mesmo valor de  $\psi$ , os contornos de  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2} = 0$  cobrem um intervalo de valores de  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|}$  e, conseqüentemente, de  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}}$ , o que explica a região marcada na Fig. 2.13 (b).

Na região de alinhamento entre a vorticidade e o vetor normal ao plano de movimento rotacional das linhas de corrente, ou seja,  $\psi = 1$ ,  $\theta = 0$ , e esta é independente de  $\phi$ . Nessa região,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2} = 0$ , corresponde a  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}} \approx -0,78$  e  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Na região  $0,31 \leq \psi \leq 1$ , a região  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2} < 0$  corresponde ao intervalo  $-1,3 \leq \frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}} < -\frac{1}{\sqrt{3}}$  e é menos restritiva que a região do critério  $Q > 0$ . O ponto  $\psi \approx 0,31$  e  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|} = 1$  corresponde ao caso onde os autovalores de  $\nabla\mathbf{v}$  são nulos, conseqüentemente,  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}}$  é indeterminado nesse ponto. Assim como na seção anterior, no intervalo anterior a essa inflexão no comportamento da relação de compacidade, ou seja, no intervalo  $0 \leq \psi \leq 0,31$ , o critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2} < 0$  é mais restritivo que o critério  $Q > 0$  e corresponde ao intervalo  $0,3 \leq \frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$

### 2.4.9.3 Escoamentos com $\zeta = 0$

Nesse caso, o estado de deformação é planar, presente no plano  $(\boldsymbol{\xi}_1^{\mathbf{D}}, \boldsymbol{\xi}_3^{\mathbf{D}})$ . Como é possível observar no gráfico correspondente da Fig. 2.13, o caso de desaparecimento de vórtices não é possível de ser encontrado e a relação de compacidade  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$  não necessitaria de uma restrição como disposto nos casos anteriores. Ainda nesse caso, todo o intervalo de  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} = 0$  se encontra associado a um único valor de  $\left| \frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$  e  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|} = 1$ . A região de inflexão de  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$  é encontrado para  $\psi = 0,5$  e  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|} = 1$ . Nesse caso, é comum a denominação de escoamento viscométrico.

A principal conclusão do que foi visto nas seções 2.4.9.1-5.1.1 é a de que diversos valores de  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$  estão associados ao critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} < 0$  e não é possível determinar uma correlação analítica entre os dois critério. Entretanto, o intervalo de variação da relação de compacidade associado ao critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} < 0$  é  $-O(1) \leq \frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}} \leq O(1)$ . Além disso, alguns problemas do critério emergem desse estudo. Algumas situações onde o critério formado pelos operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  e  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$  apresenta um ponto de inflexão e este é indeterminado e a necessidade de um limite inferior para o critério para o caso de desaparecimento de vórtices são exemplos de situações que limitam a utilização do critério sem um estudo prévio de como o escoamento está relacionado com os casos apresentados na Fig. 2.13. Outro fato é a importância do parâmetro  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|}$  na identificação de vórtices é que todos os critérios concordam na identificação de estruturas vorticais na região onde o número de vorticidade é maior que a unidade e as eventuais diferenças são envidenciadas na região  $\frac{\|\mathbf{W}\|}{\|\mathbf{D}\|} < 1$ .

### 2.4.9.4 Escoamentos com autodireções ortonomais do gradiente de velocidades

Quando o gradiente de velocidades apresenta autovetores  $(\boldsymbol{\xi}_r^{\nabla \mathbf{v}}, \boldsymbol{\xi}_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}, \boldsymbol{\xi}_{ci}^{\nabla \mathbf{v}})$  ortonomais, ou seja, quando este é um tensor normal  $((\nabla \mathbf{v}) \cdot (\nabla \mathbf{v})^T = (\nabla \mathbf{v})^T \cdot (\nabla \mathbf{v}))$ , um escoamento tipicamente extensional,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  pode ser expressado com função

dos autovalores de  $\nabla \mathbf{v}$ , de acordo com a expressão

$$\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} = (\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}})^2 \left[ \left( \frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}} \right)^2 - 1 \right] \quad (2.90)$$

Como é possível observar pela Eq. (2.90), o critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} < 0$  é equivalente a  $\left| \frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}} \right| < 1$ . Nos 3 casos apresentados nas seções 2.4.9.1-5.1.1, o critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  para o caso especial de autovetores ortonormais para o gradiente de velocidades é menos restritivo que o critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  original, visto que sua representação está diretamente associada aos contornos de  $\left| \frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}} \right| = 1$ . Cabe ressaltar, entretanto, que esse tipo de situação só pode ocorrer em três situações: em alguns escoamentos compressíveis, em escoamentos onde a vorticidade é nula e em escoamentos onde o gradiente de velocidades se constitui da seguinte forma

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\mathbf{D}} & -w & 0 \\ w & \lambda_1^{\mathbf{D}} & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda_1^{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

De acordo com Wu et al. [7], que também associa os critérios  $Q$ ,  $\Delta$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  aos parâmetros  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$  e  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$ , discute a importância do primeiro termo na identificação de vórtices, afirmando que este não é um parâmetro onde deve ser impostas limites para a identificação de estruturas vorticais, visto que esse parâmetro indica o quão rápido as linhas de corrente em movimento rotacional no plano  $(\boldsymbol{\xi}_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}, \boldsymbol{\xi}_{ci}^{\nabla \mathbf{v}})$  tendem a convergir ou divergir, de acordo com o sinal da razão de compacidade. Entretanto, como foi apresentado nos itens 2.4.9.1-5.1.1, o caso de desaparecimento de vórtices constitui um problema na identificação de estruturas vorticais com o critério  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$ , visto que o mesmo atinge valores negativos, relativamente altos em módulo, em uma região onde o movimento vortical não é evidenciado, nem mesmo pelos critérios  $Q$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$ . Assim, torna-se necessário pelo menos um limite inferior negativo para que o critério possa ser utilizado como identificador de estruturas vorticais.

Assim como critério  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} > 0$ , o operador  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$  não é objetivo e, apesar de

sua formulação ser facilmente aplicada para escoamentos compressíveis, o estudo aplicado ao caso de desaparecimento de vórtices torna-se muito mais complexo de ser estudado, visto que o gradiente de velocidades para os casos  $\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$  não mais depende dos mesmos parâmetros apresentados anteriormente nessa seção e que culminaram no estudo apresentado em 2.4.9.1-5.1.1.

#### 2.4.10 Critério Proposto por Kida e Miura [8]

Seja um ponto arbitrário do escoamento  $(x_1, x_2, x_3)$ , representado por um sistema de coordenadas ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  que se move com a velocidade do escoamento no ponto referenciado. Na vizinhança deste ponto, temos que a projeção da velocidade no plano  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  é dada por

$$v_1 = L_{11}x_1 + L_{12}x_2 \quad (2.92)$$

$$v_2 = L_{21}x_1 + L_{22}x_2 \quad (2.93)$$

Onde  $\mathbf{L} = (\nabla \mathbf{v})$ . Se o plano  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  coincidir com o plano que define a topologia do escoamento por meio da estrutura das linhas de corrente (como o caso do plano  $(\boldsymbol{\xi}_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}, \boldsymbol{\xi}_{ci}^{\nabla \mathbf{v}})$  discutido na seção anterior), a estrutura das linhas de corrente será função do discriminante da equação característica do segundo grau do tensor formado por  $L_{ij}$  nas Eqs. (2.92) e (2.93) e dado pela relação

$$G = \frac{1}{4}(L_{11} - L_{22})^2 + L_{12}L_{21} \quad (2.94)$$

A estrutura topológica das linhas de correntes será espiral se  $G$  for negativo, o que resulta em autovalores complexos e que se assemelham a representação disposta na Fig. 2.11. Em escoamentos bidimensionais incompressíveis,  $L_{11} + L_{22} = 0$  e  $G = -Q = -\frac{1}{2}\nabla^2 p$  e os parâmetros  $G$ ,  $\Delta$ ,  $Q$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  são equivalentes. Extendendo a condição de rotação das linhas de corrente,  $G$  para um plano de orientação arbitrária, temos que, aplicando uma mudança de sis-

temas de coordenadas a partir da rotação na direção  $\mathbf{e}_3$  por um ângulo  $\phi$ , de cuja variação  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  e de uma segunda rotação em relação a nova direção  $\mathbf{e}_2$  de  $\theta$ , com  $0 \leq \theta \leq \pi$ . O tensor  $L'_{ij}$ , no sistema de coordenadas  $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$  é expresso, portanto, por

$$\nabla \mathbf{v}' = \mathbf{M} \nabla \mathbf{v} \mathbf{M}^T \quad (2.95)$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

e, finalmente, o parâmetro  $G$  pode ser expresso no novo plano  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$  como

$$\begin{aligned} G(\theta, \phi) &= \frac{1}{4}(L'_{11} - L'_{22})^2 + L'_{12}L'_{21} \\ &= \frac{1}{4}[(\cos^2 \theta \cos^2 \phi - \sin^2 \phi)L_{11} + (\cos^2 \theta \sin^2 \phi - \cos^2 \phi)L_{22} + (\sin^2 \theta)L_{33} \\ &\quad + (\cos^2 \theta + 1) \sin \phi \cos \phi (L_{12} + L_{21}) - \sin \theta \cos \theta \sin \phi (L_{23} + L_{32}) \\ &\quad - \sin \theta \cos \theta \cos \phi (L_{31} + L_{13})]^2 \\ &\quad + [\cos \theta \cos \phi \sin \phi (L_{22} + L_{11}) + \frac{1}{2} \cos \theta (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) (L_{12} + L_{21}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \phi (L_{23} + L_{32}) + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \phi (L_{31} + L_{13})]^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} [\cos \theta (L_{12} + L_{21}) + \sin \theta \cos \phi (L_{23} + L_{32}) \\ &\quad + \sin \theta \sin \phi (L_{31} + L_{13})]^2 \end{aligned} \quad (2.97)$$

Assim, qualquer direção normal a plano  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$  que se encontra rotacionado de dois ângulos  $\theta$  e  $\phi$  pode ser escrito com base no sistema de coordenadas originais do escoamento  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Fica clara que a escolha da direção está associada ao encontro de linhas de correntes espiraladas e que, caso essa direção não seja dada pelo produto vetorial da parte real e imaginária do autovetor complexo do

gradiente de velocidades, o plano avaliado não será aquele principal de rotação, mesmo que  $G(\theta, \phi) < 0$ . Entretanto, essa proposta de critério permite que outras direções sejam observadas com relação ao comportamento do parâmetro  $G$ . Um exemplo desse estudo foi proposto no trabalho numérico de Kida e Miura [8], onde essa direção está associada ao terceiro autovetor da Hessiana da pressão ( $\mathbf{P}$ ), que, conseqüentemente, se encontra associado ao menor autovalor deste tensor. Assim, os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  referenciam a posição do vetor com o sistema de coordenadas do problema e a identificação de regiões vorticais estaria ligada a regiões do escoamento com  $G(\theta, \phi) < 0$ . Assim como outros critério discutidos anteriormente neste capítulo, a condição de rotação das linhas de corrente,  $G$ , não é uma entidade objetiva, pois depende diretamente dos termos do gradiente de velocidades.

#### 2.4.11 Critério Proposto por Cucitore et al. [9]

A idéia de compacidade das órbitas de partículas, no interior de regiões vorticais, foi também apresentada por Cucitore et al. [9], mas, diferentemente do trabalho de Chakraborty et al. [6], o critério proposto pelos autores baseia-se em uma formulação lagrangiana para definir que a distância entre duas partículas, inicialmente imersas em um vórtice, deve se manter aproximadamente igual a distância inicial ao longo de todo o tempo de integração. Se  $u_a$  e  $u_b$  são as velocidades de duas partículas  $a$  e  $b$  no instante de tempo  $\tau$ , temos que a relação proposta por Cucitore et al. [9] pode ser matematicamente definida por

$$R(\mathbf{x}, t) = \frac{|\int_0^t \mathbf{u}_a(\tau) d\tau - \int_0^t \mathbf{u}_b(\tau) d\tau|}{\int_0^t |u_a(\tau) - u_b(\tau)| d\tau} \quad (2.98)$$

O numerador da relação (2.98) afere a evolução da distância relativa entre as duas partículas  $a$  e  $b$  do tempo zero ao tempo final  $t$ . Enquanto isso, o denominador da equação avalia a diferença entre a trajetória das partículas a cada instante de tempo. O parâmetro  $R(\mathbf{x}, t)$  varia de 0 a 1 e foi elaborado para atingir valores próximos ao limite inferior, quando duas partículas se encontram em

uma região vortical e próximos do limite superior quando uma das partículas ou o par se encontram na região externa a vórtices. Isto ocorre porque, quando duas partículas se encontram imersas em regiões vorticais, o denominador da relação (2.98) cresce rapidamente, enquanto que o numerador apresenta crescimento mais ameno, visto que as partículas não apresentam grande variação na sua distância relativa. Segundo os autores, o caso  $R(\mathbf{x}, t) = 1$  representam trajetórias circulares perfeitas entre duas partículas na mesma posição radial. Entretanto, se duas partículas imersas em um escoamento pulsante e que mantêm sua distância descrita como uma função periódica também encontra valores de  $R(\mathbf{x}, t) = 1$ .

Nesse tipo de critério, alguns itens devem ser revistos durante sua aplicação a um determinado escoamento. Em primeiro lugar, um número considerável de partículas devem ser dispostas ao longo do domínio para que não existam regiões no escoamento que não sejam avaliadas por pelo menos um par de trajetórias. Uma vez que o número de pares é maior que o número de trajetórias, visto que uma mesma partícula por trocar informações com diversas outras, em escoamentos onde as comprimentos característicos das regiões vorticais não é conhecido *a priori*, como no caso de escoamentos turbulentos, as distâncias iniciais dos pares podem apresentar diferentes ordens de grandeza, dependendo das dimensões do domínio. Outro assunto que deve ser estudado com precaução é a escolha do tempo de integração  $t$  que, no caso de avaliação de escoamentos permanentes, é determinado como um falso transiente. Se o tempo de integração escolhido for muito grande, algumas informações importantes do escoamento podem ser perdidas e a busca por tempos característicos no escoamento torna-se uma tarefa crucial para a determinação desse parâmetro.

O critério proposto por Cucitore et al. [9] pode complementar a avaliação de estruturas vorticais, juntamente com outros critérios eulerianos apresentados nesse capítulo. Os autores inclusive propõem a verificação da manutenção das distâncias entre partículas em uma região onde  $\Delta > 0$ , para que a superpredição do critério  $\Delta$ , apresentado anteriormente em alguns contra-exemplos, seja elim-

inada, visto que nessas regiões as partículas tenderiam a divergir, pois não se encontram em uma região vortical de fato. Os autores avaliam o escoamento representativo de um tornado, apresentado na seção 2.4.6, no qual o critério  $\Delta$  identificou uma segunda região, onde o movimento vortical não é identificado, conforme a Fig. 2.4. Como avaliado pelos autores, enquanto que as partículas que inicialmente estavam contidas na região  $\Delta > 0$  mais próxima do eixo, onde é evidenciado movimento vortical, se mantêm nessa região durante o tempo de integração pelo critério  $R(\mathbf{x}, t)$ , o número de trajetórias dispostas na segunda região  $\Delta > 0$ , fora da região vortical, ao longo do falso tempo de integração, diminuem, como pode ser evidenciado pelas linhas de corrente hiperbólicas, nesta região, dispostas na Fig. 4.1 (b). Outra desvantagem do critério está na subjetividade do valor de  $R$  que delimita o vórtice. Além disso, esse critério não evita que escoamentos com vorticidade nula, mas com trajetórias oscilatórias de baixa amplitude sejam classificados como vórtices.

#### 2.4.12 Critério Proposto por Horiuti [10]

Uma das soluções analíticas mais consagradas na literatura na tentativa de modelagem de estruturas vorticais é a solução de vórtice de Burgers [36]. O vórtice de Burgers é uma solução exata das equações de Navier-Stokes, onde a difusão viscosa radial é balanceada pelo estiramento dinâmico da coluna vortical a partir de uma deformação axissimétrica. Os componentes da velocidade, em coordenadas cilíndricas, são dados por

$$v_r = -\alpha r \quad (2.99)$$

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(\frac{-r^2\alpha}{2\nu}\right) \right] \quad (2.100)$$

$$v_z = 2\alpha z \quad (2.101)$$

onde  $\alpha$  representa a taxa de deformação axissimétrica,  $\Gamma$  é a circulação e  $\nu$  representa a viscosidade cinemática. Por se tratar de um vórtice axissimétrico, a vorticidade aponta na direção axial e a representação dos autovalores da parte simétrica do tensor gradiente de velocidades (tensor taxa de deformação -  $\mathbf{D}$ ), é dada pelas funções

$$\lambda_{\pm}^{\mathbf{D}} = \frac{\alpha}{2} \left[ -1 \pm Re_{\Gamma} \left\{ \frac{4\nu}{\alpha r^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{4\nu}\right) \right] - \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{4\nu}\right) \right\} \right] \quad (2.102)$$

$$\lambda_z^{\mathbf{D}} = \alpha \quad (2.103)$$

onde  $Re_{\Gamma} = \frac{\Gamma}{4\pi\nu}$  é o número de Reynolds baseado na circulação. Assim, os autovalores são ordenados de tal forma que,  $\lambda_z^{\mathbf{D}}$  representa o autovalor cujo autovetor se encontra mais alinhado com a vorticidade,  $\lambda_+^{\mathbf{D}}$  o de maior valor entre os dois restantes e  $\lambda_-^{\mathbf{D}}$  o de menor valor. Os autovetores correspondentes são relacionados por  $\xi_z^{\mathbf{D}}$ ,  $\xi_+^{\mathbf{D}}$  e  $\xi_-^{\mathbf{D}}$ . A Fig. 2.14 apresenta os contornos de  $\lambda_{\pm}^{\mathbf{D}}$  e  $\lambda_z^{\mathbf{D}}$  para o modelo de vórtice de Burgers avaliado com  $\alpha = 0,02$ ,  $\nu = 0,25$  e  $Re_{\Gamma} = 50$ . Na figura, é possível observar que o cruzamento entre as distribuições dos autovalores  $\lambda_+^{\mathbf{D}}$  e  $\lambda_z^{\mathbf{D}}$  ocorre em  $r \approx 0,75$  e, a partir desse ponto, o alinhamento da vorticidade ocorre com o segundo autovalor do tensor das deformações, ordenado em ordem crescente. Conforme observado pelos trabalhos de Jiménez [37], Kida [38] e Andreotti [39], Para valores de  $Re_{\Gamma}$  menores que 10, não é observado cruzamento entre os autovalores e  $\lambda_+^{\mathbf{D}}$  e  $\lambda_z^{\mathbf{D}}$  ao longo de todo o comprimento radial,  $\lambda_z^{\mathbf{D}} \geq \lambda_+^{\mathbf{D}}$ . Para valores de  $Re_{\Gamma}$  maiores que 10, sempre existirá uma região onde  $\lambda_+^{\mathbf{D}} \geq \lambda_z^{\mathbf{D}}$ .

O tensor  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$ , parâmetro motriz do critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$ , avaliado na base dos autovetores  $\{\xi_z^{\mathbf{D}}, \xi_+^{\mathbf{D}}, \xi_-^{\mathbf{D}}\}$ , resultando na transformação  $\mathbf{J} = \mathbf{P}(\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2)\mathbf{P}^T$ , onde o tensor  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{P}^T$  contêm, respectivamente, as colunas e as linhas da base ortonormal do tensor taxa de deformação com relação a base original, pode ser representado por

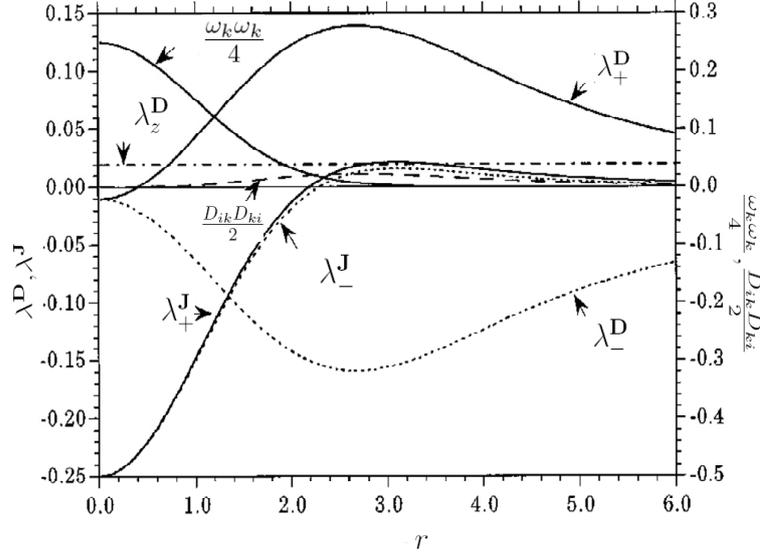


Fig. 2.14: Distribuições radiais dos autovalores do tensor taxa de deformação  $\lambda^{\mathbf{D}}$ , do tensor  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$ , avaliado na base dos autovetores de  $\mathbf{D}$ ,  $\lambda^{\mathbf{J}}$  e das funções  $\frac{\omega_k \omega_k}{4}$  e  $\frac{D_{ik} D_{ki}}{2}$ , obtidas para o modelo de vórtice de Burgers. Reproduzido de [10]

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} (\lambda_+^{\mathbf{D}})^2 - \frac{1}{4}(\omega_-^2 + \omega_z^2) & \frac{1}{4}\omega_+\omega_- & \frac{1}{4}\omega_+\omega_z \\ \frac{1}{4}\omega_+\omega_- & (\lambda_-^{\mathbf{D}})^2 - \frac{1}{4}(\omega_+^2 + \omega_z^2) & \frac{1}{4}\omega_-\omega_z \\ \frac{1}{4}\omega_+\omega_z & \frac{1}{4}\omega_-\omega_z & (\lambda_z^{\mathbf{D}})^2 - \frac{1}{4}(\omega_+^2 + \omega_-^2) \end{bmatrix}$$

onde  $\omega_z$ ,  $\omega_+$  e  $\omega_-$  representam as componentes do vetor vorticidade escrito na base  $\{\xi_z^{\mathbf{D}}, \xi_+^{\mathbf{D}}, \xi_-^{\mathbf{D}}\}$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_z \boldsymbol{\xi}_z^{\mathbf{D}} + \omega_+ \boldsymbol{\xi}_+^{\mathbf{D}} + \omega_- \boldsymbol{\xi}_-^{\mathbf{D}} \quad (2.104)$$

Horiuti [10] simplifica o tensor  $\mathbf{J}$  por considerar, exemplificando com resultados provenientes de simulação numéricos direta de escoamentos turbulentos isotrópicos, que os termos fora da diagonal principal desse tensor são desprezíveis frente aos valores na diagonal. Esta hipótese é equivalente a dizer que o grau de coaxialidade de  $\mathbf{J}$  e  $\mathbf{D}$  é elevado, ou seja, que os autovetores de  $\mathbf{J}$  são pouco defasados de  $\mathbf{D}$ . Esta aproximação também implica que o tensor  $\mathbf{J}$  possui os mesmos autovetores de  $\mathbf{D}$  e, portanto,  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{D} \approx \mathbf{D} \cdot \mathbf{J}$ . Assim, os autovalores do

tensor  $\mathbf{J}$  nas direções  $z$ ,  $+$  e  $-$  podem ser aproximados por, respectivamente,  $(\lambda_+^{\mathbf{D}})^2 - \frac{1}{4}(\omega_-^2 + \omega_z^2)$ ,  $(\lambda_-^{\mathbf{D}})^2 - \frac{1}{4}(\omega_+^2 + \omega_z^2)$  e  $(\lambda_z^{\mathbf{D}})^2 - \frac{1}{4}(\omega_+^2 + \omega_-^2)$ . Em escoamentos axissimétricos, onde a vorticidade é aponta para a direção axial, esses autovalores podem ser reescritos como  $(\lambda_+^{\mathbf{D}})^2 - \frac{1}{4}\omega_z^2$ ,  $(\lambda_-^{\mathbf{D}})^2 - \frac{1}{4}\omega_z^2$  e  $(\lambda_z^{\mathbf{D}})^2$ . Os autovalores do tensor  $\mathbf{J}$ , escritos para o vórtice de Burgers, são dados por

$$\lambda_{\pm}^{\mathbf{J}} = \frac{\alpha^2}{4} \left\{ \left[ 1 \pm Re_{\Gamma} \left\{ \frac{4\nu}{\alpha r^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{4\nu}\right) \right] - \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{4\nu}\right) \right\} \right]^2 - Re_{\Gamma}^2 \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{4\nu}\right) \right\} \quad (2.105)$$

$$\lambda_z^{\mathbf{J}} = \alpha^2 \quad (2.106)$$

A Fig. 2.14 apresenta os contornos de  $\lambda_{\pm}^{\mathbf{J}}$ . Visto que o contorno de  $\lambda_z^{\mathbf{J}}$  apresenta amplitude desprezível frente aos demais, este não se encontra representado. Entretanto, também para valores acentuados de  $Re_{\Gamma}$ , existirá uma região onde  $\lambda_+^{\mathbf{J}} \geq \lambda_-^{\mathbf{J}} \geq \lambda_z^{\mathbf{J}}$  e o cruzamento das distribuição dos autovalores  $\lambda_{\pm}^{\mathbf{J}}$  com o autovalor  $\lambda_z^{\mathbf{J}}$ , que ocorre em  $r \approx 2,2$ . É possível observar também pelo gráfico da Fig. 2.14 que a zona  $\lambda_+^{\mathbf{J}} \geq \lambda_z^{\mathbf{J}}$  é menor que zona  $\lambda_+^{\mathbf{D}} \geq \lambda_z^{\mathbf{D}}$  e, conseqüentemente, a primeira condição ocorre a partir de valores mais elevados de  $Re_{\Gamma}$  que a segunda. Utilizando as Eqs. (2.102) e (2.105), temos que a associação dos autovalores de  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{J}$  pode ser dada pela relação

$$\lambda_{\pm}^{\mathbf{J}} = (\lambda_{\mp}^{\mathbf{D}})^2 - \frac{1}{4}\omega_z^2 \quad (2.107)$$

onde  $\omega_z$  é a componente do vetor vorticidade na direção mais alinhada com este vetor e, para o modelo de vórtice de Burgers, é dada pela relação

$$\omega_z = \alpha Re_{\Gamma} \exp\left(-\frac{\alpha r^2}{4\nu}\right) \quad (2.108)$$

Na Fig. 2.14 são dispostos ainda as distribuições das amplitudes da taxa

de deformação  $\frac{D_{ik}D_{ki}}{2}$  e da vorticidade  $\frac{\omega_k\omega_k}{4}$ . Próximo do centro do vórtice, a vorticidade é predominante, enquanto que, ao longo da direção radial, a taxa de deformação cresce em relação a vorticidade até que ocorre o cruzamento entre as duas distribuições ( $r \approx 2, 2$ ). Os autores classificam a proximidade do ponto  $r \approx 3, 0$  da Fig. 2.14, onde a taxa de deformação atinge seu valor máximo e relativamente maior que a vorticidade, como uma região formada não mais por uma estrutura tubular contínua, mas por lâminas que entrelaçadas mantêm a estrutura cilíndrica global, semelhante a região contínua. Isso acontece devido aos elevados valores da taxa de deformação frente a taxa de rotação e a consequente perda da estrutura coerente original contínua nas regiões afastadas do ponto  $r \approx 3, 0$ . Essas regiões são denominadas no presente trabalho por fitas cilíndricas, conforme a denominação original citada por Horiuti [10]. Visto que nesta região  $\omega_z \rightarrow 0$ , a relação entre os autovetores de  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{J}$  passa a ser dada por  $\lambda_{\pm}^{\mathbf{J}} = (\lambda_{\mp}^{\mathbf{D}})^2$  e, por conseguinte, essa região praticamente coincide com a região  $\lambda_{+}^{\mathbf{J}} \geq \lambda_{-}^{\mathbf{J}} > 0$ . Na região  $r \ll 3, 0$ , onde a estrutura tubular mantém sua continuidade local, em contraponto a região  $r \approx 3, 0$ , os autovalores de  $\mathbf{J}$  se alinham de tal forma que  $0 > \lambda_{+}^{\mathbf{J}} \geq \lambda_{-}^{\mathbf{J}}$ . Segundo o autor, esses resultados podem ser utilizados para o desenvolvimento de um critério de classificação de estruturas coerentes em escoamento bidimensionais, visto que, para o escoamento apresentado na Fig. 2.14 onde  $\|\lambda_{-}^{\mathbf{D}}\| \geq \|\lambda_{+}^{\mathbf{D}}\|$ , quando a condição  $\lambda_{+}^{\mathbf{J}} \geq \lambda_{-}^{\mathbf{J}} > 0$  é observada, a região é tal que

$$(\lambda_{-}^{\mathbf{D}})^2 \geq (\lambda_{+}^{\mathbf{D}})^2 \geq \frac{1}{4}\omega_z^2 \quad (2.109)$$

ou seja, uma região dominada pela taxa de deformação, enquanto que, quando a condição  $0 > \lambda_{+}^{\mathbf{J}} \geq \lambda_{-}^{\mathbf{J}}$  é imposta temos que

$$\frac{1}{4}\omega_z^2 \geq (\lambda_{-}^{\mathbf{D}})^2 \geq (\lambda_{+}^{\mathbf{D}})^2 \quad (2.110)$$

ou seja, uma região dominada pela vorticidade. Quando  $\|\lambda_{+}^{\mathbf{D}}\| \geq \|\lambda_{-}^{\mathbf{D}}\|$ , os termos

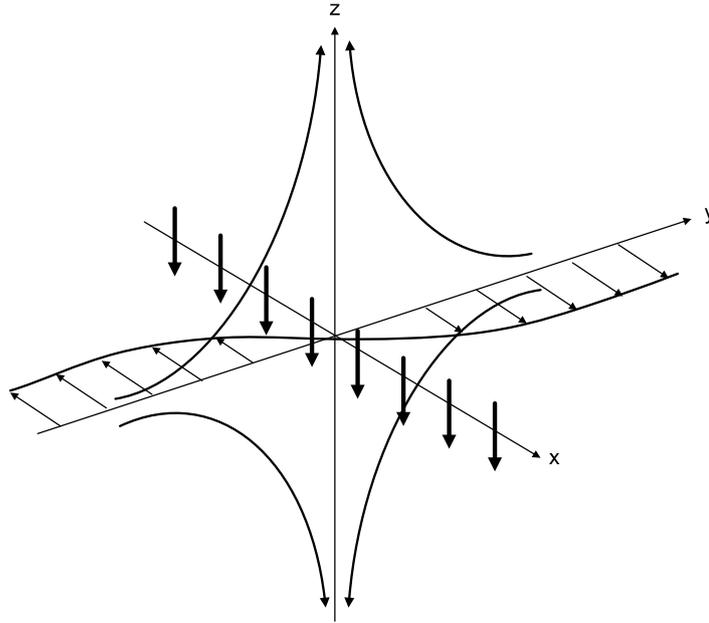


Fig. 2.15: Geometria do modelo de camada vortical de Burgers. As setas mais espessas representam a direção da vorticidade enquanto que as setas mais finas representam a distribuição da velocidade na camada cisalhante.

$(\lambda_+^D)^2$  e  $(\lambda_+^J)^2$  são permutados nas Eqs. (2.109) e (2.110), apesar dos autores ressaltarem que é pouco comum a ocorrência dessa situação a partir do que foi observado em simulações numéricas diretas. O autor afirma, entretanto, que a avaliação do que entendem por regiões dominadas por estruturas filamentosas ou tubulares não é suficiente com a análise de  $\lambda_-^J$  e  $\lambda_+^J$  para o modelo de vórtice de Burgers. Portanto, segundo o autor, torna-se necessária a inclusão de uma terceira região, avaliada a partir dos autovalores  $\lambda^D$  e  $\lambda^J$  do modelo de camada vortical de Burgers.

Esse modelo foi explorado nos trabalhos de Andreotti [39] e Beronov e Kida [40] e trata-se da superposição de um ponto de estagnação do escoamento planar, cuja essência é irrotacional e de uma camada vortical viscosa disposta de tal forma que a vorticidade aponta na direção máxima de estiramento dada pelo escoamento caso esse fosse irrotacional. A Fig. 2.15 apresenta um diagrama representativo desse escoamento que possui componentes da velocidade, em coordenadas cartesianas, de acordo com as relações

$$v_x = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}U_0\text{Erf}\left(\frac{\alpha y^2}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.111)$$

$$v_y = -2\alpha y \quad (2.112)$$

$$v_z = 2\alpha z \quad (2.113)$$

onde  $U_0 = U(y \rightarrow \infty) = U(z \rightarrow \infty) = -U(y \rightarrow -\infty) = -U(z \rightarrow -\infty)$ . As componentes dos autovalores do tensor  $\mathbf{D}$ ,  $\lambda^{\mathbf{D}}$ , são dadas pelas relações

$$\lambda_{\pm}^{\mathbf{D}} = \frac{\alpha}{2} \left[ -1 \pm \sqrt{\text{Re}_{\delta}^2 \exp\left(-\frac{\alpha y^2}{\nu}\right) + 1} \right] \quad (2.114)$$

$$\lambda_z^{\mathbf{D}} = 2\alpha \quad (2.115)$$

onde  $\text{Re}_{\delta} = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\nu}}U_0$  representa o número de Reynolds baseado na intensidade de deformação,  $U_0$ , com comprimento característico  $U_0/L_c$ . Avaliando também os autovalores do tensor  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$ , na base dos autovetores do tensor taxa de deformação, para o modelo de camada vortical de Burgers, chegam-se as seguintes relações

$$\lambda_{\pm}^{\mathbf{J}} = -\frac{\alpha^2}{2} \left[ -1 \mp \sqrt{\text{Re}_{\delta}^2 \exp\left(-\frac{\alpha y^2}{\nu}\right) + 1} \right] \quad (2.116)$$

$$\lambda_z^{\mathbf{J}} = \alpha^2 \quad (2.117)$$

A Fig. 2.16 apresenta os autovetores  $\lambda^{\mathbf{D}}$  e  $\lambda^{\mathbf{J}}$ , além das distribuições das amplitudes da taxa de deformação  $\frac{D_{ik}D_{ki}}{2}$  e da vorticidade  $\frac{\omega_k\omega_k}{4}$  para o modelo de camada vortical de Burgers para  $\alpha = 1$ ,  $\nu = 0.25$  e  $\text{Re}_{\delta} = 10$ . O cruzamento das curvas de  $\lambda_{+}^{\mathbf{D}}$  e  $\lambda_{-}^{\mathbf{D}}$  ocorre, semelhante ao caso apresentado na Fig. 2.14, em  $y \approx 1,55$ . É possível demonstrar que, nesse modelo de camada vortical

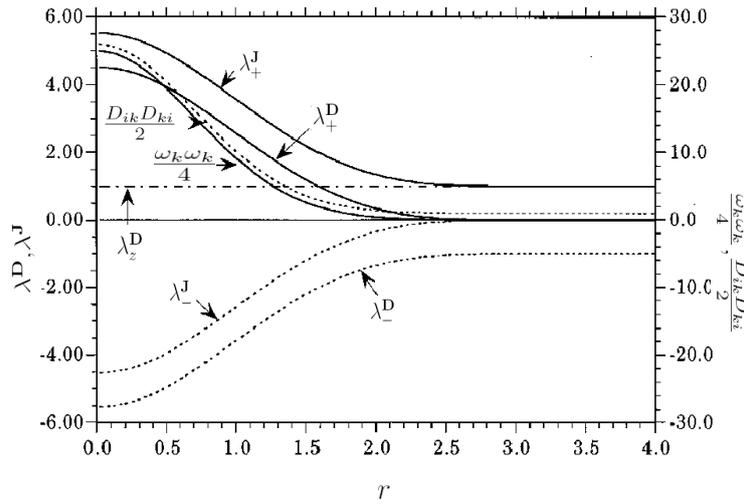


Fig. 2.16: Distribuições radiais dos autovalores do tensor taxa de deformação  $\lambda^{\mathbf{D}}$ , do tensor  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$ , avaliado na base dos autovetores de  $\mathbf{D}$ ,  $\lambda^{\mathbf{J}}$  e das funções  $\frac{\omega_k \omega_k}{4}$  e  $\frac{D_{ik} D_{ki}}{2}$ , obtidas para o modelo de camada vortical de Burgers. Reproduzido de [10]

$$\frac{1}{2} (D_{ik} D_{ki} + W_{ik} W_{ki}) = \frac{1}{2} D_{ik} D_{ki} - \frac{1}{4} \omega_k \omega_k = (\lambda_z^{\mathbf{D}})^2 \quad (2.118)$$

Portanto, avaliando as relações (2.114)-(2.117), chega-se a conclusão que a relação entre os autovetores de  $\lambda^{\mathbf{D}}$  e  $\lambda^{\mathbf{J}}$ , que no modelo de vórtice de burgers variava quadraticamente, no modelo de camada vortical de burgers segue a relação linear

$$\lambda_{\pm}^{\mathbf{J}} = -\alpha \lambda_{\mp}^{\mathbf{D}} \quad (2.119)$$

A relação linear entre  $\lambda^{\mathbf{D}}$  e  $\lambda^{\mathbf{J}}$  é consequência da tendência de compressão das estruturas tubulares em uma direção específica. Outra consequência desse fato encontra-se também na Fig. 2.16 dos termos  $\frac{\omega_k \omega_k}{4}$  e  $\frac{D_{ik} D_{ki}}{2}$  apresentarem valores próximos e o segundo invariante do tensor gradiente de velocidades  $Q$ , avaliado em escoamentos incompressíveis apresenta valores baixos em módulo, positivos se comparados com os valores obtidos no modelo de vórtice de Burgers. Assim, Horiuti [10] afirma que, quando as autodireções do tensor  $\mathbf{J}$  são alinhadas de tal

forma que seus autovalores se ordenam  $\lambda_+^{\mathbf{J}} \geq 0 \geq \lambda_-^{\mathbf{J}}$ , os autovalores do tensor taxa de deformação são tais que

$$(\lambda_-^{\mathbf{D}})^2 \geq \frac{1}{4}\omega_z^2 \geq (\lambda_+^{\mathbf{D}})^2 \quad (2.120)$$

ou seja, a vorticidade e a deformação são comparáveis nessa região. Finalmente, o autor define o seu critério de classificação de estruturas vorticiais subdividindo-as em três regiões distintas. A primeira, onde a deformação apresenta relevância com relação a vorticidade (similar às estruturas em fitas cilíndricas ao redor no centro da região vortical do modelo de vórtice de Burgers) o escoamento se alinha de tal forma que

$$\lambda_+^{\mathbf{J}} \geq \lambda_-^{\mathbf{J}} > 0 \quad (2.121)$$

na região onde a vorticidade e a taxa de deformação possuem ordens de grandeza semelhantes (como no modelo de camada vortical de Burgers), os autovalores do tensor  $\mathbf{J}$  se ordenam de tal forma que

$$\lambda_+^{\mathbf{J}} \geq 0 \geq \lambda_-^{\mathbf{J}} \quad (2.122)$$

e, por fim, quando a vorticidade apresenta domínio sobre a taxa de deformação (como na região próxima a região central no modelo de vórtice de Burgers), conforme o autor, a seguinte condição seria respeitada

$$0 > \lambda_+^{\mathbf{J}} \geq \lambda_-^{\mathbf{J}} \quad (2.123)$$

O critério apresentado por Horiuti [10] constitui um dos primeiros critérios a apresentar uma classificação de estruturas vorticiais, fundamentada na relação entre vorticidade e a taxa de deformação. Em outras palavras, a identificação da região vortical no espaço não é o único objetivo. Outro ponto importante discutido pelo autor é a necessidade de avaliar o tensor  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$  na base dos

autovetores do  $\mathbf{D}$ , como condição essencial para a comparação desses tensores. Entretanto, assim como outros apresentados ao longo desse capítulo, o critério não é objetivo e, portanto, não é invariante a rotações ou acelerações entre observadores. Outra ressalva que deve ser levantada sobre o critério deve-se ao fato de que a generalização apresentada pelo critério não reflete a realidade, pois, as recíprocas às condições impostas acima não necessariamente são verdadeiras em determinados tipos de escoamento, visto que este se baseia em um determinado tipo de estrutura vortical, com forte presença em escoamentos turbulentos, mas que não representa um modelo geral de vórtice.

#### 2.4.13 Critério Proposto por Levy et al. [11] e Zhang e Choudhury [12]

O critério proposto por Levy et al. [11] se baseia na utilização da densidade de helicidade como parâmetro identificador de estruturas vorticais, de acordo com o alinhamento entre a velocidade e a vorticidade, de acordo com a relação

$$H = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (2.124)$$

ou seja, segundo os autores, movimento vortical seria experimentado em regiões onde  $H \rightarrow \|\mathbf{u}\|\|\boldsymbol{\omega}\|$ . O critério apresenta claras deficiências e, em um primeiro momento, pode-se destacar o fato do mesmo não ser nem mesmo invariante a transformações galileanas, muito menos objetivo. Outra limitação do critério encontra-se na avaliação de escoamentos bidimensionais. Nesse tipo de escoamento a vorticidade, quando diferente de zero sempre é normal ao plano do escoamento, enquanto que a velocidade, quando diferente de zero, está sempre no plano do escoamento. Assim, o critério não observa estruturas vorticais nesse tipo de escoamento, apesar da possibilidade concreta de observação de movimento vortical. Como uma proposta de evolução desse critério, Zhang e Choudhury [12] indicaram em seu trabalho a necessidade de avaliação do alinhamento do vetor normal aos vetores que formam a parte real e imaginária dos autovetores com-

plexos do gradiente de velocidades e a vorticidade, resultando na relação

$$H_e = \mathbf{n}_{swirl} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (2.125)$$

onde

$$\mathbf{n}_{swirl} = \boldsymbol{\xi}_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\xi}_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} \quad (2.126)$$

ou seja,  $\mathbf{n}_{swirl}$  é o eixo ao longo do qual as linhas de corrente apresentam topologia espiralada. O critério não têm restrições a escoamentos incompressíveis e esse é um ponto bastante ressaltado pelos autores. Eles analisam o escoamento compressível de um jato e compararam outros critérios da literatura como  $Q$ ,  $\Delta$ . Além disso, diferente do critério apresentado por Levy et al. [11], o critério é invariante a transformações galileanas, mas não é objetivo, por depender dos autovetores do gradiente de velocidade (entidade não objetiva) e da vorticidade. Assim como o critério  $H$ , também conhecido como “densidade de helicidade”, o critério  $H_e$ , denominado pelos autores de “densidade de auto-helicidade” não tem validade para escoamentos bidimensionais, pois sempre a direção normal as partes real e imaginária dos autovetores do gradiente de velocidades, quando este admite autovalores complexos coincidirá com a direção da vorticidade. Apesar disso, o critério  $H_e$  pode ser utilizado como complemento aos critérios propostos por Chakraborty et al. [6] para evitar o problema de “desaparecimento de vórtices”, visto que este ocorre, pelo fato de que, o eixo da espiral formadas pelas linhas de corrente se encontra próxima a ortogonalidade com a vorticidade em uma região onde claramente movimento vortical não é experimentado.

#### 2.4.14 Critério Proposto por Kolář [13]

A decomposição do gradiente de velocidades ( $\nabla \mathbf{u}$ ) em uma parte relacionada a taxa de deformação ( $\mathbf{D}$ ) e outra relacionada a taxa de rotação de filamentos materiais ( $\mathbf{W}$ ) constitui a base de grande parte dos critérios citados no presente

trabalho, assim como de um grande número de propostas de classificação de escoamentos e entendimento da mecânica dos fluidos. Entretanto, como destacado por Kolář [13] em seu trabalho e como já foi demonstrado com exemplos ao longo do presente trabalho, A vorticidade não é capaz de distinguir entre movimento vortical e movimento cisalhante puro, como aquele encontrado no escoamento sob uma placa plana que se move a velocidade constante, Assim como a taxa de deformação não distingue movimento extensional e movimento cisalhante. Assim, como fundamento do critério proposto em seu trabalho, Kolář [13] utiliza a decomposição do movimento relativo em três parcelas: Uma relacionada a movimento cisalhante puro de linhas (ou planos) paralelos, outra associada a rotação de corpo rígido e, por fim, a deformação irrotacional. Assim, o autor divide o gradiente de velocidade em três parcelas correlatas aos comportamentos decompostos, chegando a relação

$$\nabla \mathbf{u} = (\nabla \mathbf{u})_{DI} + (\nabla \mathbf{u})_{RCR} + (\nabla \mathbf{u})_{CP} \quad (2.127)$$

onde o termo  $(\nabla \mathbf{u})_{DI}$  representa o tensor simétrico relacionada a parcela do gradiente de velocidades ligada a deformação irrotacional,  $(\nabla \mathbf{u})_{RCR}$  representa o tensor antissimétrico relativo a rotação de corpo rígido e  $(\nabla \mathbf{u})_{CP}$  destaca a parcela relativa a movimento cisalhante puro, em um tensor puramente assimétrico dado por componentes  $a_{i,j}$  que se relacionam, em um referencial apropriado

$$a_{i,j} = 0 \quad \text{ou} \quad a_{j,i} = 0 \quad (2.128)$$

ou seja, a condição apresentada na Eq. (2.128) indica que os termos da diagonal são zeros e alguns valores fora da diagonal também, dependendo da posição, resultando em dois ou três valores não-nulos e nove possibilidade de tensores com valores não-nulos diferentes, visto que trata-se de um tensor de segundo grau 3x3.

De acordo com o autor, a escolha do sistema de coordenadas a partir do qual se deverá extrair a parte referente ao  $(\nabla \mathbf{u})_{CP}$  do gradiente de velocidades é

importante para que se obtenha o movimento cisalhante puro *efetivo*. A definição da escolha do sistema de coordenadas que representaria esse movimento efetivo deve, portanto, seguir a relação

$$\begin{aligned} & [ \|D_{12}W_{12}\| + \|D_{23}W_{23}\| + \|D_{31}W_{31}\| ]^{SCE} \\ & = \text{MAX}([ \|D_{12}W_{12}\| + \|D_{23}W_{23}\| + \|D_{31}W_{31}\| ]^{\text{TODOS OS SISTEMAS}}) \end{aligned} \quad (2.129)$$

ou seja, o sistema de coordenadas onde o termo  $(\nabla \mathbf{u})_{DI} + (\nabla \mathbf{u})_{RCR}$  é mínimo. É importante ressaltar que a busca por um sistema de coordenadas que atenda o critério acima deve ser realizada dentre sistemas inerciais rotacionados do sistema de coordenadas efetivo (SCE). Assim, a tripla decomposição do gradiente de velocidades proposta por Kolář [13] deve seguir o roteiro indicado abaixo:

Passo 1: Determinação do sistema de coordenadas que resultará no movimento cisalhante pura efetivo, a partir da condição (2.129);

Passo 2: Decomposição do gradiente de velocidades  $\nabla \mathbf{u}$  nos três termos indicados na Eq. (2.127);

Passo 3: Retorno ao sistema de coordenadas original do problema a partir do tensor ortogonal  $\mathbf{Q}$  que relaciona a diferença de fase entre o sistema de coordenadas efetivo e original, resultando na transformação

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{u})^{\text{ORIG}} &= \mathbf{Q}(\nabla \mathbf{u})^{SCE} \mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q}(\nabla \mathbf{u})_{DI}^{SCE} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}(\nabla \mathbf{u})_{RCR}^{SCE} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}(\nabla \mathbf{u})_{CP}^{SCE} \mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (2.130)$$

Os termos representados pelo trabalho de Kolář [13] na tripla decomposição do gradiente de velocidades são, claramente, parcelas dos tensores  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{W}$ . O termo  $(\nabla \mathbf{u})_{CP}$  é responsável por uma parcela da vorticidade, segundo o autor, conhecida como vorticidade de cisalhamento, assim como uma parcela da taxa de

deformação, conhecida como deformação em cisalhamento. Portanto, podemos reescrever a tripla decomposição do gradiente de velocidades a partir da relação

$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{u} &= (\nabla \mathbf{u})_{DI} + (\nabla \mathbf{u})_{RCR} + (\nabla \mathbf{u})_{CP} \\
&= (\nabla \mathbf{u})_{DI} + (\nabla \mathbf{u})_{RCR} + \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u})_{CP} + (\nabla \mathbf{u})_{CP}^T] \\
&\quad + \frac{1}{2}[(\nabla \mathbf{u})_{CP} - (\nabla \mathbf{u})_{CP}^T] \\
&= \mathbf{D}_{DI} + \mathbf{W}_{RCR} + \mathbf{D}_{CP} + \mathbf{W}_{CP} \\
&= [\mathbf{D}_{DI} + \mathbf{D}_{CP}] + [\mathbf{W}_{RCR} + \mathbf{W}_{CP}] = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.131)
\end{aligned}$$

Em escoamentos bidimensionais incompressíveis, o gradiente de velocidades pode ser descrito em um referencial arbitrário e no referencial que resulta na parcela de movimento cisalhante puro efetivo (SCE) de acordo com a seguinte relação

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & -u_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -d & -\omega & 0 \\ \omega & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\text{ORIG}} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & d - \omega & 0 \\ d + \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\text{SCE}} \quad (2.132)$$

Assim, é possível concluir que, a parcela de vorticidade que é dada pelo termo de rotação de corpo rígido pode ser interpretada como o dobro da velocidade angular devido a rotação rígida de filamentos materiais (ou seja, sem deformação angular entre os mesmos) e a parcela da vorticidade devida ao termo  $(\nabla \mathbf{u})_{CP}$  pode ser interpretada como o dobro da velocidade angular devido a rotação em cisalhamento (ou seja, em movimento rotacional uniforme, como a diferença entre as posições angulares final e inicial entre dois filamentos inicialmente perpendiculares dividido pelo tempo de observação).

O critério de identificação de estruturas vorticiais indicado por Kolár [13] atribui ao fato de uma região contínua possuir valores diferentes de zero para

a parcela de vorticidade dada pelo termo do gradiente de velocidades devido a rotação de corpo rígido ( $\mathbf{W}_{RCR}$ ) para que essa região seja considerada um vórtice. Como apontado pelo autor, os passos 1 e 3 indicados no roteiro descrito anteriormente não necessariamente precisa ser realizado se somente a identificação elementar de estruturas vorticais for necessária. Entretanto, caso seja necessário avaliar a magnitude de  $\mathbf{W}_{RCR}$ , com o objetivo de quantificar e distinguir regiões vorticais, tornam-se necessária a aplicação desses passos.

O critério proposto por Kolář [13] identificaria estruturas vorticais, por exemplo, em um escoamento qualquer, mesmo sem a presença de movimento vortical, mas que fosse submetido a rotação a partir de um eixo arbitrário, se um referencial inercial fosse utilizado na descrição do problema. Portanto nesse critério, assim como em outros apresentados ao longo desse capítulo, a objetividade não é atendida. Outro problema apontado pelo próprio autor é a falta de uma formulação para escoamentos tridimensionais que trate da tripla decomposição, visto que toda a teoria apresentada no trabalho de Kolář [13] se baseia no comportamento de filamentos materiais em movimento planar.

#### 2.4.15 Critério Proposto por Haller [14]

O estudo conduzido por Haller [14] foi um dos primeiros a demonstrar preocupação na busca por um critério de identificação de estruturas vorticais objetivo, ou seja, invariante a transformações euclidianas. O proposto critério busca avaliar a estabilidade das trajetórias de partículas imersas no escoamento, o que denota claramente uma abordagem lagrangiana, para identificar vórtices. Essas trajetórias são analisadas a partir da derivada material do tensor taxa de deformação. Conforme discutido anteriormente nesse capítulo, a derivada material é um operador não-objetivo quando é aplicada a um tensor de segunda ordem e portanto torna-se necessária a inclusão de termos complementares de tal forma a torná-la objetiva e passível de avaliação pelo critério. Haller [14] utiliza a forma recursiva de derivação de complementação da derivada material proposta

por Rivlin e Ericksen [41] para a derivada de primeira ordem do tensor taxa de deformação definida a partir da relação

$$\frac{1}{2}\mathbf{A}_2 = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{D})\mathbf{u} + \mathbf{D}(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{D} \quad (2.133)$$

Veremos no capítulo 3 que o tensor  $\mathbf{A}_1$  avaliado por Haller é metade do tensor avaliado pelo presente trabalho. Uma função consideravelmente estudada na verificação da estabilidade de trajetórias lagrangianas no contexto de sistema dinâmicos é a função de Lyapunov. Seja um escoamento tridimensional incompressível com trajetórias definidas pela função vetorial  $\mathbf{x}(t)$ , avaliadas a partir de uma posição inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  no instante  $t_0$ . Em uma abordagem lagrangiana, uma perturbação infinitesimal  $\zeta$  à condição inicial  $x_0$  será advectada linearmente a partir da relação

$$\dot{\zeta} = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)\zeta \quad (2.134)$$

A estabilidade das soluções  $\zeta = 0$  em (2.134) determinam a estabilidade das trajetórias no escoamento e, conseqüentemente, sua topologia. A função de Lyapunov, definida pela relação

$$V(\zeta, t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\zeta\|^2 = \langle \zeta, \mathbf{D}\zeta \rangle \quad (2.135)$$

avalia a estabilidade da solução  $\zeta = 0$ . Enquanto que valores positivos de  $V$  ao longo do vetor  $\zeta$  implica em decaimento do módulo dessa perturbação ( $\|\zeta\|$ ), valores negativos da função de Lyapunov indicam crescimento de  $\|\zeta\|$ . Antes de proceder com a definição do critério, entretanto, a avaliação das limitações identificadas por Haller [14] são importantes na sua própria formulação. Em primeiro lugar, conforme denotado pelo autor, devem-se ser considerados apenas escoamentos tais que

$$\det \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \neq 0 \quad (2.136)$$

Apesar de escoamentos bidimensionais não atenderem o critério (2.136), torna-se necessário ressaltar que, segundo o próprio autor, uma versão simplificada do desse mesmo critério, especificamente proposto para escoamentos bidimensionais se encontra descrito em [42]. Essa condição requer que um dos autovalores do tensor taxa de deformação seja nulo. Entretanto, esse tipo de critério não avalia também escoamentos quasi-planos, onde um dos autovalores de  $\mathbf{D}$  é nulo, mas o autovetor associado a esse autovalor não se encontra alinhado com o vetor vorticidade. Além disso, a incompressibilidade do escoamento é requerida e, avaliando os três autovalores do tensor taxa de deformação tais que  $\lambda_1^{\mathbf{D}} > \lambda_2^{\mathbf{D}} > \lambda_3^{\mathbf{D}}$ , temos que seus respectivos sinais se correlacionam de forma que

$$\text{sinal}\lambda_1^{\mathbf{D}} = \text{sinal}\lambda_2^{\mathbf{D}} \neq \text{sinal}\lambda_3^{\mathbf{D}} \quad (2.137)$$

Aplicando as duas simplificações indicadas acima, os escoamentos passíveis de serem avaliados com o presente critério são tais que o tensor taxa de deformação é um tensor simétrico indefinido, ou seja, dois vetores  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  que se associam com o tensor  $\mathbf{D}$  podem constituir a relação

$$\mathbf{p}^T \mathbf{D} \mathbf{p} < 0 < \mathbf{q}^T \mathbf{D} \mathbf{q} \quad (2.138)$$

Portanto, a função de Lyapunov  $V$  pode assumir assim valores positivos e negativos na vizinhança da solução  $\boldsymbol{\zeta} = 0$ . A fronteira que delimita esses valores positivos e negativos de  $V$  é dada pela região

$$Z(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\zeta} | \langle \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{D} \boldsymbol{\zeta} \rangle = 0 \quad (2.139)$$

cuja geometria pode ser melhor definida na base ortonormal formada pelos autovetores do tensor taxa de deformação  $\hat{\boldsymbol{\xi}}_i^{\mathbf{D}}$ , correspondentes aos autovalores  $\lambda_i^{\mathbf{D}}$ . Avaliando a perturbação  $\boldsymbol{\zeta}$  na base desses autovetores, temos que

$$\boldsymbol{\zeta} = \alpha_1 \hat{\boldsymbol{\xi}}_1^{\mathbf{D}} + \alpha_2 \hat{\boldsymbol{\xi}}_2^{\mathbf{D}} + \alpha_3 \hat{\boldsymbol{\xi}}_3^{\mathbf{D}} \quad (2.140)$$

e, portanto, a região  $Z(\mathbf{x}, t)$  deve ser satisfazer a relação

$$\alpha_3^2 = a\alpha_1^2 + (1 - a)\alpha_2^2 \quad (2.141)$$

onde

$$a(\mathbf{x}, t) = -\frac{\lambda_1^{\mathbf{D}}}{\lambda_3^{\mathbf{D}}} \quad (2.142)$$

A relação (2.141) define um cone elíptico que, dependendo do sinal de  $\lambda_3^{\mathbf{D}}$ , como mostra a relação (2.142), converge para a origem da base definida pelos autovetores do tensor taxa de deformação ( $\lambda_3^{\mathbf{D}} < 0$ ) ou diverge da mesma ( $\lambda_3^{\mathbf{D}} > 0$ ). A geometria da solução de (2.134) depende diretamente de como as trajetórias cruzam pelas fronteiras do cone  $Z$ . Essa direção de cruzamento pode ser obtida avaliando a tendência de crescimento ou decaimento de  $V$ , a partir da sua derivada material, resultando na relação

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{\zeta}(t), t) = \langle \boldsymbol{\zeta}, \frac{1}{2}\mathbf{A}_2\boldsymbol{\zeta} \rangle \quad (2.143)$$

Assim, o sentido de entrada ou saída da região  $Z$  depende do sinal do produto interno de (2.143). Sabendo que  $tr(\mathbf{A}_2) = tr(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{D})\mathbf{u}) + 2\|\mathbf{D}\|^2$  e que o tensor taxa de deformação tem traço nulo (pela incompressibilidade), temos que  $tr(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{D})\mathbf{u}) = tr(\dot{\mathbf{D}}) = 0$  e, portanto,

$$tr(\mathbf{A}_2) = 2\|\mathbf{D}\|^2 > 0 \quad (2.144)$$

Em consequência da relação (2.144), o tensor  $\mathbf{A}_2$  pode ser positivo definido (todos os autovalores são positivos), positivo semi-definido (os autovalores são positivos ou nulos) ou indefinido no interior do cone  $Z$ . As Figs. 2.17-2.19 apresentam as configurações de direções das trajetórias ao longo da fronteira do cone  $Z$  de acordo com a característica do tensor  $\mathbf{A}_2$ .

As linhas  $\langle \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{A}_2\boldsymbol{\zeta} \rangle = 0$  em  $Z$  são interseções do cone de aceleração de taxa de

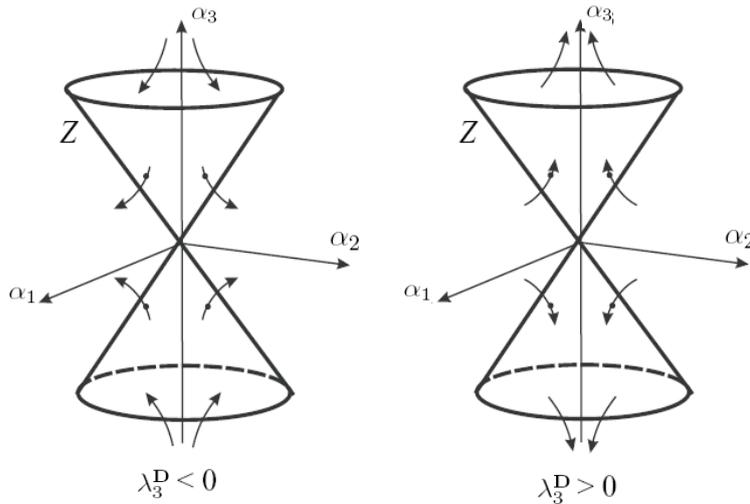


Fig. 2.17: Direções das trajetórias materiais na fronteira do cone  $Z$  (em  $\boldsymbol{\alpha} = 0$ ) quando o tensor  $\mathbf{A}_2$  é positivo definido nesse cone. Reproduzido de Haller [14]

deformação nula

$$Z_{\mathbf{A}_2}(\mathbf{x}, t) = \zeta | \langle \zeta, \mathbf{A}_2 \zeta \rangle = 0 \quad (2.145)$$

com o cone de taxa de deformação nula  $Z$ . Na formulação do critério proposto por Haller [14], o tensor  $\mathbf{A}_2$  é considerado positivo definido, positivo semi-definido ou indefinido no cone  $Z$  se o produto interno  $\langle \zeta, \mathbf{A}_2 \zeta \rangle$  for positivo, positivo negativo ou nulo em  $Z$ , respectivamente. Visto que a estabilidade das soluções na vizinhança da origem  $\zeta = 0$  na EDO (2.134) pode refletir somente a estabilidade linear das trajetórias lagrangianas  $\mathbf{x}(t)$  e não a trajetória da solução dessa EDO, torna-se necessário utilizar ferramentas do estudo de sistemas dinâmicos na identificação das trajetórias que se encontram em regiões onde  $\mathbf{A}_2^Z$  (restrição de  $\mathbf{A}_2$  ao cone  $Z$ ) se mantêm indefinido.

Assim, o autor divide o espaço tridimensional (abordagem euleriana) em dois domínios: O domínio hiperbólico,  $\mathfrak{H}(t)$ , é constituído por um conjunto de pontos nos quais  $\mathbf{A}_2^Z$  se mantêm positivo definido. Esse domínio pode ser separado de acordo com o sinal de  $\lambda_3^D$  de tal forma que

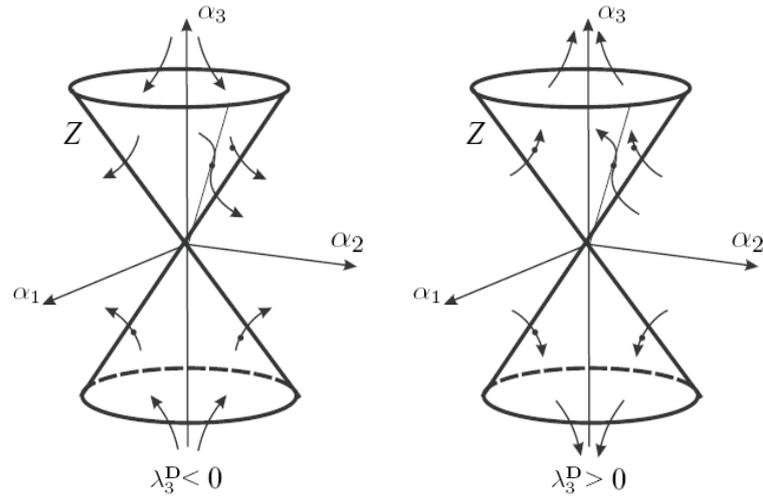


Fig. 2.18: Direções das trajetórias materiais na fronteira do cone  $Z$  (em  $\boldsymbol{\alpha} = 0$ ) quando o tensor  $\mathbf{A}_2$  é positivo semi-definido nesse cone. Reproduzido de Haller [14]

$$\mathfrak{H}(t) = \mathfrak{H}^-(t) + \mathfrak{H}^+(t) \quad (2.146)$$

O domínio elíptico  $\mathfrak{E}(t)$  é formado por um conjunto de pontos onde  $\mathbf{A}_2^Z$  é indefinido. Esses domínios são tipicamente tridimensionais separados por uma fronteira bidimensional. A hiperbolicidade lagrangiana (comportamento ponto de sela) é o tipo de estabilidade na qual trajetórias se encontram em regiões de estiramento e compressão material. Haller [14] propõe, na forma de um teorema, que se uma trajetória se encontra no domínio hiperbólico  $\mathfrak{H}(t)$  necessariamente o tipo de estabilidade encontrado é o de hiperbolicidade lagrangiana. Portanto, o autor propõe a associação de um conceito puramente lagrangiano de estabilidade de trajetórias com o conceito euleriano de separação do espaço tridimensional em regiões distintas.

Ainda no teorema postulado pelo autor, se uma trajetória permanece na região  $\mathfrak{H}^-(t)$  existe uma curva material unidirecional de partículas de fluido que converge para a trajetória, enquanto a mesma permanece nessa região ao mesmo tempo que uma superfície material bidimensional, formada por partículas fluídas que converge para a trajetória em um instante de tempo anterior enquanto esta per-

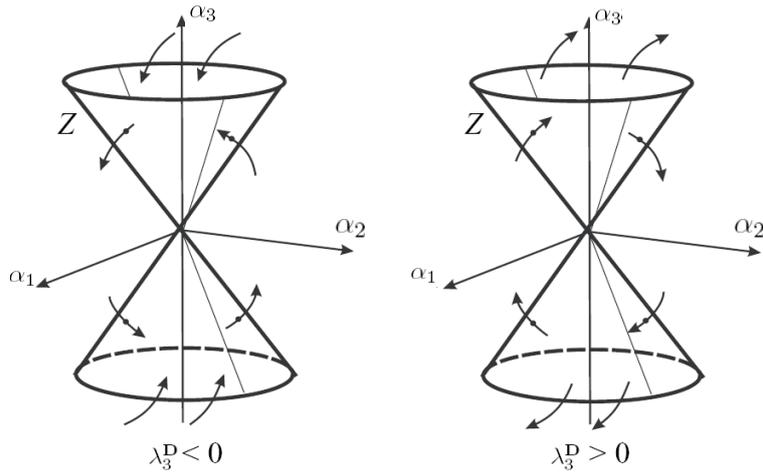


Fig. 2.19: Direções das trajetórias materiais na fronteira do cone  $Z$  (em  $\boldsymbol{\alpha} = 0$ ) quando o tensor  $\mathbf{A}_2$  é indefinido nesse cone. Reproduzido de Haller [14]

manece em  $\mathfrak{H}^-(t)$ . Um paralelo do que foi dito também pode ser dito para o caso de uma trajetória que se mantém na região  $\mathfrak{H}^+(t)$ .

O teorema implica que trajetórias que permanecem na região hiperbólica tendem a se alinhar com os autovalores do tensor taxa de deformação e a definição proposta por Haller [14] identifica vórtices como regiões contínuas de trajetórias materiais que permanecem na região elíptica ( $\mathbf{A}_2^Z$  indefinido), onde *o alinhamento das trajetórias desafia a tendência indicada pelas direções principais da taxa de deformação*. Para a aplicação da definição de vórtice, torna-se necessário então avaliar a definibilidade do tensor  $\mathbf{A}_2$  ao longo do cone  $Z$ . Para tanto,  $\mathbf{A}_2^Z$  é positivo definido se e somente se o polinômio de quarta ordem

$$p^4 + Ap^3 + Bp^2 + Cp + D = 0 \quad (2.147)$$

não possuir raízes no intervalo  $[-1,1]$ . Os coeficientes do polinômio (2.147) são dados pelas relações

$$A = 4\sqrt{a}(1-a) \frac{M_{13}[M_{11}(1-a) - M_{22}a] + 2aM_{12}M_{23}}{D_0} \quad (2.148)$$

$$B = 4a \frac{(M_{13})^2(1-a)^2 + (1-a)(a(M_{23})^2 - M_{12})}{D_0} + 2a \frac{[M_{11}(1-a) - M_{22}a][M_{33}(1-a) + M_{22}]}{D_0} \quad (2.149)$$

$$C = 4\sqrt{a^3}(1-a) \frac{M_{13}[M_{33}(1-a) + M_{22}] - 2M_{12}M_{23}}{D_0} \quad (2.150)$$

$$D = a^2 \frac{[M_{33}(1-a) + M_{22}]^2 - 4(1-a)(M_{23})^2}{D_0} \quad (2.151)$$

onde

$$D_0 = [M_{11}(1-a) + M_{22}a]^2 + 4(M_{12})^2a(1-a) \neq 0 \quad (2.152)$$

Onde  $a$  é definido pela relação (2.142). Nos coeficientes representados acima,  $M_{ij} = (\hat{A}_2)_{ij}$  representa os componentes do tensor  $\mathbf{A}_2$  escrito na base ortonormal cujas direções são dadas pelos autovalores do tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$ . O fato de  $\mathbf{A}_2$  ser positivo definido também implica que  $\mathbf{A}_2^Z$  o seja. Este primeiro será positivo definido se e somente se

$$(4\|\mathbf{D}\|^4 - \|\mathbf{A}_2\|^2)\|\mathbf{D}\|^2 > \det \mathbf{A}_2 > 0 \quad (2.153)$$

A busca por um critério de identificação de vórtices que interligue as equações que descrevem a dinâmica do escoamento com a evolução de suas estruturas vorticais é interessante, pois possibilitaria, em uma visão mais ampla, a caracterização do próprio escoamento. Além disso, a correlação das propriedades do material com a dissipação ou excitação de estruturas vorticais em um dado escoamento, apesar de intuitiva, como no caso da viscosidade, não possui uma associação direta. A caracterização da equação de Navier-Stokes com o critério proposto foi descrito por Haller [14] em seu artigo, aplicando o operador gradiente em ambos os lados da equação, resultando na equação diferencial

$$\frac{d}{dt}\mathbf{D} = -(\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2) - \frac{1}{\rho}\mathbf{P} + \nu\Delta\mathbf{D} \quad (2.154)$$

onde  $P_{ij}$  é a Hessiana da pressão. Substituindo a Eq. (2.154) na Eq. (2.133), temos que

$$\mathbf{A}_2 = (\mathbf{D} - \mathbf{W})(\nabla\mathbf{u}) - \frac{1}{\rho}\mathbf{P} + \nu\Delta\mathbf{D} \quad (2.155)$$

Assim, o critério proposto por Haller [14] identifica estruturas vorticais como regiões contínuas e compactas onde

$$\mathbf{A}_2^Z = [(\mathbf{D} - \mathbf{W})(\nabla\mathbf{u}) - \frac{1}{\rho}\mathbf{P} + \nu\Delta\mathbf{D}]_Z \quad (2.156)$$

é indefinido. Anulando o termo dissipativo da equação de Navier-Stokes é possível também obter a restrição de  $\mathbf{A}_2$  ao cone  $Z$  também para a equação de Euler.

Dentre os problemas identificados por Haller [14] para seu critério  $\mathbf{A}_2^Z$  podemos destacar o fato de que em trajetórias integradas por um longo espaço de tempo podem, numericamente, dispor-se fora da região elíptica, mesmo que essa trajetória se encontre nesse subdomínio. Esse comportamento é também encontrado quando as trajetórias encontradas no escoamento são caóticas, entretanto, eventualmente essas trajetórias podem dispor-se fora da região elíptica também se o tempo de integração for menor que um determinado tempo menor. Por tratar-se de um critério que avalia quantidades eulerianas ao longo da trajetória lagrangiana, a escolha do tempo de integração recebe elevada relevância e, segundo o autor, a definição que melhor descreve o critério é tal que vórtices são um conjunto de trajetórias materiais cujas trajetórias apresentam, por um tempo maior, em relação ao tempo total,  $\mathbf{A}_2^Z$  indefinido, ou seja, avalia-se o tempo de indefinição de  $\mathbf{A}_2^Z$  em um conjunto de trajetórias com relação aos seus vizinhos. Outros aspectos limitantes a serem destacados encontram-se no fato dessa definição de vórtices não avaliar o comportamento desse tipo de estrutura em escoamentos compressíveis e também, não diretamente, em escoamentos bidimensionais, nem em escoamentos

quasi-planos.

O critério proposto por Haller [14] além de abordar a necessidade de busca por um critério de identificação de vórtices objetivo, se diferencia dos outros critérios apresentados nesse capítulo pois, além de se fundamentar em conceitos puramente dinâmicos, busca associar o movimento vortical com a descrição da história de deformações no escoamento, com o objetivo de avaliar a tendência de alinhamento entre a taxa de deformação e uma medida de sua derivada temporal. O critério proposto no presente trabalho, que será apresentado com detalhes no capítulo 3, apresenta a mesma fundamentação do critério descrito acima, mas sem os problemas inerentes já discutidos. O principal ponto comum reside do grau de alinhamento da aceleração de deformação com a taxa de deformação.

## **2.5 O que se esperar de uma definição de vórtices?**

Após os comentários dispostos nesse capítulo sobre os conceitos fundamentais que diferenciam os critérios e que causam conflitos na tentativa de busca de uma definição de vórtices com aceitação plena, além da descrição minuciosa dos critérios mais relevantes existentes na literatura, apontando suas desvantagens e qualidades, observa-se que apesar de não existir uma concordância plena nos requisitos necessários para uma definição ideal, alguns tópicos são apontados consensualmente por todos os autores. Esse trabalho diverge em alguns requisitos listados e inclui alguns apontados por poucos trabalhos por acreditar na sua importância de diferenciar movimento vortical de outros efeitos ou mesmo identificar estruturas vorticais em escoamentos que apresentem especificidades.

Um ponto de grande divergência desse trabalho com a maioria dos critérios descritos nesse capítulo é a necessidade de invariância do parâmetro classificativo com transformações no observador mais gerais que simplesmente a invariância galileana. Exemplos foram expostos ao longo do capítulo, demonstrando que, quanto mais abrangente for o critério maior será o número de casos passíveis de serem avaliados e mais próximo de uma definição este se encontrará. Portanto,

serão propostos por esse trabalho alterações em alguns critérios existentes, para que esses se tornem euclidianamente invariantes e novos conceitos de vórtices objetivos serão introduzidos.

Outra premissa desse trabalho é a necessidade de estruturação de um critério que possua em sua formulação a liberdade de avaliação de estruturas vorticais em qualquer tipo de escoamento. Novamente a questão a justificativa apresentada no parágrafo anterior ganha força nesse requisito e, de certa forma, invalida critérios que não contemplam a compressibilidade do escoamento ou mesmo em parâmetros classificatórios que avaliem somente vórtices descritos somente pela equação de Navier-Stokes. Evidentemente, há vórtices em escoamentos de gases que experimentam a compressibilidade. Da mesma forma, existem vórtices em escoamentos de fluidos não-Newtonianos.

A necessidade de identificação do centro ou o eixo da estrutura vortical é discutida e também é almejada pelos principais trabalhos existentes na literatura científica. Sua localização no escoamento permite a avaliação de como uma estrutura vortical evolui no tempo e no espaço e sua interação com contínuo e com vórtices presentes na sua vizinhança. Apesar de não ser um requisito essencial para uma definição, essa possibilidade de identificação é importante e ganha relevância neste trabalho.

Apesar de parecer, em um primeiro momento, mais atraente e intuitiva a identificação de estruturas vorticais por meio da avaliação das trajetórias de partículas imersas no escoamento, a abordagem lagrangiana apresenta deficiências e, por definição, leva a critérios subjetivos, visto que a busca por um tempo mínimo de integração para que movimento vortical possa ser comprovado varia de acordo com o escoamento. Mesmo quando esse tempo é estimado com base nas características macroscópicas do escoamento, a existência de vórtices cujas características fujam do comportamento global pode ser evidenciada. Além disso, a integração por tempos demasiadamente altos pode levar a trajetória, eventualmente, para a vizinhança da estrutura vortical, principalmente em vórtices com

acentuado nível de estiramento axial, excluindo essa região do critério. Portanto, no presente trabalho, entende-se que a formulação euleriana é aquela que melhor atende a descrição de vórtices como estruturas contínuas distribuídas, como um campo material, no domínio do escoamento.

A formulação de um critério que possibilite a associação da presença e da evolução de estruturas vorticais com conceitos dinâmicos do escoamento, por exemplo, avaliando a influência dos termos da equação de momentum na excitação e na dissipação de vórtices é importante. Essa importância é evidenciada em escoamentos turbulentos, onde estruturas coerentes domina o transporte e dissipação de energia, das menores para as maiores estruturas, bilateralmente. Essa associação poderia permitir a caracterização desse fenômeno fortemente não-linear e a consequente formulação de melhores modelos descritivos.

Outro ponto pouco abordado pelos trabalhos de referência é a necessidade de normalização desses critérios com o objetivo de criar uma base de comparação comum que descreva o comportamento local com um comportamento de referência do fenômeno, sem que este seja dependente do escoamento. Outro motivo que reforça a importância da normalização do parâmetro classificatório é a eventual diminuição do efeito de avaliação de um critério a partir de um determinado patamar subjetivo, dependente das condições do escoamento. No capítulo 3 serão propostas normalizações para os principais critérios descritos no presente capítulo de tal forma que este siga a normalização do novo critério apresentado.

# Capítulo 3

## Identificação de Vórtices: Novas Perspectivas

A proposta do presente capítulo é apresentar uma nova visão sobre a questão da identificação de vórtices, propondo modificações nos principais critérios existentes, discutidos no capítulo 2, assim como novos critérios baseados na história de deformação a qual o fluido encontra-se submetido. Cabe ressaltar que os critérios selecionados e dispostos nesse capítulos, com novas formulações, serão utilizados em escoamentos caóticos, soluções de vórtices e escoamentos turbulentos no capítulo 5, em sua formulação original e dentro da nova abordagem discutida no presente capítulo.

A importância da objetividade já foi discutida no capítulo 2 e constitui uma das premissas da identificação de estruturas vorticais do presente trabalho. O tensor gradiente de velocidade, assim como o tensor vorticidade são entidades não-objetivas e, portanto, a necessidade de entidades que tornem essas grandezas invariantes a transformações euclidianas, preservando as características fundamentais desse tensores, mas que ao mesmo tempo sejam objetivas. A metodologia primária de transformação dos critérios existentes em operadores objetivos é incluir a taxa a rotação dos autovetores do tensor taxa de deformação, descontando-a da vorticidade e, conseqüentemente, do tensor gradiente de velocidade.

Os novos critérios propostos nesse capítulo se baseiam em uma derivada temporal objetiva recursiva apresentada por Rivlin e Ericksen [41] e que foi utilizada

no critério de identificação apresentado por Haller [14]. É importante ressaltar que os critérios propostos nesse capítulo divergem do critério  $M_z$  no que diz respeito às suas formulações, não apresentando as limitações no mesmo e que foram apontadas no capítulo 2.

Escoamentos que tendem a dispor suas estruturas vorticais características ao longo de direções bem determinadas no domínio encontram dificuldades em ter sua topologia corretamente representadas por alguns critérios, principalmente quando estes avaliam a magnitude de uma determinada entidade, sem preocupação com a decomposição dessa entidade com alguma base representativa fisicamente ou mesmo no sistema de coordenadas do domínio. A correta classificação de vórtices, diferente da identificação pura, parece não ser possível sem a decomposição do parâmetro-alvo em direções distintas e coerentes. Com o objetivo de classificação de vórtices, serão apresentados nesse capítulo novos critérios isotrópicos e anisotrópicos, que classifiquem a estrutura vortical com relação às direções principais de deformação.

### 3.1 Classificação de Escoamentos

A classificação de escoamentos é um campo de estudo que mantém uma relação íntima com os critérios de identificação de estruturas vorticais, visto que muitos critérios buscam, a partir de parâmetros relacionados com a cinemática, ou mesmo com a dinâmica do escoamento, reconhecer se uma determinada região constitui ou não um vórtice. Muitos critérios foram formulados com base em parâmetros classificatórios de escoamentos, como o caso do próprio número de vorticidade,  $N_k$  que foi aplicado por Melander e Hussain [32] e, recentemente, Pradeep e Hussain [33] na identificação de vórtices.

O estudo de classificação de escoamentos se tornou importante principalmente no contexto da mecânica dos fluidos não-Newtonianos. A descoberta do fato de que mudanças na cinemática imposta ao escoamento poderiam mudar em algumas ordens de grandeza a resistência resultante do material mostrou a importância

de se conhecer essa cinemática e descrevê-la, no contexto do escoamento. Um dos primeiros trabalhos a explicitar esse tipo de comportamento foi realizado por Ziabicki [43], comparando o comportamento de materiais poliméricos submetidos a cinemáticas de cisalhamento e extensão. A importância desse fato é o reconhecimento que funções reológicas do material são dependentes não somente do segundo invariante do gradiente de velocidade, mas também do tipo de escoamento ao qual esse material encontra-se submetido. Em outras palavras, fluidos não-Newtonianos não somente têm um conjunto de funções materiais associadas com os valores do gradiente de velocidade, mas também com as direções desse tensor. Isso acontece por que esse tipo de material geralmente é formado por microestruturas que se alinham em uma determinada direção e a origem desse tipo de reação encontra-se justamente na capacidade do escoamento de distorcer esse tipo de microestrutura. É comum na literatura a idéia de que, escoamentos extensionais (sem cisalhamento) distorcem significativamente essas microestruturas enquanto que os escoamentos viscométricos não apresentam a mesma capacidade. Escoamentos extensionais também podem apresentar efeitos de atração da orientação da micro estrutura de forma a permitir que essa se oriente de acordo com os eixos principais do escoamento. Portanto, é comum, no estudo da mecânica dos fluidos não-Newtonianos, dizer que, enquanto escoamentos extensionais tendem a distorcer o material exponencialmente no tempo, escoamentos viscométricos tendem a distorcer tais filamentos linearmente.

A conclusão feita no parágrafo anterior é a base de definição de uma classe de movimentos conhecida como Movimentos Com História de Deformação Constante (MWCSH - *Motions With Constant Stretch History*). Nessa classe de movimentos, as funções materiais são geralmente obtidas a partir de um escoamento em regime permanente, em uma abordagem lagrangiana. O gradiente de deformação relativo, responsável pelo mapeamento de representação de fibras em seu estado deformado com relação ao seu estado original ( $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$ ) é definido nessa classe de movimentos como

$$F_0(\tau) = Q(\tau)exp(\tau\mathbf{M}) \quad (3.1)$$

onde  $Q(\tau)$  é um tensor ortogonal que varia com o tempo e que apresenta a propriedade  $Q(0) = 1$  e  $\mathbf{M}$  é um tensor que não depende do tempo. É importante ressaltar que instante de tempo  $\tau$  se refere, na linha cronológica a um tempo anterior ao tempo atual  $t$ , onde as deformações sofridas pelo material são importantes na descrição da deformação no estado presente. É possível concluir, portanto, que no estudo da mecânica dos fluidos Newtonianos, o instante de tempo  $\tau$  é o próprio instante presente  $t$ , visto que os fluidos Newtonianos não apresentam qualquer tipo de efeito de memória.

A Eq. (3.1) leva a um comportamento não-exponencial quando  $\mathbf{M}$  é nilpotente, ou seja, todos os autovalores são nulos para  $\mathbf{M} \neq 0$  ou quando o tensor apresenta um autovalor nulo e outros dois formando um par complexo conjugado, cujas partes reais são nulas. Nesse último caso, a deformação pode ser interpretada como uma função periódica. Em outras palavras, quando os autovalores de  $\mathbf{M}$  apresentam partes reais não nulas, existem filamentos materiais que se deformam exponencialmente no tempo. Para os casos nilpotentes, os filamentos podem crescer linearmente ou quadraticamente, dependendo se o movimento viscométrico é de segunda ordem (escoamento entre placas planas com uma das placas se movendo) ou de terceira ordem (se as duas placas se moverem na mesma direção, mas em sentidos diferentes). Em outras palavras,  $\mathbf{M}$  é nilpotente de 2ª ordem ( $\mathbf{M} \neq 0$  e  $\mathbf{M}^2 = 0$  - escoamento viscométrico) ou de 3ª ordem ( $\mathbf{M} = 0$ ,  $\mathbf{M}^3 \neq 0$  - duplo viscométrico superposto). Nessa perspectiva, movimentos do tipo MWCSH extensionais são definidos pelo crescimento exponencial de filamentos materiais submetidos a tal movimento.

### 3.1.1 Critério de Classificação Proposto por Tanner e Huilgol [15]

A conclusão descrita no parágrafo acima motivou Tanner e Huilgol [15] a definir um escoamento como *forte* quando pelo menos um dos autovalores do

gradiente de velocidade (ou do seu transposto) apresenta parte real positiva. Para os casos que não atendem tal definição, o escoamento seria definido como *fraco*. Em outras palavras, um escoamento forte, segundo a definição apresentada pelos autores, é aquele cujos filamentos materiais crescem exponencialmente no tempo. Como apontado por Astarita [16], o critério só fará sentido se o movimento for passível de ser descrito como um movimento do tipo MWCSH. Nesse caso, a base do critério seria melhor definida a partir do tensor  $\mathbf{M}$  no lugar do gradiente de velocidade.

Por depender do gradiente de velocidade, como já discutido no capítulo 2, o critério não é objetivo. Thompson e de Souza Mendes [44] modificaram o critério proposto por Tanner e Huigol de forma a estender esse tipo de definição forte-fraco para escoamento que não sejam MWCSH, considerando os autovalores do tensor  $\overline{\nabla \mathbf{v}} = \nabla \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{D}}$ , ao invés do tensor gradiente de velocidade. O tensor  $\boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{D}}$  representa o tensor antissimétrico que representa a taxa de rotação dos autovetores de  $\mathbf{D}$ . Esse tipo de análise pode ser tratada como uma análise de estabilidade linear que descrevam trajetórias dadas a equação  $\dot{\mathbf{x}} = \overline{\nabla \mathbf{v}} \mathbf{x}$ .

Apesar da denominação forte-fraco ter se tornado comum na literatura da mecânica dos fluidos não-Newtonianos a partir do critério proposto por Tanner e Huilgol [15], nem mesmo a versão objetiva proposta por Thompson e de Souza Mendes [44] atendem os requisitos mínimos desejáveis para uma definição geral de escoamentos. Um exemplo destas limitações, é o seu caráter qualitativo, ou seja, não é possível comparar diferentes tipos de escoamento da mesma classe (forte ou fraco).

O motivo pelo qual movimentos que não sejam da classe MWCSH podem apresentar comportamento diferente é explicado pelo fato de que  $\nabla \mathbf{v}$  (ou  $\overline{\nabla \mathbf{v}}$ ) pode depender do tempo  $t$ . Um exemplo desse tipo de escoamento é conhecido como escoamento de cisalhamento exponencial [45], cuja taxa de cisalhamento cresce exponencialmente no tempo.

### 3.1.2 Bases Para Classificação de Escoamentos Proposta por Astarita [16]

Astarita [16] propôs alguns requisitos para classificação de escoamento que serviram de base e que guiaram alguns estudos subsequentes sobre o tema. De acordo com o autor, um critério de classificação de escoamentos deve atender os seguintes requisitos:

- (A) O critério deve ser local, ou seja, pode ser calculado em um ponto no escoamento;
- (B) O critério deve ser objetivo, ou seja, invariante a transformações euclidianas nos sistemas de coordenadas;
- (C) O critério deve poder ser aplicado a todos os tipos de escoamento, sem restrição a determinadas classes.

Astarita [16] também separou em dois tipos os critérios de classificação que devem atender os requisitos e que seguem a descrição abaixo:

- Critérios puramente cinemáticos, que não levem em consideração as propriedades do material;
- Critérios dependentes da cinemática dos escoamentos e de alguns parâmetros reológicos do material;

Os requisitos (A)-(C) são importantes e, apesar de parecerem simples em um primeiro momento, apresentam grande complexidade para serem obtidos, mesmo no estudo da mecânica dos fluidos Newtonianos. Os tipos de critérios propostos por Astarita [16], devem ser respaldados pela hipótese de que variáveis cinemáticas são independentes e que a interação com as propriedades do material ocorre somente com essas variáveis. Thompson [18] propôs uma nova separação, onde expande a possibilidade de que outras variáveis sejam os parâmetros independentes da análise. O autor, propõe que, por exemplo, se tenha um

critério baseado somente na tensão e um segundo critério baseado na tensão e em parâmetros reológicos.

### 3.1.3 Persistência de Deformação e Classificação de Escoamentos

O conceito de persistência de deformação é fundamental para o entendimento da classificação de escoamentos, dentro do atual contexto. A idéia foi introduzida por Lumley [46], associado com o estudo de inserção de aditivos poliméricos em escoamentos turbulentos para a diminuição de arrasto, mas a expressão "persistência de deformação" foi aplicada por Frank e Mackley [47] em um trabalho experimental. Astarita [16] descreveu o conceito de persistência de deformação no contexto de líquidos poliméricos conforme o parágrafo abaixo:

*“Se a maior taxa de estiramento é sempre aplicada no mesmo filamento material, um líquido elástico pode acumular tensões devido às progressivas deformações a uma taxa competitiva com a taxa de relaxação de tensão. Se, entretanto, o material gira, o mesmo filamento material não é exposto a maior taxa de estiramento e, de fato, poderá atingir eventualmente estiramentos negativos, de tal forma que a acumulação de tensões se torna menos severa.”.*

O conceito de persistência de deformação descrito acima encaminha algumas interpretações. A primeira diz respeito aos escoamentos extensionais, onde esse fenômeno é bastante relevante. De fato, se olharmos para a definição proposta por Coleman [48] e que foi levemente modificada posteriormente por Thompson [18], chega-se a conclusão que a persistência de deformação é máxima nesse tipo de movimento. Coleman [48] definiu que o movimento extensional acontece quando existir por intervalo de tempo considerável no escoamento, pelo menos uma base ortonormal tal que o tensor gradiente de velocidade nessa base tenha a forma

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\nabla \mathbf{v}}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\nabla \mathbf{v}}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{\nabla \mathbf{v}}(t) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde  $\lambda_i^{\nabla \mathbf{v}}(t)$  representa os autovalores do gradiente de velocidade. Portanto, os filamentos materiais em um escoamento extensional que coincidirem com os autovetores de  $\nabla \mathbf{v}$  apresentam persistência de deformação (alongação ou compressão). Além disso, é possível também concluir que a medida da persistência de deformação trata da medição do quão próximo o escoamento se encontra com relação ao movimento extensional. Outra conclusão importante é a de que o escoamento experimenta a mínima persistência de deformação quando este se aproxima do movimento de corpo rígido. Nesse caso, o filamento material que se encontra na iminência de sofrer estiramento ou compressão em uma determinada direção é logo submetido a rotação, dando lugar a um novo filamento que se orientará nessa direção.

### 3.1.3.1 O Critério de Classificação de Escoamento de Astarita [16]

Uma abordagem para se identificar o conceito de persistência de deformação é propor um parâmetro que se anule em escoamentos extensionais e seja diferente de zero, caso contrário, objetivando quantificar quanto não-persistente é o escoamento. Visto que escoamentos extensionais são geralmente descritos em um sistema de coordenadas tal que o escoamento é irrotacional, algumas tentativas de medição utilizando o número de vorticidade (ou algum outro parâmetro semelhante), proposto por Truesdell [49] foram realizadas em diversos trabalhos, como, por exemplo, aqueles apresentados por Astarita [50], Frank and Mackley [47], Dresselhaus e Tabor [51], Hunt et al. [2], Weiss [52], Zhang and Holden [53], Melander e Hussain [32] e Pradeep e Hussain [33]. Esses parâmetros são baseados na competição entre a taxa de deformação e a taxa de rotação. Dentre os trabalhos descritos anteriormente, alguns se destacam por buscarem a definição de vórtices a partir de tal parâmetro, como os trabalhos de Hunt et al. [2], Melander e Hussain [32] e Pradeep e Hussain [33].

Um dos problemas da aplicação dos parâmetros descritos acima na classificação de escoamentos encontra-se no fato de que existem escoamentos exten-

sionais que são também rotacionais, como aquele apresentado por Huilgol [54]

$$\mathbf{v} = (ax - wy)\mathbf{e}_x + (ax + wy)\mathbf{e}_y - 2az\mathbf{e}_z \quad (3.3)$$

onde  $a$  e  $w$  são constantes. Outro problema do uso desse tipo de critério encontra-se no fato de que o número de vorticidade, como um parâmetro classificatório, não é indiferente a transformações euclidianas, ou seja, não é objetivo. Portanto, um segundo observador que gire com relação ao primeiro que identifique o escoamento como extensional irrotacional, poderá identificar esse escoamento com vorticidade diferente de zero. Astarita [16], atento à origem do problema, propôs que seria importante medir não a taxa de rotação do fluido simplesmente, mas a taxa de rotação relativa aos eixos principais do tensor taxa de deformação,  $\mathbf{D}$  e que fosse então levado em consideração para a quantificação da persistência de deformação o parâmetro  $R_D$ , definido como

$$R_D = -\frac{\text{tr}\overline{\mathbf{W}}^2}{\text{tr}\mathbf{D}} \quad (3.4)$$

Onde a quantidade  $\overline{\mathbf{W}}$  é a taxa de rotação relativa definida como  $\overline{\mathbf{W}} \equiv \mathbf{W} - \Omega^{\mathbf{D}}$  [55]. Entretanto, o tensor  $\Omega^{\mathbf{D}}$  não é definido de forma plena em todos os tipos de escoamento. Se  $\mathbf{D}$  apresentar dois autovalores repetidos,  $\lambda_1^{\mathbf{D}} = \lambda_2^{\mathbf{D}} \neq \lambda_3^{\mathbf{D}}$ , qualquer direção no plano definido pelo o autovetor correspondente a  $\lambda_3^{\mathbf{D}}$  é um autovetor de  $\mathbf{D}$ . Neste caso, Druot [55] recomendou que  $\Omega_{12}^{\mathbf{D}} = W_{12}$ . Essa recomendação foi justificada por Astarita [16] pelo fato de que uma rotação do material nesse plano não alivia a tensão experimentada por qualquer filamento material no mesmo plano, visto que o filamento não visita direções de mais baixas taxas de deformação. O desempenho do parâmetro  $R_D$  foi testado em escoamentos bidimensionais e foi descrito que em escoamentos viscométricos (cisalhantes)  $R_D$  é igual a unidade e em escoamento extensionais o mesmo é nulo. Quando o movimento tende ao movimento de corpo rígido,  $R_D \rightarrow \infty$ , visto que  $\mathbf{D}$  tende para um tensor nulo. Como avaliado por Thompson e de Souza Mendes [17], o

parâmetro funciona consideravelmente bem em escoamentos bidimensionais.

Entretanto, Huilgol [54] apresentou uma crítica ao trabalho de Astarita em diversos aspectos utilizando exemplos de escoamentos tridimensionais. Apesar de alguns argumentos terem sido defendidos a partir de argumentos lógicos em uma réplica [56], algumas deficiências do parâmetro  $R_D$  foram expostas. A principal inconsistência pode ser entendida a partir do exemplo abaixo, utilizado por Thompson e de Souza Mendes [17]. Seja o campo de velocidades descrito na forma

$$\mathbf{v} = [(a + \epsilon)x - wy]\mathbf{e}_x + [wx + (a - \epsilon)y]\mathbf{e}_y - 2az\mathbf{e}_z \quad (3.5)$$

onde  $a$ ,  $\epsilon$ ,  $w$  são constantes. O parâmetro  $R_D$  é dado por

$$R_D = \frac{w^2}{3a^2 + \epsilon^2} \quad (3.6)$$

Um dos argumentos de Huilgol [54] foi o de que o parâmetro  $R_D$  não é um critério de classificação biunívoco, pois, para o caso em que  $w^2 = 3a^2 + \epsilon^2$ ,  $R_D$  é igual a unidade, mesmo o escoamento não sendo de cisalhamento [44]. Outro aspecto apontado por Huilgol [54] que mostra uma grande deficiência do parâmetro proposto por Astarita [16] encontra-se na descontinuidade quando o escoamento (3.5) tem a constante  $\epsilon$  tendendo a zero em comparação com o caso em que esta constante é igual a zero. Para os casos  $w \neq 0$  e  $\epsilon = 0$ , o escoamento é extensional e  $R_D = 0$ , mas, para o caso  $\epsilon \rightarrow 0$ , o parâmetro  $R_D = \frac{w^2}{3a^2}$ , ou seja, um escoamento na iminência de se tornar um escoamento extensional não apresenta valores baixos de  $R_D$ . Esse comportamento não é desejável em um parâmetro de classificação de escoamentos e o ideal seria que este tendesse de maneira contínua entre regiões com diferentes comportamentos cinemáticos.

É importante também ressaltar os trabalhos de Dresselhaus e Tabor [51], Dresselhaus e Tabor [57] e Tabor e Klaper [4] que conduziram trabalhos paralelos, que também resultaram no reconhecimento da importância da vorticidade relativa

na identificação de padrões de estiramento e alinhamento de elementos materiais no escoamento. Esses estudos resultaram nesse tipo de análise sem qualquer apelo para a objetividade, em um primeiro momento.

Thompson e de Souza Mendes [44] compararam a versão modificada (para escoamentos que não pertençam a classe de MWCSH) do critério proposto por Tanner e Huilgol [15] e o parâmetro  $R_D$  para escoamentos incompressíveis. Os autores mostraram que quando o escoamento obedece a condição

$$\det \mathbf{D} + \text{tr} \overline{\mathbf{W}} \mathbf{D} \overline{\mathbf{W}} = 0 \quad (3.7)$$

que engloba, mas não se restringe a escoamentos bidimensionais, a correlação entre os dois critérios, é biunívoca e dada por

→  $R_D < 1 \Leftrightarrow$  escoamento forte;

→  $R_D \geq 1 \Leftrightarrow$  escoamento fraco;

Existem alguns escoamentos tridimensionais da classe dos escoamentos quasi-planos que também atendem a relação (3.7). Definido por Thompson e de Souza Mendes [44], os escoamentos quasi-planos são aqueles que têm um autovalor nulo para o tensor taxa de deformação,  $\mathbf{D}$ . Quando o vetor vorticidade relativa (associado ao tensor  $\overline{\mathbf{W}}$ ) não se encontra alinhado com o autovetor correspondente ao autovalor nulo, então o escoamento não é bidimensional.

### 3.1.3.2 Critério Proposto por Thompson e de Souza Mendes [17]

Examinando as inconsistências do critério proposto por Astarita [16] levantados por Huilgol [54], Thompson e de Souza Mendes [17] propuseram o que parece ser o primeiro parâmetro passível de ser aplicado em escoamento tridimensionais. Sua análise foi complementada em um trabalho subsequente [58], onde a inclusão de mais argumentos consistentes levaram aos mesmos resultados obtidos anteriormente. As principais conclusões de uma análise mais aprofundada dos motivos que resultaram na falha do critério  $R_D$  como um parâmetro de classificação de

escoamentos, ou seja, um parâmetro quantitativo da persistência de deformação foram:

- (1) A taxa relativa de rotação não afeta a persistência de deformação de um filamento material ortogonal ao plano de rotação relativa;
- (2) A taxa relativa de rotação afeta mais a persistência de deformação quando a diferença entre a taxa de deformação máxima e mínima no plano de rotação relativa é maior;

Com o objetivo de incorporar esses aspectos em um parâmetro medidor da persistência de deformação, Thompson e de Souza Mendes [58] consideraram os termos fora da diagonal do tensor taxa de deformação,  $\mathbf{D}$ , quando esse tensor é representado na base de seus próprios autovetores. É importante ressaltar que esse componente se anula quando representado nessa base, visto que  $\mathbf{D}$  pode ser escrito agora como  $\mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^D \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$ . Os componentes fora da diagonal de  $\mathbf{D}$  representam a taxa de deformação angular de dois filamentos materiais que se encontram dispostos ao longo das direções indicadas pela posição do termo na matriz. Para o caso em que  $\mathbf{D}$  é representado na sua própria base, visto que elementos materiais que se disponham orientados ao longo dos três eixos principais somente giram com a vorticidade, não existe deformação angular instantânea entre esses dois filamentos. Assim, se  $m$  e  $n$  forem duas autodireções distintas, temos que

$$D_{mn} \equiv \frac{1}{2} \dot{\theta}_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{D} \mathbf{e}_n \quad (3.8)$$

onde  $e_m$  e  $e_n$  representam elementos materiais infinitesimais orientados nas direções  $m$  e  $n$ , respectivamente. Esses filamentos são pequenos o suficiente para assumir que eles apenas giram e mudam de tamanho, desprezando efeitos de dobra ou espiralamento. Além disso, seu comprimento característico é menor que o comprimento característico de variação do gradiente de velocidade. Apesar dos componentes  $D_{mn}$  serem nulos, como mostra a Eq. (3.8), a derivada material de

$D_{mn}$  não necessariamente é nula. E assim se fundamenta a persistência de deformação, conforme a descrição proposta por Thompson e de Souza Mendes [58]. Se filamentos materiais nas direções  $m$  e  $n$ , alinhados com dois autovetores de  $\mathbf{D}$ , em um determinado instante, de alguma maneira mudarem sua taxa de rotação, produzirão valores não nulos na posição  $mn$  do tensor taxa de deformação. Por outro lado, se filamentos materiais não mudarem sua taxa relativa de rotação, o movimento é dito persistente quanto a deformação. A derivada material de  $D_{mn}$  é dada por

$$\dot{D}_{mn} = \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{D}\mathbf{e}_m + \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{D}}\mathbf{e}_m + \mathbf{e} \cdot \mathbf{D}\mathbf{e}_m \quad (3.9)$$

A derivada material,  $\dot{\mathbf{D}}$  pode ser escrita utilizando a derivada temporal natural,  $\mathbf{D}'$ , a partir da relação

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{D}' + \boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{D}}\mathbf{D} - \mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{D}} \quad (3.10)$$

Filamentos materiais advectados pelos escoamento seguem a relação

$$\dot{\mathbf{x}} = \overline{\nabla \mathbf{v}}\mathbf{x} \quad (3.11)$$

Assim, combinando as Eqs. (3.9), (3.10) e (3.11) é possível reescrever a derivada material de  $D_{mn}$  como

$$\dot{D}_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot (\mathbf{D}\overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}}\mathbf{D})\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_m \tilde{\mathbf{P}}^{\mathbf{D}}\mathbf{e}_n \quad (3.12)$$

Na Eq. (3.12), os termos  $\mathbf{e}_m \mathbf{D}'\mathbf{e}_n$  e  $\mathbf{e}_m \mathbf{D}^2\mathbf{e}_n$  se anulam, pois apresentam termos não nulos somente na diagonal principal. Assim, a taxa de deformação angular entre dois filamentos materiais inicialmente alinhados com dois autovetores de  $\mathbf{D}$ , medem a não-persistência de deformação no plano definido pelas direções  $m$  e  $n$ .  $\tilde{\mathbf{P}}^{\mathbf{D}}$  é o tensor que representa o estado de persistência de deformação e a operação  $\mathbf{e}_r \tilde{\mathbf{P}}^{\mathbf{D}}\mathbf{e}_s$  indica a não-persistência de deformação medida entre duas

direções ortogonais quaisquer  $r$  e  $s$ .

A formulação de um parâmetro que meça o quão não persistente a deformação local é foi proposto por Thompson e de Souza Mendes [58] em forma de uma razão adimensional entre a intensidade da não persistência de deformação e o quadrado da intensidade do tensor taxa de deformação. Assim, o critério  $\mathfrak{R}$  foi equacionado pelos autores como

$$\mathfrak{R} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{P}}^{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^{\mathbf{D}})}}{tr \mathbf{D}^2} \quad (3.13)$$

Para o escoamento tridimensional proposto por Huilgol [54] e discutido anteriormente no contexto do critério  $R_D$ , o parâmetro  $\mathfrak{R}$  é dado por

$$\mathfrak{R} = \frac{w \|\epsilon\|}{3a^2 + \epsilon^2} \quad (3.14)$$

e, portanto,  $\mathfrak{R} = 0$  é uma condição necessária e suficiente para o escoamento ser extensional.

Escoamentos extensionais são geralmente divididos quanto disposição das direções de deformação (uniaxial, biaxial, planar e etc.) enquanto que escoamentos viscométricos são relacionados a uma única classe de funções materiais. Com o objetivo de caracterizar um escoamento qualquer e, em particular, escoamentos viscométricos, Thompson e de Souza Mendes [58] propuseram parâmetros complementares, definidos a partir das relações

$$\mathcal{Z} = \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D} \mathbf{e}_z}{(tr \mathbf{D}^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.15)$$

$$\mathcal{J} = \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{D}^2 \mathbf{e}_z}{tr \mathbf{D}^2} \quad (3.16)$$

$$\mathcal{C} = \frac{tr \mathbf{D}}{(tr \mathbf{D}^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.17)$$

Os parâmetros  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{C}$  representam, respectivamente, o componente adimensional de  $D_{zz}$ , uma medida não-negativa do quão tridimensional um escoamento se encontra (o parâmetro é, portanto, nulo para escoamento bidimensionais) e um número de compressibilidade. Para escoamentos viscométricos incompressíveis, temos que  $\mathcal{J} = 0$ ,  $\mathcal{C} = 0$  e  $\mathfrak{R} = 1$ .

### 3.1.3.3 Critério Proposto por Thompson [18]

Thompson [18], promoveu uma mudança na de abordagem na classificação da persistência de deformação ao buscar quantificar o quão longe uma determinada história de deformação se encontra de um história de deformação extensional, avaliando a diferença entre os tensores de Cauchy-Green, avaliados no movimento efetivo do mesmo tensor avaliado de uma história de deformação extensional, que apresente o mesmo valor do tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$ .

Além disso, o trabalho de Thompson [18] formulou parâmetros medidores da persistência de deformação efetiva no escoamento, cujas bases são compartilhadas nas novas propostas de critérios de identificação de estruturas vorticiais que serão apresentadas no presente trabalho.

Considerando dois tensores de segunda ordem  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$ , onde  $\mathbf{e}_i^{\mathcal{F}}$  e  $\lambda_i^{\mathcal{F}}$  são os autovetores e autovalores de  $\mathcal{F}$ , respectivamente. Definindo o tensor de quarta ordem  $\mathbf{I}^{\mathcal{F}\mathcal{F}}$  como

$$\mathbf{I}^{\mathcal{F}\mathcal{F}} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{e}_k^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{e}_k^{\mathcal{F}} \otimes \mathbf{e}_k^{\mathcal{F}} \quad (3.18)$$

É possível decompor o tensor  $\mathcal{G}$  de tal forma que

$$\mathcal{G} = \Phi_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} + \tilde{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} \quad (3.19)$$

sendo

$$\Phi_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} = \langle \mathbf{I}^{\mathcal{F}\mathcal{F}} \rangle \mathcal{G} \quad (3.20)$$

$$\tilde{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} = \langle \mathbf{I}^{\delta\delta} - \mathbf{I}^{\mathcal{F}\mathcal{F}} \rangle \mathcal{G} \quad (3.21)$$

onde o símbolo  $\langle \rangle$  define o produto entre o tensor de quarta ordem  $\mathbf{Q}$  e o tensor de segunda ordem  $\mathbf{B}$ , resultando em um tensor de segunda ordem  $\mathbf{A}$  seguindo a descrição

$$\mathbf{A} = \langle \mathbf{Q} \rangle \mathbf{B} \Leftrightarrow A_{ij} = \mathfrak{Q}_{ijkl} B_{kl} \quad (3.22)$$

Na Eq. (3.21), o tensor de quarta ordem  $\mathbf{I}^{\delta\delta}$  representa o tensor identidade que, quando aplicado a um tensor de segunda ordem resulta nesse próprio tensor de segunda ordem, ou seja,

$$\langle \mathbf{I}^{\delta\delta} \rangle \mathbf{B} = \mathbf{B} \quad (3.23)$$

A decomposição apresentada nas Eqs. (3.19), (3.20) e (3.21) segue as propriedades abaixo:

- (1)  $\Phi_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$  e  $\tilde{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$  são ortogonais;
- (2)  $\mathcal{F}$  e  $\Phi_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$  são coaxiais, ou seja, comutam;
- (3)  $\mathcal{F}$  e  $\tilde{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$  são ortogonais;
- (4)  $\tilde{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$  apresenta traço nulo;
- (5)  $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = \mathcal{F} \cdot \Phi_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$ ;
- (6)  $[\mathcal{F}, \mathcal{G}] = \left[ \mathcal{F}, \tilde{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} \right]$ , onde  $[\mathbf{F}, \mathbf{G}] \equiv \mathbf{FG} - \mathbf{GF}$  é o produto de Lie.

Thompson [18] denominou os termos  $\Phi_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$  e  $\tilde{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$  de partes do tensor  $\mathcal{G}$  *em fase* e *fora de fase* com o tensor  $\mathcal{F}$ . Os dois últimos ítems descritos anteriormente mostram que o produto interno é mantido na parte em fase, enquanto que o produto de Lie é mantido com a parte fora de fase. Thompson ainda propõe um parâmetro normalizado de medição do quanto o tensor  $\mathcal{G}$  encontra-se em fase com o tensor  $\mathcal{F}$ , que segue a relação

$$\hat{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\|\Phi_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}\|}{\|\mathcal{G}\|} \right) \quad (3.24)$$

onde  $\hat{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} \in [0, 1]$  e  $\hat{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} = 0$  constitui o caso onde não existe correlação entre os tensores  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  e  $\hat{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} = 1$  constitui o caso esses mesmos tensores são coaxiais, ou seja, compartilham os mesmos autovetores. A função foi construída de tal forma que  $\hat{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} + \hat{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} = 1$ , onde  $\hat{\Phi}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$  representa o parâmetro de quantificação da parte de  $\mathcal{G}$  fora de fase com o tensor  $\mathcal{F}$ , com relação a sua intensidade, de forma semelhante aquela mostrada na Eq. (3.24).

Visto que o gradiente de deformações,  $\mathbf{F}$ , é um tensor não objetivo, uma vez que rotações são consideradas no mapeamento da posição de fibras no estado atual ( $d\mathbf{x}$ ) com relação ao estado de referência ( $d\mathbf{X}$ ), é comum no estudo da mecânica do Fluidos não-Newtonianos, o uso do tensor de Cauchy-Green à direita para estudar o estado de deformação do escoamento. Esse tensor é definido como

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (3.25)$$

Entretanto, no estudo de escoamentos viscoelásticos, onde o histórico de deformação a partir de um instante de tempo anterior  $\tau$  é importante na determinação das funções materiais no tempo atual  $t$ , o estudo baseado no tensor de Cauchy-Green a direita deve, então, levar em consideração um mapeamento da deformação do tempo passado  $\tau$  para o presente. Para tal define-se o tensor de Cauchy-Green a direita relativo, que pode ser descrito como

$$\mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{F}_t^T(\tau) \mathbf{F}_t(\tau) \quad (3.26)$$

Supondo que as linhas de trajetória do escoamento sejam conhecidas e que o tensor de Cauchy-Green à direita relativo, também conhecido como tensor de deformação relativa, possa então ser calculado. Se  $\mathbf{C}(\tau)$  é diferenciável em  $\tau = t$ , então é possível definir o tensor de Rivlin-Ericksen [41],  $\mathbf{A}_n$  como

$$\mathbf{A}_n = \frac{d^n}{d\tau^n} \mathbf{C}_t(\tau)|_{\tau=t} \quad (3.27)$$

Portanto, para  $n = 0$ , temos que  $\mathbf{A}_n = \mathbf{I}$ , visto que  $\mathbf{C}_t(\tau)|_{\tau=t} = 1$ , ou seja, o tensor deformação relativa, calculado no tempo atual com relação a um tempo passado, é igual a identidade se o instante de tempo passado for o próprio tempo atual. Avaliando o tensor  $\mathbf{A}_1$ , temos que

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{C}_t(\tau) = \frac{d}{d\tau} [\mathbf{F}_t^T(\tau) \mathbf{F}_t(\tau)] \quad (3.28)$$

entretanto,

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{F}_t(\tau) = \nabla \mathbf{v}(\tau) \mathbf{F}_t(\tau) \quad (3.29)$$

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{F}_t^T(\tau) = \mathbf{F}_t^T(\tau) \nabla \mathbf{v}^T(\tau) \quad (3.30)$$

Portanto, aplicando a derivada de primeira ordem em  $\tau$  em  $\mathbf{C}_t(\tau)$ , de acordo com a Eq. (3.28), a partir das relações 3.29 e 3.30, temos que

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{F}_t^T(\tau) \nabla \mathbf{v}_t^T(\tau) \mathbf{F}_t(\tau) + \mathbf{F}_t^T(\tau) \nabla \mathbf{v}_t(\tau) \mathbf{F}_t(\tau) \quad (3.31)$$

para o caso do tensor de Rivlin-Ericksen  $\mathbf{A}_1$ , temos que

$$\mathbf{A}_1 = \left[ \frac{d}{d\tau} \mathbf{C}_t(\tau) \right]_{\tau=t} = \nabla \mathbf{v}^T(t) + \nabla \mathbf{v}(t) = 2\mathbf{D}(t) \quad (3.32)$$

Rivlin e Ericksen [41] propuseram uma forma recursiva para obtenção dos tensores  $\mathbf{A}_n$  que segue a relação

$$\mathbf{A}_{n+1} = \frac{d\mathbf{A}_n}{dt} + \mathbf{A}_n \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \mathbf{A}_n \quad (3.33)$$

O tensor  $\mathbf{A}_2$ , por exemplo, pode ser obtido a partir de 3.33, de acordo com a relação

$$\mathbf{A}_2 = \frac{d\mathbf{A}_1}{dt} + \mathbf{A}_1 \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \mathbf{A}_1 \quad (3.34)$$

Portanto, é possível afirmar que na Eq. (3.34) temos uma derivada objetiva, com relação ao tempo, do tensor taxa de deformação,  $\mathbf{D}$ . Além disso, pode-se observar que os dois termos finais à direita da Eq. (3.34) representam termos que a não objetividade da derivada material do tensor  $\mathbf{A}_1$ . Thompson [18], aplicou a transformação  $\mathcal{F} = \mathbf{A}_1$  e  $\mathcal{G} = \mathbf{A}_2$  na Eq. (3.24), obtendo portanto o parâmetro de quantificação da persistência de deformação que segue a forma

$$\hat{\Phi}_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1} = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\|\Phi_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1}\|}{\|\mathbf{A}_2\|} \right) \quad (3.35)$$

Um aspecto interessante deste novo parâmetro é o fato de o termo que se anula em  $\mathbf{A}_2$ , referente a derivada natural de  $\mathbf{A}_1$ , quando o escoamento é do tipo MWCSH, é levado em consideração. Aplicando esse parâmetro a um escoamento viscométrico, temos que

$$\hat{\Phi}_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1} = \frac{1}{2} \quad (3.36)$$

ou seja, escoamentos viscométricos se encontram na fronteira entre escoamento que são persistentes dominantes quanto a deformação e movimentos não persistentes dominantes. Esse resultado corrobora com a idéia de que, em escoamentos viscométricos, a taxa média de rotação é igual a taxa média de estiramento, ou seja,  $\|\Phi_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1}\| = \|\tilde{\Phi}_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1}\|$ .

## 3.2 Cinemática da Vorticidade

Nessa seção, apresentaremos os principais conceitos que regem a cinemática da vorticidade e que, ao longo dos anos, foram utilizadas como base para a fundamentação dos critérios de identificação de estruturas vorticiais apresentados no capítulo 2. O conceito de vórtice é intuitivo, apesar de relativamente complexo de

ser representado matematicamente. Lugt [21], entretanto, percebeu que o inverso acontece com a vorticidade, cuja representação matemática é clara, apesar de sua interpretação física necessitar de reflexão.

O conceito matemático de representação da vorticidade, conforme apresentado por muitos autores, e definido como o dobro da velocidade angular entre dois elementos materiais que se encontram inicialmente perpendiculares requer a generalização para um fluido deformável, visto que a definição descrita anteriormente remete, basicamente, a uma descrição de movimento de corpo rígido. Em primeiro lugar, a definição de velocidade angular, semelhante aquela descrita no movimento de corpo rígido é deficiente quanto observada do ponto de vista da mecânica dos fluidos, pois ao mesmo tempo que a partícula material gira esta também se deforma. Suponha um disco  $\mathcal{A}$  de raio  $\epsilon$  cujo vetor normal  $\mathbf{n}$  encontra-se no centro do disco na posição  $\mathbf{x}$ , podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} &= (\text{Velocidade tangencial média ao longo do disco } \mathcal{A})/\epsilon \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \oint_{\partial\mathcal{A}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{A}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (3.37)$$

A equação acima tende a  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}/2$  a medida que  $\epsilon \rightarrow 0$ . Portanto, a expressão 3.37 pode ser interpretada como a velocidade angular de um elemento fluido planar centrado em  $\mathbf{x}$ . Entretanto, esse tipo de definição não é geral, pois ele não considera que esse elemento planar possa se deformar, por conta de sua simetria. Supondo que o centro do elemento se encontra na fronteira do escoamento, onde, por exemplo, uma condição de não deslizamento e impermeabilidade seja aplicada, o centro  $\mathbf{x}$ , assim como toda uma linha meridional do disco permaneceram com velocidades nulas, enquanto que o resto do disco se movimentará, deformando o mesmo e descaracterizando sua topologia inicial.

A definição unificada de vorticidade deve caracterizar tanto a rotação de corpo rígido quanto o escoamento na região de fronteira. O presente trabalho segue a definição apresentada por [23] e que, por sua vez, atribui a Boussinesq sua autoria:

a vorticidade pode ser definida como sendo o dobro da velocidade angular dos eixos principais do tensor taxa de deformação de um elemento fluido centrado em  $\mathbf{x}$ .

A interpretação da vorticidade como uma função da velocidade angular, entretanto, não caracteriza essa última como uma entidade fundamental. Como indicado pela Eq. (3.37), o contrário mostra-se verdade. Para demonstrar essa relação, o presente trabalho apresentará o exemplo descrito por Wu et al. [35]. Expressando a vorticidade em um sistema de coordenadas intrínseco ao longo de uma linha de corrente  $C$  com comprimento de elemento igual a  $ds$ . Em cada ponto de  $C$ , existem três eixos ortonormais, formados por um eixo tangente a linha de corrente  $\mathbf{t} = \partial\mathbf{x}/\partial s$ , o eixo normal principal  $\mathbf{n}$  e o eixo binomial, resultante dos dois primeiro,  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ . A Fig. 3.1 mostra a representação desses eixos em uma linha de corrente.

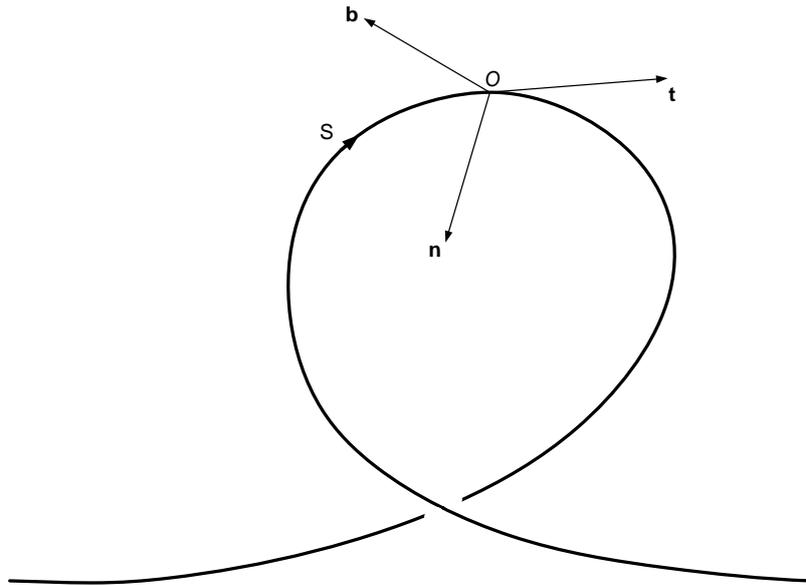


Fig. 3.1: Eixos de coordenadas intrínseco a uma linha de corrente  $C$

As equações de Frenet-Serret mapeiam os eixos do sistema de coordenadas intrínseco com a variação de  $s$ , formando assim uma base completa para descrição da teoria de curvas espaciais em geometria diferencial clássica. Essas equações são descritas a partir das relações base

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \kappa \mathbf{n} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} = -\tau \mathbf{n} \quad (3.40)$$

Nas Eqs. (3.38)-(3.39), os termos  $\kappa$  e  $\tau$  são conhecidos como os parâmetros de curvatura e torção de  $C$ , respectivamente e o raio de curvatura pode ser definido como sendo  $r = -1/\kappa$  e  $dr = -dn$ . O parâmetro de torção de  $C$  mede o desvio da curva com relação ao plano da mesma, ou seja, a curvatura de projeção. Sendo as distâncias da origem do sistema de coordenadas intrínseco nas direções  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{b}$  serem descritos como  $dn$  e  $db$ , respectivamente, temos que o operador gradiente pode ser descrito como

$$\nabla = \mathbf{t} \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} + \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial b} \quad (3.41)$$

Assim, a vorticidade pode ser então obtida, visto que o campo de velocidades é descrito, no sistema de coordenadas do problema, como sendo  $\mathbf{v} = q\mathbf{t}$ , onde  $q$  representa a magnitude da velocidade. Portanto, podemos afirmar que

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times (q\mathbf{t}) = \nabla q \times \mathbf{t} + q \nabla \times \mathbf{t} \quad (3.42)$$

Aplicando o operador (3.41) em (3.42), temos que

$$\boldsymbol{\omega} = \xi q \mathbf{t} + \frac{\partial q}{\partial b} \mathbf{n} + \left( \kappa q - \frac{\partial q}{\partial n} \right) \mathbf{b} \quad (3.43)$$

onde  $\xi$  foi denominada como *torsão das linhas vectoriais vizinhas* por Truesdell [23] e definida como

$$\xi \equiv \mathbf{t} \cdot (\nabla \times \mathbf{t}) = \mathbf{b} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial n} - \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial b} \quad (3.44)$$

A Eq. (3.43) apresenta a complexidade de representação física completa da vorticidade. Para o caso  $\kappa \rightarrow \infty$ , o raio da linha de corrente tende a valores cada vez menores e portanto, se  $q \neq 0$ , então a vorticidade divergirá no ponto em questão. Tratando do caso bidimensional, onde a vorticidade apresenta um único componente não nulo ao longo da direção  $\mathbf{b}$ , esta pode ser representada pela expressão

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3 = \left( \frac{q}{r} + \frac{\partial q}{\partial r} \right) \mathbf{e}_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial(rq)}{\partial r} \mathbf{e}_3 \quad (3.45)$$

Os dois termos do lado direito da última relação em (3.45),  $q/r$  e  $\partial q/\partial r$  representam a rotação da trajetória e o giro de um elemento fluido, respectivamente. Somente no caso de um escoamento uniforme, onde  $\omega = 2W$  temos que  $q/r = \partial q/\partial r = W$  e o escoamento se comporta como um movimento de corpo rígido com velocidade angular  $W$ . Para o caso  $q/r = -\partial q/\partial r$ , o escoamento é irrotacional com um singularidade em  $r = 0$ . Em escoamentos tridimensionais a complexidade do problema aumenta, visto que a vorticidade apresenta também componentes nas direções  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  que aparecerão se  $q$  for uma função de  $b$  e se a torção das linhas de corrente vizinhas não forem nulas.

A literatura de vorticidade também aponta em alguns casos essa entidade como o momentum angular  $\mathbf{M}$  de um elemento material. Essa definição perde fundamento se um reflexão for feita quanto ao domínio de aplicação das entidades. Enquanto que a vorticidade se trata de uma entidade obtida localmente no escoamento, o momentum angular constitui uma integral com relação a uma região de interesse e que depende da escolha de uma origem,  $\mathbf{x}_0$ , em torno do qual a integral é referenciada. Assumindo um escoamento a densidade constante uma comparação pode ser esboçada entre a vorticidade e o momentum angular por unidade de massa

$$\frac{\mathbf{M}}{\rho} = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{u} dV, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0. \quad (3.46)$$

Avaliando dimensionalmente a vorticidade e o momentum angular por unidade de massa, é possível que esse último esteja relacionado a um momento integrado de segunda ordem da vorticidade, que assume três formas, relacionadas a partir da identidade

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) - r^2 \boldsymbol{\omega} \quad (3.47)$$

Cada um desses momentos da vorticidade são relacionados com a vorticidade por uma identidade. Aplicando os teoremas de Gauss e Stokes, temos que

$$\int_V \mathbf{r} \times \mathbf{u} dV = -\frac{1}{2} \int_V r^2 \boldsymbol{\omega} dV + \frac{1}{2} \int_{\partial V} r^2 \mathbf{n} \times \mathbf{u} dV \quad (3.48)$$

Assim, o momentum angular por unidade de massa pode ser identificado como um dos momentos da vorticidade de segunda ordem conjuntamente com contribuições das fronteiras do escoamento. Além disso, como demonstrado por Wu et al. [35], um elemento esférico de vorticidade é proporcional ao momentum angular e, a medida que o volume  $V$  tende a um ponto, a vorticidade mantém-se, enquanto que  $\mathbf{M}/V$  tende a zero a medida que o raio da esfera  $\epsilon \rightarrow 0$ , seguindo a relação

$$\frac{\mathbf{M}}{V} = \frac{1}{5} \rho \epsilon^2 \boldsymbol{\omega} \quad (3.49)$$

### 3.2.1 Vetor de Lamb e Helicidade

Desmembrando o vetor velocidade  $\mathbf{u}$  em uma parte ortogonal ( $\mathbf{u}_\perp$ ) e paralela ( $\mathbf{u}_\parallel$ ) com um vetor ( $\mathbf{n}$ ) qualquer, é possível representar essa separação a partir da relação

$$\mathbf{u} = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \equiv \mathbf{u}_\perp + \mathbf{u}_\parallel \quad (3.50)$$

Considerando então a vorticidade  $\boldsymbol{\omega}$  e a velocidade  $\mathbf{u}$ , decompondo o primeiro com relação ao segundo e o segundo com relação ao primeiro, temos que

$$|\mathbf{u}|^2 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \quad (3.51)$$

$$|\boldsymbol{\omega}|^2 \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}) - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) \quad (3.52)$$

Essa decomposição implica na relação

$$q^2 \omega^2 = |\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}|^2 + |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}|^2, \quad q = |\mathbf{u}| \quad (3.53)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. (3.53) é comumente conhecido como *densidade de helicidade*, enquanto que o segundo termo é conhecido como *vetor de Lamb*. Com relação a base ortonormal intrínseca a uma linha de corrente  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}, \mathbf{n}\}$  de acordo com a relação (3.43), a relação (3.53) pode ser então reduzida para

$$\omega^2 = \xi^2 q^2 + |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}|^2 \quad (3.54)$$

Portanto, a densidade de helicidade pode ser definida como

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} = \xi q^2 \quad (3.55)$$

Assim, para dados valores de  $q$  e  $|\boldsymbol{\omega}|$ , em regiões que apresentem grandes valores de densidade de helicidade aparecerão, conseqüentemente, baixos módulos do vetor de Lamb, sendo verdade a recíproca.

### 3.2.2 Escoamentos Beltramianos Generalizados

Para o caso em que  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} = 0$ , mas tanto a vorticidade quanto a velocidade apresentam valores não nulos, temos que o escoamento é dito como sendo lamelar complexo e é possível concluir que tanto escoamentos bidimensionais quanto escoamentos rotacionais simétricos pertencem a essa classe. Assumindo que o vetor de Lamb também trata-se de um campo lamelar complexo e representando

este como  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = a\nabla h$ , onde  $a$  é uma constante e  $h$  uma função de campo do escoamento, podemos então escrever a condição de campo lamelar complexo para o vetor de Lamb de acordo com a equação

$$[\nabla \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}] \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0, \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \neq 0 \quad (3.56)$$

Portanto, existem superfícies de  $h = \text{constante}$  conhecidas como superfícies de Lamb, cuja normal é o vetor de Lamb e que são também conhecidas como superfícies de vorticidade de função de corrente, visto que o vetor de Lamb é também normal à estas superfícies. Segundo Sposito [59], a existência de superfícies de Lamb é importante na identificação do escoamento como integrável ou caótico. Se em um escoamento, sob determinadas condições iniciais for possível obter uma solução para equação diferencial  $d\mathbf{u}/dt = \mathbf{u}$ , então é dito que o sistema é integrável. Caso contrário o sistema é não integrável e a solução é consideravelmente dependente das condições iniciais aplicadas. O escoamento será caótico se houver incerteza na definição das condições iniciais. Sposito [59] demonstrou que as linhas de trajetória em escoamento permanente sob uma superfície bidimensional são sempre integráveis, logo, escoamentos em regime permanentes onde são evidenciadas superfícies de Lamb não podem ser caóticos.

Outra situação extrema e que mostra grande importância na descrição do comportamento cinemático da vorticidade ocorre quando as linhas de corrente são sempre paralelas às linhas de vorticidade, ou seja,  $\boldsymbol{\omega} = \xi\mathbf{u}$ . Esse tipo de escoamento é conhecido com Beltramiano ou escoamento helicoidal. Para escoamento compressíveis Beltramianos em regime permanente ou para qualquer escoamento Beltramiano a seguinte condição deve ser respeitada

$$\nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = \nabla \cdot \left( \frac{\rho\boldsymbol{\omega}}{\xi} \right) = \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{\xi} \right) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (3.57)$$

Finalmente, utilizando a relação (3.55), temos que as superfícies

$$\frac{\xi}{\rho} = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}}{\rho q^2} = \frac{\omega}{\rho q} = \text{constante} \quad (3.58)$$

são as superfícies de vorticidade, assim como as superfícies de corrente. Isso mostra que tanto os escoamentos complexos lamelares quando os escoamento Beltramianos compartilham algumas propriedades de escoamento potenciais [23]. Como demonstrado por Wu et al. [35], o vetor de Lamb é a maior fonte de não-linearidades no escoamento. Uma vez que esse se anula em um escoamento Beltramiano a equação de Helmholtz é linearizada, indicando que o acoplamento entre cisalhamento e efeitos compressíveis desaparecem no escoamento. Portanto, em escoamento turbulento, por exemplo, eventuais regiões Beltramianas são passíveis a movimentação das regiões não-Beltramianas, visto que a energia cinética de um escoamento incompressível pode ser descrita em termos do vetor de Lamb. Uma vez que esse vetor se anule em escoamentos Beltramianos, é possível concluir que um escoamento real não pode ser completamente Beltramiano.

Por outro lado, escoamentos Beltramianos geralmente podem ser resolvidos diretamente, sem o uso de ferramentas numéricas, e ainda assim podem resultar em linhas de corrente caóticas, o que ressalta o seu uso na avaliação de critérios identificadores de vórtices, como no caso do critério proposto por Haller [14], onde o escoamento ABC, estudado inicialmente por Arnold [60] e logo em seguida por Childress [61], cujo campo de velocidades pode ser descrito a partir das expressões

$$u_x = A \sin(z) + C \cos(y) \quad (3.59)$$

$$u_y = B \sin(x) + A \cos(z) \quad (3.60)$$

$$u_z = C \sin(y) + B \cos(x) \quad (3.61)$$

Dombre et al. [62] conduziram um estudo minucioso sobre as configurações

das constante  $A$ ,  $B$  e  $C$  que conduziriam a escoamentos que apresentassem linhas de corrente caóticas. Esse escoamento resulta da solução das equações de Euler e pertence a sub-classe dos escoamentos Trkalianos [63], onde, na condição de escoamento Beltramiano,  $\nabla \times \mathbf{u} = \xi \mathbf{u}$ ,  $\xi$  é uma constante. Essa sub-classe de escoamentos é a única onde são encontradas trajetórias caóticas na classe de escoamentos Beltramianos. Finalmente, como um classe mais abrangente de escoamentos, que também englobam os escoamentos Beltramianos, estão os *escoamentos Beltramianos generalizados* [64], que podem ser considerados como uma expansão da condição  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$  para a condição

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \nabla \chi \quad (3.62)$$

ou seja, o vetor de Lamb pode ser escrito como um potencial de um escalar  $\chi$

### 3.3 Identificação de vórtices: Critérios Implementados

Após introduzir o estudo de classificação de escoamentos, onde os novos critérios propostos nesse trabalho se fundamentam e de abordar de maneira sucinta a dinâmica da vorticidade, trataremos de apresentar os critérios que serão estudados nos próximos capítulos, suas normalizações e as modificações nos critérios existentes. Além disso, serão apresentados os novos critérios, baseados em grande parte no trabalho conduzido por Thompson [18].

A normalização é importante para que os critérios possam ser comparados entre si e dentro de um mesmo critério para diferentes escoamentos. No presente trabalho a normalização dos critérios existentes e novos foram formuladas de forma a apresentar comportamento semelhante em diferentes estados do escoamento onde esses critérios identifiquem como pertencentes a regiões vorticais ou não.

### 3.4 Interpretação do tensor $\mathbf{A}_2$

Sejam  $\mathbf{e}_m$ ,  $\mathbf{e}_n$  e  $\mathbf{e}_p$  filamentos materiais (inicialmente unitários) alinhados às direções ortogonais  $m$ ,  $n$  e  $p$ . Da mecânica dos fluidos clássica, sabemos que a quantidade  $[A_1]_{ij} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_j$ , onde  $i, j = m, n, p$  é interpretada como 2 vezes a taxa de deformação linear do filamento  $\mathbf{dx}_i$ , no caso em  $i = j$ , e como a taxa de deformação angular entre os filamentos  $\mathbf{dx}_i$  e  $\mathbf{dx}_j$ , no caso em que  $i \neq j$ . A derivada material desta quantidade é, portanto, a aceleração (taxa da taxa) de deformação linear para os componentes da diagonal e a aceleração de deformação angular para os componentes fora da diagonal. Esta derivada é dada por

$$\left[ \dot{A}_1 \right]_{ij} = \dot{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{A}}_1 \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{e}}_j. \quad (3.63)$$

Se for assumido que os filamentos materiais têm uma escala de comprimento pequena frente à variação do gradiente de velocidade, estes são advectados pelo escoamento de acordo com

$$\dot{\mathbf{e}}_j = \nabla \mathbf{v} \mathbf{e}_j, \quad j = m, n \quad (3.64)$$

Portanto,

$$\left[ \dot{A}_1 \right]_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\nabla \mathbf{v}^T \mathbf{A}_1) \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{A}}_1 \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{A}_1 \nabla \mathbf{v}) \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_j \quad (3.65)$$

De forma alternativa, pode-se substituir  $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$  e  $\nabla \mathbf{v}^T = \mathbf{D} - \mathbf{W}$  na equação acima e assim obtém-se

$$\left[ \dot{A}_1 \right]_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \left[ \dot{\mathbf{A}}_1 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_1 \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{A}_1 \right] \mathbf{e}_j \quad (3.66)$$

Se  $\mathbf{e}_m$ ,  $\mathbf{e}_n$  e  $\mathbf{e}_p$  representarem direções alinhadas com os autovetores de  $\mathbf{A}_1$ , então pode-se dividir

Usando a derivada temporal natural de  $\mathbf{A}_1$  definida por

$$\mathbf{A}'_1 = \dot{\mathbf{A}}_1 - \boldsymbol{\Omega}^D \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\Omega}^D \quad (3.67)$$

chega-se a

$$\left[ \dot{\mathbf{A}}_1 \right]_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot [\mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_1 \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \mathbf{A}_1] \mathbf{e}_j \quad (3.68)$$

Se  $\mathbf{e}_m$ ,  $\mathbf{e}_n$  e  $\mathbf{e}_p$  representarem direções alinhadas com os autovetores de  $\mathbf{A}_1$ , então a decomposição acima divide o tensor  $\mathbf{A}_2$  em uma parte coaxial,  $\mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}_1^2$ , e outra ortogonal,  $\mathbf{A}_1 \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \mathbf{A}_1$ , com relação a  $\mathbf{A}_1$ . Conforme discutido em [18], a derivada temporal natural de um tensor representa a variação temporal deste tensor avaliada por um observador acoplado ao sistema de referência formado pelos autovetores deste tensor. Este termo representa a variação temporal dos autovalores do tensor. O tensor  $\mathbf{A}_1 \overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{W}} \mathbf{A}_1$  possui traço nulo. Para os casos incompressíveis, o traço de  $\mathbf{A}'_1$  é nulo, pois representa a variação do traço de  $\mathbf{A}_1$ . Portanto, o  $\text{tr} \mathbf{A}_2 = \text{tr} \mathbf{A}_1^2 > 0$ .

Por fim, pela definição de  $\mathbf{A}_2$  pode-se mostrar que este tensor admite ser escrito como

$$\mathbf{A}_2 = \nabla \mathbf{a} + \nabla \mathbf{a}^T + 2 \nabla \mathbf{v} \nabla \mathbf{v}^T \quad (3.69)$$

onde  $\nabla \mathbf{a}$  é o gradiente de aceleração.

### 3.4.1 Critérios Existentes Estudados

#### 3.4.1.1 Critério $Q$

O critério proposto por Hunt et al. [2] não será aplicado de acordo com o trabalho dos autores, visto que a condição de pressão mínima não será buscada. A formulação do critério  $Q$  implementada nas rotinas que avaliaram os resultados analíticos e numéricos pode ser descrita como

$$Q = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\|\mathbf{W}\|^2 - \|\mathbf{D}\|^2}{\|\mathbf{W}\|^2 + \|\mathbf{D}\|^2} \right) \quad (3.70)$$

Assim, regiões cujos valores de  $Q$  encontram-se no intervalo  $0 \leq Q < 0.5$  serão consideradas regiões vorticais, enquanto regiões que apresentem valores no intervalo  $0.5 < Q \leq 1$  serão consideradas como pertencentes a uma região não vortical. As regiões  $Q = 0.5$  caracterizam-se pelo fato de que o módulo da vorticidade e da taxa de deformação se equivalem, o que não caracteriza a região nem como uma região vortical nem o contrário.

#### 3.4.1.2 Critério $\Delta$

O critério proposto por Chong et al. [1] foi implementado de acordo com a função normalizada

$$\Delta = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{(\|\mathbf{W}\|^2 - \|\mathbf{D}\|^2)^3 + \det(\nabla \mathbf{u})}{(\|\mathbf{W}\|^2 + \|\mathbf{D}\|^2)^3 + \det(\nabla \mathbf{u})} \right) \quad (3.71)$$

Assim, regiões cujos valores de  $\Delta$  encontram-se no intervalo  $0 \leq \Delta < 0.5$  serão consideradas regiões vorticais, enquanto que regiões que apresentem valores no intervalo  $0.5 < \Delta \leq 1$  serão consideradas como pertencentes a uma região não vortical. Finalmente, as regiões  $\Delta = 0.5$  são consideradas regiões de fronteira.

#### 3.4.1.3 Critério $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$

Sobre o critério proposto por Jeong e Hussain [3], inicialmente são avaliados os autovalores do tensor  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2$  e, após ordenados, o segundo autovalor é descrito segundo a equação normalizadas

$$\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} = 1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\text{tr}(\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2) - \lambda_1^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} - \lambda_3^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}}{\text{tr}(\mathbf{D}^2) - \lambda_1^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} - \lambda_3^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}} \right) \quad (3.72)$$

Essa normalização do critério é possível, pois

$$Q = \text{tr}(\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2) = \lambda_1^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} + \lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} + \lambda_3^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} \quad (3.73)$$

Assim, regiões cujos valores de  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  encontram-se no intervalo  $0 \leq \lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} < 0.5$  serão consideradas regiões vorticais, enquanto que regiões que apresentem valores no intervalo  $0.5 < \lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} \leq 1$  serão consideradas como pertencentes a uma região não vortical. Analogamente aos critérios  $Q$  e  $\Delta$ , regiões  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2} = 0.5$  são consideradas regiões de fronteira entre regiões vorticais e não-vorticais.

#### 3.4.1.4 Operadores $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$ e $\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} / \lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$

O critério de identificação de vórtices relatado por Zhou et al. [5], Chakraborty et al. [6] e Wu et al. [7] foi analisado de maneira diferente daquele proposto por Chakraborty et al. [6]. Neste trabalho, os autores consideram que uma região vortical é aquela que atende os seguinte requisitos

1.  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} \geq \alpha$ ;
2.  $\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} / \lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} \leq \beta$ .

No presente trabalho, trataremos de forma independente os parâmetros  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} / \lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$ , apesar da preocupação em mantê-los sempre dispostos juntos nos gráficos e figuras nos próximos capítulos. Outra questão que torna o critério peculiar se comparado com os outros critérios descritos nesse capítulo é o fato de que, como os parâmetros identificam a relação de compacidade de uma região e, a partir de valores  $\alpha$  e  $\beta$  obtidos de forma subjetiva, avaliam se essa região trata-se ou não de uma região vortical. No presente trabalho, esses critérios serão avaliados em intervalos de valores quando uma determinada região atender a condição de existência de autovalores complexos para o gradiente de velocidade, semelhante ao critério proposto por Chong et al. [1]. Assim, todas as regiões que não apresentarem autovalores complexos estarão associadas a valores de  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} / \lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  iguais a 0.5.

Os operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  foram implementados no pós-processador que avaliou os resultados apresentados nos capítulos seguintes, de acordo com as expressões normalizadas

$$\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}) \quad (3.74)$$

$$\frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}} = \frac{2}{\pi^2} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}} \right) \right]^2 \quad (3.75)$$

Os operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  são aqueles obtidos diretamente e que não encontram-se normalizados. Assim, os critérios sempre estarão no intervalo  $0 \leq \lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}} < 0.5$  e  $0 \leq \lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}} < 0.5$ . Quando os dois operadores forem iguais a 0.5, aquele ponto não se encontra em uma região vortical, segundo o critério, visto que ele não apresenta autovalores complexos para o gradiente de velocidade ou esse valor é pequeno o suficiente para divergir o operador arco-tangente.

#### 3.4.1.5 Critério $G$

O critério proposto por Kida e Miura [8] no presente trabalho foi implementado de forma relativamente diferente daquela proposta pelos autores, mas que matematicamente apresentam os mesmo resultado. No presente trabalho, o gradiente de velocidade foi representado na base nos autovalores da Hessiana da pressão  $P_{ij} = [\nabla(\nabla p)]_{ij} = \partial^2 p / \partial x_i \partial x_j$ . Considerando a direção  $\mathbf{e}_3^{\mathbf{P}}$  o autovetor de  $\mathbf{P}$  associado ao menor autovalor de  $\mathbf{P}$ , o critério se baseia na competição entre os termos do tensor gradiente de velocidade  $L_{11}^{\mathbf{P}}$ ,  $L_{12}^{\mathbf{P}}$ ,  $L_{21}^{\mathbf{P}}$  e  $L_{22}^{\mathbf{P}}$  se encontrarem no plano cuja normal é o autovetor associado com o menor autovalor da Hessiana da pressão e que trata-se de uma premissa do critério. Obtidos os termos de  $\nabla\mathbf{v}^{\mathbf{P}}$ , o critério implementado nas rotinas de pós-processamento seguiu a expressão normalizada

$$G = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{L_{12}^{\mathbf{P}} L_{21}^{\mathbf{P}}}{\frac{1}{4}(L_{22}^{\mathbf{P}} - L_{11}^{\mathbf{P}})^2 + |L_{21}^{\mathbf{P}} L_{12}^{\mathbf{P}}|} \right) \quad (3.76)$$

Assim, regiões cujos valores de  $G$  encontram-se no intervalo  $0 \leq G < 0.5$  serão consideradas regiões vorticais, enquanto que regiões que apresentem valores no intervalo  $0.5 < G \leq 1$  serão consideradas como pertencentes a uma região não vortical. Regiões  $G = 0.5$  são regiões de fronteira do critério.

#### 3.4.1.6 Critérios $H$ e $H_e$

Seguindo a descrição de Levy et al. [11] para o critério  $H$  e Zhang e Choudhury [12] para o critério  $H_e$  foram levados em consideração os ângulos que a vorticidade descreve com a velocidade (critério  $H$ ) e que a normal aos vetores que formam o autovetor complexo do gradiente de velocidade descreve com a vorticidade (critério  $H_e$ ) no intervalo entre 0 e  $\pi$  radianos. Assim, estes seguem as seguintes funções normalizadas

$$H = 1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left( -\frac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\|\mathbf{v}\| \|\boldsymbol{\omega}\|} \right) \quad (3.77)$$

$$H_e = 1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left( -\frac{\mathbf{n}_{swirl} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\|\mathbf{n}_{swirl}\| \|\boldsymbol{\omega}\|} \right) \quad (3.78)$$

onde

$$\mathbf{n}_{swirl} = \boldsymbol{\xi}_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\xi}_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} \quad (3.79)$$

Na Eq. (3.79),  $\boldsymbol{\xi}_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}$  e  $\boldsymbol{\xi}_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  representam, respectivamente, as partes real e imaginárias do autovetor complexo do gradiente de velocidade objetivo.

Assim, regiões cujos valores de  $H$  e  $H_e$  encontram-se no intervalo  $0 \leq H < 0.5$  e  $0 \leq H_e < 0.5$  serão consideradas regiões vorticais pois os vetores avaliados descrevem ângulos no intervalo de zero a valores menores que  $\pi/2$  radianos, enquanto que regiões que apresentem valores nos intervalos  $0.5 < H \leq 1$  e  $0.5 < H_e \leq 1$  serão consideradas como pertencentes a uma região não vortical, pois esses mesmos vetores descrevem ângulos no intervalo de  $\pi/2$  a  $\pi$  radianos. Finalmente regiões com  $H = 0.5$  e  $H_e = 0.5$  são regiões de fronteira, visto que

essas regiões apresentam vetores que descrevem um ângulo de  $\pi/2$  radianos.

### 3.4.2 Formulações Objetivas dos Critérios Existentes

A objetividade é uma das premissas do presente trabalho e a importância dessa propriedade em critérios identificadores e classificadores de alguma entidade pertinente ao escoamento pode ser explicado por meio de simples exemplos como no caso de um determinado experimento que seja observado em dois instantes: o primeiro por um observador inercial e um segundo por um novo observador que gire ou acelere linearmente com relação ao experimento. Os dois observadores apesar de estarem diante do mesmo experimento observarão fenômenos completamente diferentes se a “lupa” de observação não for invariante ao movimento dos mesmos.

Para se atingir a objetividade quanto ao gradiente de velocidade e entidades correlatas, diversos trabalhos com diferentes propostas e objetivos chegaram a um mesmo resultado. Utilizaremos esse resultado no presente trabalho como forma de, inicialmente, corrigir os critérios existentes para que estes suportem a condição de invariância euclidiana. Essa correção é dada inicialmente pela taxa-de-rotação relativa  $\overline{\mathbf{W}}$ , definida como sendo

$$\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \Omega^{\mathbf{D}} \quad (3.80)$$

onde  $\mathbf{W}$  representa o tensor vorticidade e  $\Omega^{\mathbf{D}}$  representa um tensor relacionada com a taxa de rotação do vetor taxa de deformação  $\mathbf{D}$  definido de acordo com a expressão

$$\Omega^{\mathbf{D}} = \omega^{\mathbf{D}} \cdot \epsilon \quad (3.81)$$

onde  $\epsilon$  é o tensor permutação de terceira ordem e  $\omega^{\mathbf{D}}$  representa o vetor velocidade angular dos vetores unitários das direções principais de  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{e}_i$ . O vetor velocidade angular obedece a relação

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}^{\mathbf{D}} \times \mathbf{e}_i \quad (3.82)$$

A vorticidade relativa coincide com a vorticidade em escoamentos simples onde os autovetores da taxa de deformação estão fixos. Esta entidade parece ser natural quando se pensa na interpretação dada por Boussinesq. Se os autovetores de  $\mathbf{D}$  estão fixos, a rotação dos filamentos necessariamente substitui continuamente os filamentos alinhados na direção destes autovetores, expondo diferentes filamentos a estas direções. Se os autovetores estão girando, é a vorticidade relativa que desempenha o mesmo papel.

Uma forma de se obter o tensor  $\overline{\mathbf{W}}$ , sem recorrer ao cálculo direto a partir das relações (3.81) e (3.82) é a partir dos tensores de Rivlin-Ericksen. Como visto anteriormente nesse capítulo a decomposição do tensor  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$ , avaliado na base dos autovetores do tensor  $\mathbf{A}_1$ , conforme descrito por Thompson [18] pode ser representado como

$$\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1} = \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1} + \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1} \quad (3.83)$$

A parte de  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$  fora de fase com o tensor  $\mathbf{A}_1$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1}$ , pode ser descrita como

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1} = \mathbf{A}_1^{\mathbf{A}_1} \overline{\mathbf{W}}^{\mathbf{A}_1} - \mathbf{A}_1^{\mathbf{A}_1} \overline{\mathbf{W}}^{\mathbf{A}_1} \quad (3.84)$$

Portanto, conhecendo os tensores  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1}$  e  $\mathbf{A}_1^{\mathbf{A}_1}$  (este tensor só apresenta termos não nulos na diagonal principal, iguais aos próprios autovalores de  $\mathbf{A}_1$ ). Portanto, teremos 3 incógnitas e 6 equações, visto que o tensor  $\overline{\mathbf{W}}^{\mathbf{A}_1}$  é anti-simétrico. Conhecido os valores de  $\overline{W}_{ij}^{\mathbf{A}_1}$ , é necessário reescrever o mesmo de acordo com o sistema de coordenadas, realizando a transformação inversa com relação aos autovetores do tensor taxa de deformação. Finalmente, conhecendo o tensor vorticidade, é possível se obter o tensor  $\boldsymbol{\Omega}^{\mathbf{D}}$ . Assim, visto que o tensor taxa de deformação é objetivo, a forma de transformar o gradiente de velocidade em uma entidade também objetiva, segue a descrição

$$\overline{\nabla \mathbf{v}} = \mathbf{D} + \overline{\mathbf{W}} = \mathbf{D} + \mathbf{W} - \Omega^{\mathbf{D}} \quad (3.85)$$

Assim, os critérios apresentados na seção anterior serão revisados e suas formulações objetivas apresentadas.

#### 3.4.2.1 Critério $Q_s$

O critério  $Q_s$  foi anteriormente definido por Tabor e Klapper [4], apesar de não ser com o objetivo de identificação de vórtices. No presente trabalho, o critério foi descrito a partir da relação

$$Q_s = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\|\overline{\mathbf{W}}\|^2 - \|\mathbf{D}\|^2}{\|\overline{\mathbf{W}}\|^2 + \|\mathbf{D}\|^2} \right) \quad (3.86)$$

Assim, regiões cujos valores de  $Q_s$  encontram-se no intervalo  $0 \leq Q_s < 0.5$  serão consideradas regiões vorticais, enquanto regiões que apresentem valores no intervalo  $0.5 < Q_s \leq 1$  serão consideradas como pertencentes a uma região não vortical. As regiões  $Q_s = 0.5$  caracterizam-se pelo fato de que o módulo da vorticidade e da taxa de deformação se equivalem, o que não caracteriza a região nem como uma região vortical nem o contrário.

#### 3.4.2.2 Critério $\Delta_s$

O critério  $\Delta_s$  para que se torne objetivo teve sua formulação original alterada para atender a relação

$$\Delta_s = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{(\|\overline{\mathbf{W}}\|^2 - \|\mathbf{D}\|^2)^3 + \det(\overline{\nabla \mathbf{v}})}{(\|\overline{\mathbf{W}}\|^2 + \|\mathbf{D}\|^2)^3 + \det(\overline{\nabla \mathbf{v}})} \right) \quad (3.87)$$

Assim, regiões cujos valores de  $\Delta_s$  encontram-se no intervalo  $0 \leq \Delta_s < 0.5$  serão consideradas regiões vorticais, enquanto que regiões que apresentem valores no intervalo  $0.5 < \Delta_s \leq 1$  serão consideradas como pertencentes a uma região não vortical. Finalmente, as regiões  $\Delta_s = 0.5$  são consideradas regiões fronteiras entre regiões vorticais e não vorticais.

### 3.4.2.3 Critérios $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \overline{\mathbf{W}}^2}$ e $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2 + \mathbf{D}\Omega^{\mathbf{D}} - \Omega^{\mathbf{D}}\mathbf{D}}$

O critério original proposto por Jeong e Hussain [3] foi avaliado de forma objetiva a partir de dois operadores. O primeiro, simplesmente trocando a vorticidade pela vorticidade relativa ou seja  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2 \Rightarrow \mathbf{D}^2 + \overline{\mathbf{W}}^2$  pode ser descrito objetivamente a partir da relação

$$\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \overline{\mathbf{W}}^2} = 1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\text{tr}(\mathbf{D}^2 + \overline{\mathbf{W}}^2) - \lambda_1^{\mathbf{D}^2 + \overline{\mathbf{W}}^2} - \lambda_3^{\mathbf{D}^2 + \overline{\mathbf{W}}^2}}{\text{tr}(\mathbf{D}^2) - \lambda_1^{\mathbf{D}^2 + \overline{\mathbf{W}}^2} - \lambda_3^{\mathbf{D}^2 + \overline{\mathbf{W}}^2}} \right) \quad (3.88)$$

O segundo critério objetivo pode ser obtido re-analizando o gradiente da equação de Navier-Stokes como descrito no capítulo 2, dentro do que foi analisado por Jeong e Hussain [3] para a formulação do referido critério. Assim, pode-se escrever o gradiente da equação de Navier-Stokes da seguinte forma

$$\dot{\mathbf{D}} - \nu \Delta \mathbf{D} + \mathbf{W}^2 + \mathbf{D}^2 = -\frac{1}{\rho} \mathbf{P} \quad (3.89)$$

A derivada material do tensor taxa de deformação pode ser reescrito como

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{D}' + \Omega^{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \Omega^{\mathbf{D}} \quad (3.90)$$

onde  $\mathbf{D}'$  representa a derivada natural do tensor taxa de deformação. Assim, reorganizando a Eq. (3.89), temos que

$$\mathbf{W}^2 + \mathbf{D}^2 - \Omega^{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \Omega^{\mathbf{D}} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{P} - \mathbf{D}' + \nu \Delta \mathbf{D} \quad (3.91)$$

Visto que os três termos do lado direito da Eq. (3.91) são objetivos, desprezando os dois últimos termos, dentro da análise de Jeong e Hussain [3], temos que a Hessiana da pressão corrigida pode ser representada objetivamente por  $\mathbf{W}^2 + \mathbf{D}^2 - \Omega^{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \Omega^{\mathbf{D}}$  e assim, define-se o critério objetivo  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2 + \mathbf{D}\Omega^{\mathbf{D}} - \Omega^{\mathbf{D}}\mathbf{D}}$  a partir da relação

$$\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2+\mathbf{D}\Omega^{\mathbf{D}}-\Omega^{\mathbf{D}}\mathbf{D}} = 1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\text{tr}(\mathbf{HP}) - \lambda_1^{\mathbf{HP}} - \lambda_3^{\mathbf{HP}}}{\text{tr}(\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}\Omega^{\mathbf{D}} - \Omega^{\mathbf{D}}\mathbf{D}) - \lambda_1^{\mathbf{HP}} - \lambda_3^{\mathbf{HP}}} \right) \quad (3.92)$$

onde  $\mathbf{HP} = \mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2 + \mathbf{D}\Omega^{\mathbf{D}} - \Omega^{\mathbf{D}}\mathbf{D}$ . Assim, regiões cujos valores de  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\overline{\mathbf{W}}^2}$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2+\mathbf{D}\Omega^{\mathbf{D}}-\Omega^{\mathbf{D}}\mathbf{D}}$  encontram-se no intervalo  $0 \leq \lambda_2^{\mathbf{D}^2+\overline{\mathbf{W}}^2} < 0.5$  e  $0 \leq \lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2+\mathbf{D}\Omega^{\mathbf{D}}-\Omega^{\mathbf{D}}\mathbf{D}} < 0.5$  serão consideradas regiões vorticais, enquanto que regiões que apresentem valores no intervalo  $0.5 < \lambda_2^{\mathbf{D}^2+\overline{\mathbf{W}}^2} \leq 1$  e  $0.5 < \lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2+\mathbf{D}\Omega^{\mathbf{D}}-\Omega^{\mathbf{D}}\mathbf{D}} \leq 1$  serão consideradas como pertencentes a uma região não vortical. Finalmente, regiões  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\overline{\mathbf{W}}^2} = 0.5$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2+\mathbf{D}\Omega^{\mathbf{D}}-\Omega^{\mathbf{D}}\mathbf{D}} = 0.5$  são consideradas regiões de transição e nada pode se afirmar sobre o caráter do escoamento, pelo menos no que diz respeito ao critério.

#### 3.4.2.4 Operadores $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$ e $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$

Com relação aos operadores originais, agora são avaliados os autovalores do gradiente de velocidade objetivo,  $\overline{\nabla\mathbf{v}}$  e a partir deles são avaliados se existem autovalores complexos. Portanto, os operadores podem ser representados a partir das relações

$$\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}) \quad (3.93)$$

$$\frac{\lambda_{cr}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}}{\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}} = \frac{2}{\pi^2} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\lambda_{cr}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}}{\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}} \right) \right]^2 \quad (3.94)$$

Os operadores  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$  são aqueles obtidos diretamente e que não encontram-se normalizados. Assim, os critérios sempre estarão no intervalo  $0 \leq \lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}} < 0.5$  e  $0 \leq \lambda_{cr}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}} < 0.5$ . Quando os dois operadores forem iguais a 0.5, aquele ponto não se encontra em uma região vortical, segundo o critério, visto que ele não apresenta autovalores complexos para o gradiente de velocidade ou esse valor é pequeno o suficiente para divergir o operador tangente.

### 3.4.2.5 Critério $G_s$

Na formulação objetiva do critério, o operador  $G_s$  avalia os termos do tensor gradiente de velocidade objetivo,  $\overline{\nabla \mathbf{v}}$ , mas ainda disposto na base dos autovetores da Hessiana da pressão, visto que essa última entidade é objetiva. Assim, o critério  $G_s$  pode ser definido pela expressão

$$G_s = \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\overline{L}_{12}^{\mathbf{P}} \overline{L}_{21}^{\mathbf{P}}}{\frac{1}{4}(\overline{L}_{22}^{\mathbf{P}} - \overline{L}_{11}^{\mathbf{P}})^2 + |\overline{L}_{21}^{\mathbf{P}} \overline{L}_{12}^{\mathbf{P}}|} \right) \quad (3.95)$$

Assim, regiões cujos valores de  $G_s$  encontram-se no intervalo  $0 \leq G_s < 0.5$  serão consideradas regiões vorticais, enquanto que regiões que apresentem valores no intervalo  $0.5 < G_s \leq 1$  serão consideradas como pertencentes a uma região não vortical. Finalmente, regiões  $G_s = 0.5$  são consideradas regiões de fronteira.

### 3.4.2.6 Critério $H_{es}$

Visto que o critério  $H$  depende diretamente da velocidade na formulação do operador, este não pode apresentar uma versão objetiva, visto que a velocidade é uma entidade sobre a qual não existe uma teoria fechada quanto a torná-la objetiva. Assim, definimos o critério objetivo  $H_{es}$ , com base no critério original avaliado por Zhang e Choudhury [12] a partir da definição

$$H_{es} = 1 - \frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left( -\frac{\mathbf{n}_{swirls} \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}}}{\|\mathbf{n}_{swirls}\| \|\overline{\boldsymbol{\omega}}\|} \right) \quad (3.96)$$

onde

$$\mathbf{n}_{swirls} = \boldsymbol{\xi}_{cr}^{\overline{\nabla \mathbf{v}}} \times \boldsymbol{\xi}_{ci}^{\overline{\nabla \mathbf{v}}} \quad (3.97)$$

Na relação (3.97),  $\boldsymbol{\xi}_{cr}^{\overline{\nabla \mathbf{v}}}$  e  $\boldsymbol{\xi}_{ci}^{\overline{\nabla \mathbf{v}}}$  representam, respectivamente, as partes real e imaginárias do autovetor complexo do gradiente de velocidade objetivo.

Assim, regiões cujos valores de  $H_{es}$  encontram-se no intervalo  $0 \leq H_{es} < 0.5$  serão consideradas regiões vorticais pois os vetores avaliados descrevem ângulos no intervalo de zero a valores menores que  $\pi/2$  radianos, enquanto que regiões

que apresentem valores nos intervalos  $0.5 < H_{es} \leq 1$  serão consideradas como pertencentes a uma região não vortical, pois esses mesmos vetores descrevem ângulos no intervalo de  $\pi/2$  a  $\pi$  radianos. Finalmente regiões com  $H_{es} = 0.5$  são consideradas regiões de transição e nada pode se afirmar sobre o caráter do escoamento, pelo menos no que diz respeito aos critérios, visto que essas regiões apresentam vetores que descrevem um ângulo de  $\pi/2$  radianos.

### 3.4.3 Novos Critérios

#### 3.4.3.1 Critério Isotrópico

O critério isotrópico avaliado nesse trabalho segue os estudos realizados por Thompson [18] e operador de classificação de escoamentos proposto. Sabendo que os tensores de Rivlin-Ericksen  $\mathbf{A}_n$  com  $n = 1$  e  $n = 2$  são definidos como  $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D}$  e  $\mathbf{A}_2 = d\mathbf{D}/dt + \mathbf{A}_1\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T\mathbf{A}_1$ , o tensor  $\mathbf{A}_2$  é então disposto na base dos autovetores do tensor  $\mathbf{A}_1$ , resultando assim no tensor  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$  que será o tensor avaliado diretamente pelo critério a partir da relação, em notação indicial,

$$IR = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\Phi_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1}}{\|\mathbf{A}_2\|} \right) = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{[\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{ii} [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{ii}}{[\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1} \mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{jj}} \right) \quad (3.98)$$

Portanto, o critério  $IR$  compara o quanto a diagonal principal de  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$ , ou seja, a parte de  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$  em fase com  $\mathbf{A}_1$ , é relevante frente ao tensor  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$  a partir da comparação das normas de  $\Phi_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1}$  e  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$ , respectivamente.

O critério  $IR$  identificará estruturas vorticais na região delimitada por  $0 \leq IR < 0.5$ , onde a aceleração da taxa de deformação, caracterizada pelo tensor  $\mathbf{A}_2$  desafia a tendência imposta pelo tensor  $\mathbf{A}_1$ . Nessa região a parte de  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$  fora de fase com  $\mathbf{A}_1$ , ou seja, a parte ortogonal é mais relevante que a parte em fase o que caracteriza que a tendências do tensor  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$  e do tensor  $\mathbf{A}_1$  apresentam tendências diferentes. Uma situação análoga é encontrada no movimento circular, onde sua maior característica encontra-se no fato de que a aceleração e a velocidade são

ortogonais ao longo de toda a trajetória. Na região  $0.5 < IR \leq 1$  a aceleração da taxa de deformação encontra-se coaxial com a própria taxa de deformação e, portanto, ambas apresentam a mesma tendência o que caracteriza um movimento extensional perfeito no limite  $IR = 1$

Haller [14] propôs um critério semelhante a este, fundamentado nas mesmas bases com os tensores de Rivlin-Ericksen, mas avaliando de forma lagrangiana se determinada região encontrava-se em uma zona hiperbólica (não-vortical) ou elíptica (vortical). Entretanto, como indicado pelo autor, o critério  $M_z$  sofre com algumas deficiências, como, por exemplo, a avaliação de vórtices por meio critério ser possível apenas em escoamentos incompressíveis. Outro fato que denota as deficiências do critério encontram-se na necessidade de uma segunda formulação diferente para escoamentos bidimensionais, pois nesse tipo de escoamento o determinante do tensor taxa de deformação pode ser nulo. Entretanto existem alguns escoamentos tridimensionais da classe dos escoamento quasi-planos que também apresentam  $\det \mathbf{D} = 0$ , definido por Thompson e de Souza Mendes [44] e que já foi abordado anteriormente nesse capítulo. O critério  $IR$  não sofre com os mesmos problemas do critério  $M_z$  e pode ser obtido de forma mais simples que esse último, se contarmos que trata-se de um campo euleriano, enquanto que o critério proposto por Haller [14] precisa avaliar a trajetória de partículas imersas no escoamento, o que incorpora ao critério a subjetividade inerente da análise lagrangiana, quanto ao número de trajetórias e ao tempo de integração.

### 3.4.3.2 Critérios Anisotrópicos

Com o objetivo de avaliar nas direções principais do escoamento, caracterizada pelas direções de deformação, o alinhamento de uma estrutura vortical, foram formulados critérios que avaliassem o estado de deformação e de sua aceleração, desmembrando o tensor  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}1}$  e realizando uma análise particular, seguindo um formulação semelhante aquela proposta pelo critério  $IR$ .

Sabendo que o tensor  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}1}$  é formado pelos termos

$$\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1} = \begin{bmatrix} [A_2^{\mathbf{A}_1}]_{11} & [A_2^{\mathbf{A}_1}]_{12} & [A_2^{\mathbf{A}_1}]_{13} \\ [A_2^{\mathbf{A}_1}]_{21} & [A_2^{\mathbf{A}_1}]_{22} & [A_2^{\mathbf{A}_1}]_{23} \\ [A_2^{\mathbf{A}_1}]_{31} & [A_2^{\mathbf{A}_1}]_{32} & [A_2^{\mathbf{A}_1}]_{33} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

Definem-se os operadores  $AR_{i=1,2,3}^A$  de acordo com a relação

$$AR_i^A = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{[\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{ii} [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{ii}}{[\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1} \mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{ii}} \right) \quad (3.100)$$

Portanto, os operadores  $AR_{i=1,2,3}^A$  avaliam o quanto a aceleração de deformação desafia a tendência indicada pela taxa de deformação com relação a cada posição da diagonal principal (termos de  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$  em fase com  $\mathbf{A}_1$ ), frente aos termos do quadrado de  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$ . É importante ressaltar que os operadores  $AR_{i=1,2,3}^A$ , após avaliados de acordo com a relação (3.100), são reordenados de forma a atender a condição  $AR_1^A \geq AR_2^A \geq AR_3^A$ .

Portanto, pode-se definir o critério baseado nos operadores  $AR_{i=1,2,3}^A$  de duas formas: de forma menos conservadora, define-se uma região como um vórtice onde pelo menos o terceiro componente do operador  $AR^A$  se encontre no intervalo  $0 \leq AR_3^A < 0.5$  e em contraponto, se este se encontrar no intervalo  $0.5 < AR_3^A \leq 1$  a região automaticamente se caracteriza como não vortical, onde a aceleração da taxa de deformação é coaxial com a taxa de deformação em todas posições e no caso  $AR_3^A = 0.5$  ocorre uma indefinição pelo menos na terceira posição, visto que as outras duas serão maiores ou iguais a 0.5.

Outra forma de se definir o critério, de forma mais conservadora, é considerar que um região vortical ocorre quando  $0 \leq AR_1^A < 0.5$  e, conseqüentemente,  $AR_2^A$  e  $AR_3^A$ . Se  $0.5 < AR_3^A \leq 1$ , a região se caracteriza como não vortical segundo o critério, apesar da possibilidade de  $AR_2^A$  e  $AR_3^A$  estarem fora desse intervalo. É importante ressaltar que esses operadores podem também operar na *classificação* de vórtices quanto ao número de direções, por exemplo, que se encontram no intervalo entre 0 e 0.5. Apesar de não ser o escopo do presente trabalho, este foi pensado de forma a atender essa demanda.

Outra forma de se definir critérios a partir das direções principais do tensor  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$  é avaliar a tendência da aceleração de deformação contra a taxa de deformação nos planos normais às principais direções de deformação dadas pelos autovetores de  $\mathbf{A}_1$ . Desta forma, se caracterizam os operadores  $AR_{i=1,2,3}^B$  que são definidos a partir das relações

$$AR_1^B = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{([\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{11} - [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{22})^2}{([\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{11} - [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{22})^2 + 4([\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{21} [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{12})} \right) \quad (3.101)$$

$$AR_2^B = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{([\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{22} - [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{33})^2}{([\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{22} - [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{33})^2 + 4([\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{23} [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{32})} \right) \quad (3.102)$$

$$AR_3^B = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{([\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{11} - [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{33})^2}{([\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{11} - [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{33})^2 + 4([\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{13} [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{31})} \right) \quad (3.103)$$

A relação disposta dentro da operação arco-cosseno pode ser obtida a partir da avaliação do tensor  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$  quanto, por exemplo, à sua primeira direção principal. Nessa direção para que possamos obter as direções principais, para que posteriormente sejam comparadas com as direções principais do tensor  $\mathbf{A}_1$ , deve-se resolver a equação do segundo grau

$$\begin{vmatrix} [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{11} - \theta & [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{12} \\ [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{21} & [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{22} - \theta \end{vmatrix} = 0 \quad (3.104)$$

O valor de  $\theta$  pode ser então obtido a partir da relação

$$\theta_{1,2} = \frac{[\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{11} + [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{22} \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (3.105)$$

onde

$$\Delta = ([\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{11} - [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{22})^2 + 4([\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{21} [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{12}) \quad (3.106)$$

Se, na Eq. (3.106),  $([\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{11} - [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{22})^2 \gg 4([\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{21} [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{12})$ , temos que os valores de  $\theta_{1,2}$  serão, aproximadamente,  $[\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{11}$  e  $[\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{22}$  e as direções principais de  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$  serão dadas pelas próprias direções principais de  $\mathbf{A}_1$ , o que caracteriza a região como não vortical. Caso contrário, os valores de  $\theta_{1,2}$  serão iguais aos valores fora da diagonal principal (cabe ressaltar que o tensor  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$  e, portanto,  $[\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{12} = [\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}]_{21}$ ), e as direções principais no plano em questão estarão fora de fase com relação ao tensor  $\mathbf{A}_1$ , caracterizando uma região vortical.

A mesma de formulação de critérios realizadas com os operadores  $AR_{1,2,3}^B$  pode ser aplicada aos operadores  $AR_{1,2,3}^A$ , ou seja, se o operador  $AR_1^B$  for menor que 0.5, logo podemos associar tal região a uma região vortical, em uma base de comparação mais conservadora. Uma outra abordagem seria considerar uma região vortical

Uma terceira configuração de critérios objetivos é proposta no presente trabalho. Esta avalia se a aceleração de deformação desafia a tendência apresentada pela taxa de deformação em um determinado plano, cuja normal seja relevante para a teoria de formação de vórtices e que seja objetiva.

Seja um determinado vetor normal  $\mathbf{n}$  representativo para uma definição de vórtices. Uma base ortonormal pode ser obtida a partir desse vetor, realizando um primeiro produto vetorial com outro vetor qualquer no espaço que não seja paralelo a esse e, do resultado desse produto seja realizado um novo produto vetorial com o tensor  $\mathbf{n}$ , que resulta em outros dois vetores normais  $\mathbf{e}_{n1}$  e  $\mathbf{e}_{n2}$ . Temos assim uma base ortonormal  $\mathbf{Q}_{\mathbf{e}_{n1}\mathbf{e}_{n2}\mathbf{n}}$  formada pelos vetores  $\{\hat{\mathbf{e}}_{n1}, \hat{\mathbf{e}}_{n2}, \hat{\mathbf{n}}\}$ . Dispondo o tensor  $\mathbf{A}_1$  na base ortogonal descrita anteriormente, podemos obter o tensor  $\mathbf{A}_{1\mathbf{n}}$ .

Com o objetivo de alinhar os dois primeiros autovetores de  $\mathbf{A}_{1\mathbf{n}}$  com os vetores  $\mathbf{e}_{n1}$  e  $\mathbf{e}_{n2}$ , torna-se necessária a obtenção dos autovalores do tensor  $3 \times 3$  formado pelos termos deste mesmo tensor, de acordo com a relação

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_{1n} = & \mathbf{A}_1 - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_{n1}) \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{e}}_{n1} - (\hat{\mathbf{e}}_{n1} \cdot \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{e}}_{n1} \otimes \hat{\mathbf{n}} + \\ & - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_{n2}) \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{e}}_{n2} - (\hat{\mathbf{e}}_{n2} \cdot \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{e}}_{n2} \otimes \hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (3.107)$$

ou seja,

$$\mathbf{A}'_{1n} = \begin{pmatrix} [\mathbf{A}_{1n}]_{11} & [\mathbf{A}_{1n}]_{12} & 0 \\ [\mathbf{A}_{1n}]_{21} & [\mathbf{A}_{1n}]_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

Sendo os autovetores do tensor (3.108) iguais a  $\boldsymbol{\xi}_1^{\mathbf{A}_{1n}} = (\mathbf{e}_1^{\mathbf{A}_{1n}}, \mathbf{e}_2^{\mathbf{A}_{1n}})$  e  $\boldsymbol{\xi}_2^{\mathbf{A}_{1n}} = (\mathbf{f}_1^{\mathbf{A}_{1n}}, \mathbf{f}_2^{\mathbf{A}_{1n}})$ , temos que a nova base a qual o tensor  $\mathbf{A}_{1n}$  é dado pelo tensor

$$\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2}^{\mathbf{A}_{1n}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^{\mathbf{A}_{1n}} & \mathbf{f}_1^{\mathbf{A}_{1n}} & 0 \\ \mathbf{e}_2^{\mathbf{A}_{1n}} & \mathbf{f}_2^{\mathbf{A}_{1n}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

Colocando então o tensor  $\mathbf{A}_{1n}$  na base dada pelo tensor ortogonal (3.109), teremos os dois autovetores de  $\mathbf{A}_{1n}$  que estão no plano normal a  $\mathbf{n}$  alinhados com as direções  $\mathbf{e}_{n1}$  e  $\mathbf{e}_{n2}$ . Como pode se observado pelo tensor (3.109), esta última operação consiste, basicamente, de um rotação cujo eixo é o próprio vetor  $\mathbf{n}$ .

Obtidas os tensores responsáveis pelas duas transformações executadas anteriormente, a essência dessa terceira configuração de critério anisotrópico, consiste em aplicar essas duas transformações, na ordem descrita anteriormente no tensor  $\mathbf{A}_2$ , resultando assim na transformação

$$\mathbf{Z} = \left[ \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2}^{\mathbf{A}_{1n}} \right]^T \left[ \mathbf{Q}_{\mathbf{e}_{n1} \mathbf{e}_{n2} \hat{\mathbf{n}}} \right]^T \mathbf{A}_2 \left[ \mathbf{Q}_{\mathbf{e}_{n1} \mathbf{e}_{n2} \hat{\mathbf{n}}} \right] \left[ \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{\xi}_2}^{\mathbf{A}_{1n}} \right] \quad (3.110)$$

o critério resultante dessa operação,  $AR^{\mathbf{n}}$  pode ser finalmente obtido a partir da relação

$$AR^{\mathbf{n}} = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{([\mathbf{Z}]_{11} - [\mathbf{Z}]_{22})^2}{([\mathbf{Z}]_{11} - [\mathbf{Z}]_{22})^2 + 4([\mathbf{Z}]_{21}[\mathbf{Z}]_{12})} \right) \quad (3.111)$$

Portanto, o critério  $AR^{\mathbf{n}}$  avalia, no plano normal a  $\mathbf{n}$ , o quanto o tensor  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$  encontra-se fora de fase com o tensor  $\mathbf{A}_1$ . Os intervalos indicados anteriormente nos outros critérios valem também para este. No presente trabalho, foram avaliados três vetores considerados importantes na teoria de identificação de vórtices. O primeiro vetor avaliado foi o vetor normal ao plano  $\pi$ , introduzido por Thompson e de Souza Mendes [17] que é determinado pelo vetor vorticidade relativa  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ , caracterizando assim o critério  $AR^{\boldsymbol{\omega}-\Omega}$ .

Outro vetor considerado pertinente a identificação de vórtices pelo presente trabalho é o vetor  $\mathbf{n}_{swirlS}$ , definido anteriormente para o critério  $H_{es}$ , resultando assim no critério  $AR^{\mathbf{n}_{swirlS}}$ . É importante ressaltar que esse vetor representa a normal ao plano formado pelas partes normal e imaginárias do autovetor complexo do gradiente de velocidade relativo e que determinam o eixo de rotação das linhas de correntes helicoidais no escoamento.

Por último, o autovetor associado ao menor autovalor da Hessiana da pressão, cujo comportamento é avaliado no critério proposto por Jeong e Hussain[3] e Kida e Miura [8] foi também avaliado no presente trabalho, resultando no critério  $AR^{\mathbf{P}}$ .

#### 3.4.4 Identificação de Vórtices e as Equações de Euler

Aplicando o operador gradiente às equações de Euler, podemos escrever essa equação em forma tensorial

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = -(\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2) - \frac{1}{\rho}\mathbf{P} \quad (3.112)$$

Aplicando o tensor  $\mathbf{A}_2 = d\mathbf{D}/dt + \mathbf{A}_1\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T\mathbf{A}_1$  na Eq. (3.112), temos que

$$\frac{1}{2}\mathbf{A}_2 = (\mathbf{D} + \mathbf{W})(\mathbf{D} - \mathbf{W}) - \frac{1}{\rho}\mathbf{P} \quad (3.113)$$

A relação (3.113) de obter uma análise direta de como os termos que constituem a equação de Euler podem influenciar pelo fato de se encontrarem em fase ou fora de fase com o tensor  $\mathbf{A}_1$ , ou seja, excitando ou dissipando a produção de vórtices local. Esse mesmo tipo de análise pode ser realizado partindo-se das equações de Navier-Stokes, incluindo o termo referente a dissipação viscosa. Como será apresentado no capítulo 4, aplicado em resultados para uma solução das equações de Euler, apresentaremos nesse capítulo os termos que compõem essa análise somente para esta forma da equação de momentum. O primeiro operador,  $IR_{(\mathbf{D}-\mathbf{W})(\mathbf{D}+\mathbf{W})}$ , avalia o quanto o tensor  $\mathbf{N} = (\mathbf{D} - \mathbf{W})(\mathbf{D} + \mathbf{W})$ , na base dos autovetores do tensor  $\mathbf{A}_1$ , encontra-se em fase ou fora de fase com o tensor  $\mathbf{A}_1$  e pode ser representado pela relação

$$IR_{(\mathbf{D}-\mathbf{W})(\mathbf{D}+\mathbf{W})} = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{[\mathbf{N}^{\mathbf{A}_1}]_{ii} [\mathbf{N}^{\mathbf{A}_1}]_{ii}}{[\mathbf{N}^{\mathbf{A}_1} \mathbf{N}^{\mathbf{A}_1}]_{jj}} \right) \quad (3.114)$$

Caso o operador  $IR_{(\mathbf{D}-\mathbf{W})(\mathbf{D}+\mathbf{W})}$  encontre-se no intervalo entre 0 e 0.5, podemos concluir que o tensor  $(\mathbf{D} - \mathbf{W})(\mathbf{D} + \mathbf{W})$  está fora de fase com o tensor  $\mathbf{A}_1$  e, portanto, contribui para a formação de vórtices. Caso encontra-se no intervalo entre 0.5 e 1 este tensor encontra-se em fase com o tensor  $\mathbf{A}_1$  e participa na dissipação de vórtice. O operador  $IR_P$  representa a avaliação quanto a Hessiana da pressão, na base dos autovetores do tensor  $\mathbf{A}_1$ , encontra-se em fase ou fora de fase com o tensor  $\mathbf{A}_1$  e pode ser representado pela relação

$$IR_P = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{[\mathbf{P}^{\mathbf{A}_1}]_{ii} [\mathbf{P}^{\mathbf{A}_1}]_{ii}}{[\mathbf{P}^{\mathbf{A}_1} \mathbf{P}^{\mathbf{A}_1}]_{jj}} \right) \quad (3.115)$$

O operador  $IR_{(\mathbf{D}-\mathbf{W})(\mathbf{D}+\mathbf{W})}^{A_2}$  avalia qual a parcela referente a parte em fase do tensor  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}_1}$  corresponde ao tensor  $(\mathbf{D} - \mathbf{W})(\mathbf{D} + \mathbf{W})$ , sendo determinado pela expressão

$$IR_{(\mathbf{D}-\mathbf{W})(\mathbf{D}+\mathbf{W})}^{A_2} = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\|\Phi_{(\mathbf{D}-\mathbf{W})(\mathbf{D}+\mathbf{W})}^{\mathbf{A}_1}\|}{\|\Phi_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1}\|} \right) \quad (3.116)$$

O operador  $IR_{(\mathbf{D}-\mathbf{W})(\mathbf{D}+\mathbf{W})}^{A_2}$  quanto mais se aproxima da unidade, maior é sua

participação na parte fora de fase do tensor  $\mathbf{A}_2$  com o tensor  $\mathbf{A}_1$  e maior será sua relevância na formação de vórtices. O operador  $IR_{\mathbf{P}}^{A2}$  realiza a mesma análise do parâmetro anterior, mas o faz com relação a participação do tensor Hessiana da pressão na parte em fase do tensor  $\mathbf{A}_2$  com o tensor  $\mathbf{A}_1$ , de acordo com a equação

$$IR_{\mathbf{P}}^{A2} = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\|\Phi_{\mathbf{P}}^{\mathbf{A}_1}\|}{\|\Phi_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1}\|} \right) \quad (3.117)$$

Assim como o operador  $IR_{(\mathbf{D}-\mathbf{w})(\mathbf{D}+\mathbf{w})}^{A2}$ , quanto mais o operador  $IR_{\mathbf{P}}^{A2}$  se aproxima da unidade, maior sua participação na parte fora de fase do tensor  $\mathbf{A}_2$  com o tensor  $\mathbf{A}_1$ . Finalmente, os operadores  $IR_{(\mathbf{D}-\mathbf{w})(\mathbf{D}+\mathbf{w})}^{A2'}$  e  $IR_{\mathbf{P}}^{A2'}$  realizam a mesma análise, mas o fazem com relação a parte fora de fase do tensor  $\mathbf{A}_2$  com o tensor  $\mathbf{A}_1$ . Esses parâmetros são determinados a partir das relações

$$IR_{(\mathbf{D}-\mathbf{w})(\mathbf{D}+\mathbf{w})}^{A2'} = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\|\tilde{\Phi}_{(\mathbf{D}-\mathbf{w})(\mathbf{D}+\mathbf{w})}^{\mathbf{A}_1}\|}{\|\tilde{\Phi}_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1}\|} \right) \quad (3.118)$$

$$IR_{\mathbf{P}}^{A2'} = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{\|\tilde{\Phi}_{\mathbf{P}}^{\mathbf{A}_1}\|}{\|\tilde{\Phi}_{\mathbf{A}_2}^{\mathbf{A}_1}\|} \right) \quad (3.119)$$

Portanto, podemos concluir que o uso desses parâmetros na identificação dos termos da equação de Euler, ou mesmo da equação de Navier-Stokes que influenciam na formação ou dissipação de vórtices no escoamento pode ocorrer com o auxílio desse parâmetros, conjuntamente com o critério  $IR$ , ou mesmo os critérios anisotrópicos, com objetivo de buscar zonas de baixa ou alta intensidade de aparecimento de vórtices no escoamento e determinação da participação desses termos nessa região.

# Capítulo 4

## Resultados Analíticos

No presente capítulo serão apresentados os resultados analíticos e numéricos de escoamentos típicos e que vêm sendo continuamente utilizados não somente para comparar diferentes critérios classificadores de vórtices mas também em outros estudos que envolvem investigações sobre padrões de escoamento, instabilidade entre outros. O objetivo do capítulo é comparar os principais critérios dispostos no capítulo 2, com as suas formulações objetivas e os novos critérios, baseados na persistência de deformação apresentada no capítulo 3 para esses escoamentos. Serão avaliados soluções clássicas de movimentos vorticais e escoamentos que produzem linhas de corrente caóticas, onde diferentes configurações de vórtices são observadas, além de outras estruturas relevantes para a classificação do escoamento.

### 4.1 Soluções Analíticas de Vórtices

Soluções analíticas de vórtices, apesar de comumente representarem modelos simplificados referentes a observações em escoamentos experimentais e do que seus formuladores entendem por vórtices, constituem referências importantes de comparação entre os critérios de classificação de estruturas vorticais e podem representar, com alguma precisão, padrões encontrados mesmo em escoamen-

tos turbulentos. Nessa seção serão aplicados os principais critérios descritos nos capítulos anteriores nessas soluções analíticas, divididas pelas similaridades nas soluções e nas hipóteses formuladoras.

Todas as soluções apresentadas nesse capítulo são formuladas em coordenadas cilíndricas e, portanto, as equações de transporte são representadas nessa base. Essas soluções têm como simplificação fundamental o fato de escoamento ocorrer a densidade constante. Assim, a equação de conservação da massa pode ser representada como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

Como já discutido no capítulo 4, a equação de transporte da vorticidade, pode ser escrita, em coordenadas cilíndricas, de acordo com as relações

$$\frac{D\omega_r}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla v_r + \nu \left( \nabla^2 \omega_r - \frac{\omega_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (4.2)$$

$$\frac{D\omega_\theta}{Dt} + \frac{v_\theta \omega_r}{r} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla v_\theta + \frac{\omega_\theta v_r}{r} + \nu \left( \nabla^2 \omega_\theta - \frac{\omega_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \right) \quad (4.3)$$

$$\frac{D\omega_z}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla v_z + \nu \nabla^2 \omega_z \quad (4.4)$$

Os operadores derivada material e laplaciano indicados acima podem ser escritos como

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.5)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.6)$$

As soluções analíticas analisadas nesse capítulo são axissimétricas, e portanto, a componente azimutal nas equações de transporte é nula e, caso o campo de velocidades seja tal que  $\mathbf{v} = (0, v_\theta(r, t), 0)$ , então existirá somente uma direção

não-nula da vorticidade, a direção axial. Esse tipo de vórtice é conhecido como vórtice puro, pois remete ao movimento circular de corpo rígido, onde o “eixo” de rotação se encontra normal ao plano de rotação com linhas de corrente fechadas contidas nesse plano.

Comumente na mecânica dos fluidos a função de corrente de Stokes,  $\psi$ , é introduzida nas equações de transporte quando se deseja linearizá-las. Essa função de corrente se relaciona com as componentes radial e axial da velocidade, resultando em

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (4.7)$$

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4.8)$$

Assim, a equação de transporte da vorticidade pode ser reescrita em função de duas funções escalares  $\psi$  e  $\Gamma = rv_\theta$  de acordo com as relações

$$\omega_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \quad (4.9)$$

$$\omega_\theta = -\left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] \quad (4.10)$$

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \quad (4.11)$$

Essa transformação de variáveis é tal que  $\omega_r$  e  $\omega_z$  podem ser resolvidas separadamente de  $\omega_\theta$ . Os contornos de  $\Gamma$  e  $\psi$  em um plano  $\theta = cte$  são a interseção das isosuperfícies de vorticidade e da função de corrente com o plano, respectivamente.

Grande parte das soluções analíticas de vórtices, sendo elas soluções invíscidas ou viscosas, são obtidas quando (4.2)-(4.4) podem ser linearizadas. Quando esse fato acontece, classifica-se o escoamento como *Beltramiano generalizado*. Um

escoamento invíscidos e em regime permanente pode ser classificado como Beltramiano generalizado quando a relação abaixo é satisfeita [35]

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla H \quad (4.12)$$

onde  $H = p + q^2/2$  é a entalpia total por unidade de massa e  $\rho q^2/2$  é a energia cinética por unidade de volume. Visto que a simplificação de escoamento em regime permanente foi aplicada, o movimento de partículas materiais ocorrerá ao longo de linhas de corrente e nas superfícies de revolução gerada pelas isocurvas  $\psi = cte$  ao longo do eixo  $z$ . Assim, podemos representar a circulação como uma função de  $\psi$ , ou seja,  $\Gamma = F(\psi)$  e as eqs. (4.9)-(4.11) podem ser reescritas como

$$\omega_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} = v_r \frac{dF}{\psi} \quad (4.13)$$

$$\frac{\omega_\theta}{r} = \frac{F}{r^2} \frac{dF}{d\psi} - \frac{dH}{d\psi} \quad (4.14)$$

$$\omega_z = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial r} = v_z \frac{dF}{\psi} \quad (4.15)$$

De acordo com a condição (4.12), temos que  $\mathbf{v} \cdot \nabla H = 0$  o que resulta na entalpia total como uma função somente de  $\psi$ . Portanto, avaliando as eqs. (4.13)-(4.15), temos que, para escoamentos invíscidos axissimétricos, somente a equação abaixo deve ser resolvida

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = r^2 \frac{dH}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi} \quad (4.16)$$

A Eq. (4.16) é conhecida como equação de *Bragg-Hawthorne* [65]. Em escoamentos viscosos axissimétricos a condição que classifica um vórtice como Beltramiano generalizado é tal que

$$v_r = 0, \quad v_\theta = v_\theta(r, t), \quad v_z = v_z(r, t) \quad (4.17)$$

ou seja, a vorticidade é tal que

$$\omega_r = 0, \quad \omega_\theta(r, t) = -\frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad \omega_z(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} \quad (4.18)$$

Avaliando as Eqs. (4.2)-(4.4) com a condição de vórtice Beltramiano generalizado satisfeita, temos que os efeitos viscosos são plenamente anulados pelos termos transientes de acordo com as relações

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \omega_\theta}{\partial t} = \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} \right) - \frac{\omega_\theta}{r^2} \right] \quad (4.20)$$

Apesar do fato das equações descritas acima serem lineares e, conseqüentemente, de fácil obtenção de soluções analíticas, um efeito importante como o estiramento da estrutura vortical não pode ser contabilizado nas soluções de vórtices Beltramianas generalizadas. Apesar disso, muitos critérios ainda são analisados avaliando-se esse tipo de solução, principalmente pela simplicidade de aplicação, resultando geralmente em soluções analíticas e contínuas.

#### 4.1.1 Vórtices axissimétricos colunares

##### 4.1.1.1 Vórtices colunares livres de estiramento axial

Uma das formas mais simples de escoamento Beltramiano generalizado, que atende a condição (4.19) é tal que as componentes da equação da conservação de momentum podem ser simplificadas para as relações

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \nu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (4.23)$$

No caso de um escoamento efetivamente invíscidos, somente a Eq. (4.21) é utilizada na solução do problema nesse tipo de modelo vortical. Assim, nesse tipo de solução, as forças devido a pressão se ajustam de forma a balancear as forças devido a aceleração centrífuga. Um exemplo desse tipo de solução é o consagrado *vórtice de Batchelor* [66], cujo campo de velocidades é dado pelas funções

$$v_r(r) = 0 \quad (4.24)$$

$$v_\theta(r) = \frac{q}{r} \left( 1 - e^{-r^2} \right) \quad (4.25)$$

$$v_z(r) = W_0 \pm e^{-r^2} \quad (4.26)$$

Conseqüentemente, a vorticidade apresenta componentes de acordo com as relações

$$\omega_\theta(r) = \pm 2re^{-r^2} \quad (4.27)$$

$$\omega_z = 2qe^{-r^2} \quad (4.28)$$

Esse tipo de solução é comumente utilizada na representação do escoamento na região mais afastada na esteira do escoamento ao redor de aerofólios. Visto que a vorticidade nessa solução possui distribuição Gaussiana, o vórtice de Batchelor é também classificado como pertencente a família de vórtices Gaussianos. Avaliando os autovalores do gradiente de velocidades para o campo descrito acima, chegam-se às relações

$$\lambda_2^{\nabla \mathbf{v}} = 0 \quad (4.29)$$

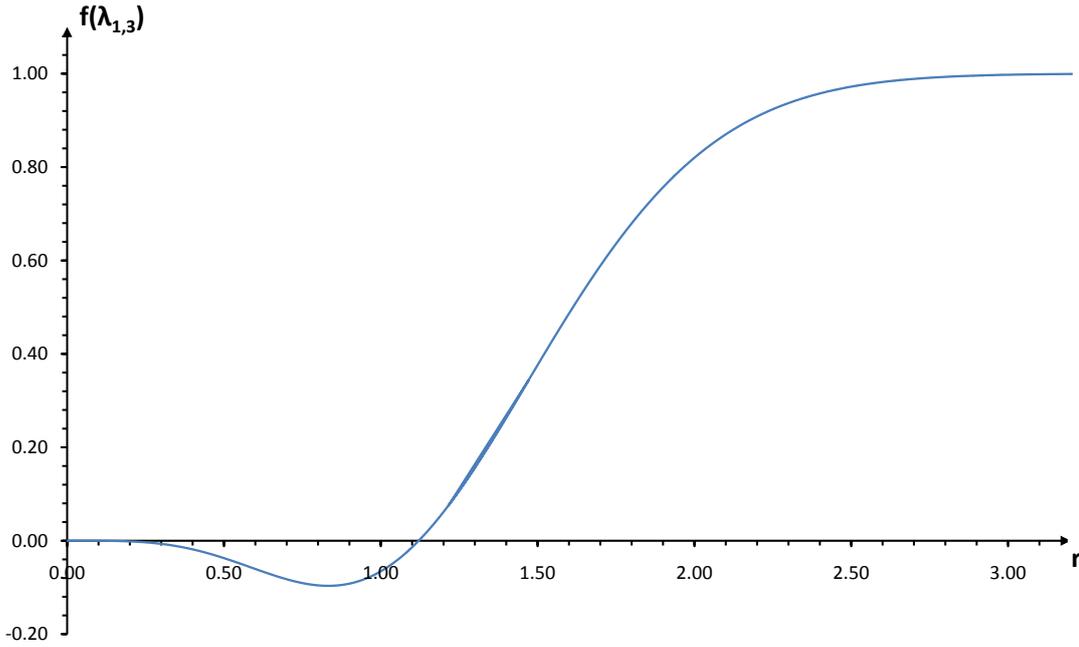


Fig. 4.1: Função de determinação da complexidade dos autovalores do gradiente de velocidades no modelo analítico do vórtice de Batchelor

$$\lambda_{1,3}^{\nabla \mathbf{v}} = \pm \left( \frac{q}{r^2} \right) \sqrt{(1 + 2r^2)e^{-2r^2} - (1 + 2r^2)e^{-r^2} + 1} \quad (4.30)$$

É possível observar que os autovalores de  $\nabla \mathbf{v}$  admitirão valores imaginários quando a função  $f(r) = (1 + 2r^2)\exp(-2r^2) - (1 + 2r^2)\exp(-r^2) + 1$ , encontrada no interior da raiz da função 4.30 admitir valores negativos. O gráfico 4.1 descreve a variação da função  $f(r)$  com a direção radial. Avaliando numericamente essa função, chega-se ao intervalo de  $0 < r < r_0 \approx 1,20905$  onde os autovalores do gradiente de velocidade são imaginários conjugados. Essa análise é importante, pois a maioria dos critérios discutidos no capítulo 2 são funções da parte imaginária desses autovalores ou assumem, com base nos invariantes do tensor gradiente de velocidades, esse estado complexo. Assim, o limite superior  $r_0$  será utilizado nos gráficos a seguir, com o objetivo de adimensionalizar a direção radial.

O gráfico da Fig. 4.2 apresenta a variação dos critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$ ,  $H$ ,  $He$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$ , de acordo com a normalização apresentada no capítulo 3, além do módulo da vorticidade, apresentada de forma normalizada em relação ao seu valor máximo no domínio. Todos os critérios foram avaliados no modelo de

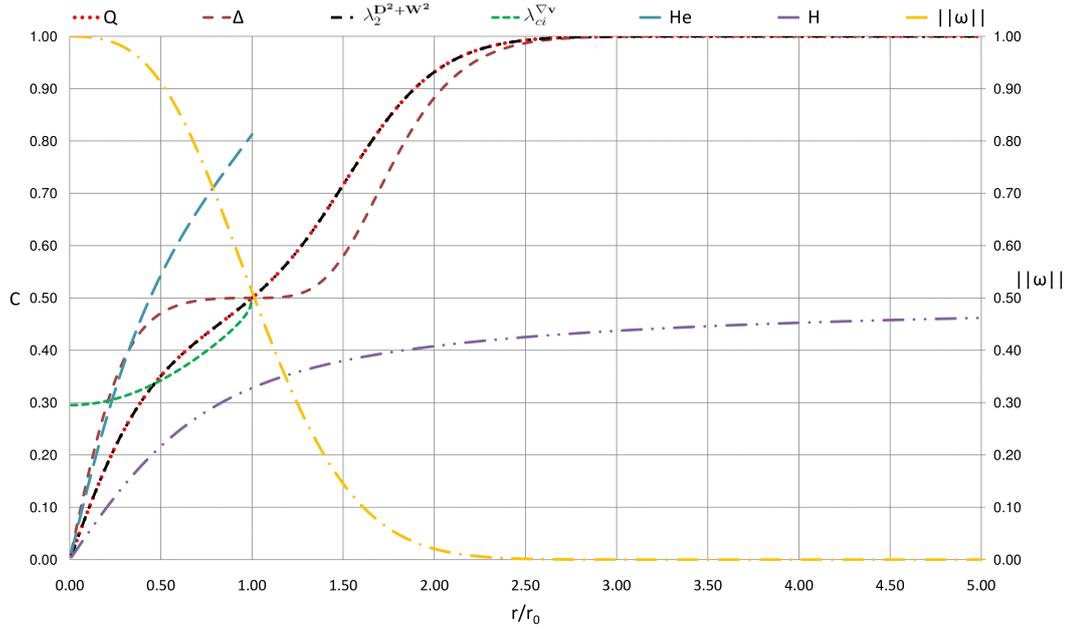


Fig. 4.2: Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $H$ ,  $He$  e  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  ao longo da direção radial, avaliados contra o módulo da vorticidade no modelo de vórtice de Batchelor

vórtice de Batchelor para  $q = 0.5$  e  $W_0 = 10$ . Observa-se que todos os critérios, nesse caso, concordam com a associação de uma região vortical como uma região onde os autovalores do gradiente de velocidades apresentam um par complexo conjugado, pois identificam como fronteira da estrutura vortical axissimétrica, com eixo alinhado com a direção  $z$  até  $r/r_0 = 1$ . O critério  $G$ , proposto por Kida e Miura [8] se baseia nos autovetores da Hessiana da pressão apresenta valor constante e igual a 0 em todo o domínio. Outro fato que deve ser apontado no gráfico é o fato de que o ponto  $r/r_0 = 1$  representa também o ponto de inflexão da curva de variação da vorticidade. Esse fato reforça a importância da avaliação das derivadas de segunda ordem da velocidade (nesse caso as derivadas de primeira ordem da vorticidade), para uma avaliação completa tanto da dinâmica da vorticidade quanto da presença de movimento vortical.

Devido a limitação ao longo da distância radial da região onde são encontrados autovalores imaginários para o gradiente de velocidades, alguns critérios não podem ser avaliados até o limite  $r \rightarrow \infty$ , pois são funções da parte imaginária dos autovalores ou autovetores do gradiente de velocidades. Os critérios  $He$ ,  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}}$

e  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  são exemplos de critérios que não podem ser avaliados ao longo de toda a distância radial para o modelo de vórtice de Batchelor. O critério  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}}{\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}}$ , em particular, é nulo no intervalo  $0 < r/r_0 < 1$ , por ser nula a parte real do autovalor complexo, o que caracteriza um movimento circular perfeito nessa região, de acordo com sua formulação. No ponto  $r/r_0 = 1$  o critério  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  chega ao seu limite, avaliando estruturas vorticiais ao longo dessa região e percebe-se que esse ponto delimita a fronteira de identificação positiva de estruturas vorticiais. Os critérios  $H$  e  $H_e$ , não atingem esse mesmo patamar de identificação no ponto  $r/r_0 = 1$ , pois suas formulações se baseiam no ângulo que a vorticidade se encontra defasado da velocidade normal às partes real e imaginária dos autovetores de  $\nabla \mathbf{v}$ .

Os operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $AR_{1,2,3}^B$  encontram-se, respectivamente, plotados nas Figs. 4.3 e 4.4, sendo avaliados com o critério  $Q$  e o seu respectivo critério objetivo  $Q_s$ , além dos operadores  $IR$  e  $AR^{\omega-\Omega}$ . Este último, assim como o operador  $AR^{swirls}$  apresentam valores nulos ao longo de todo o intervalo de  $r$  avaliado.

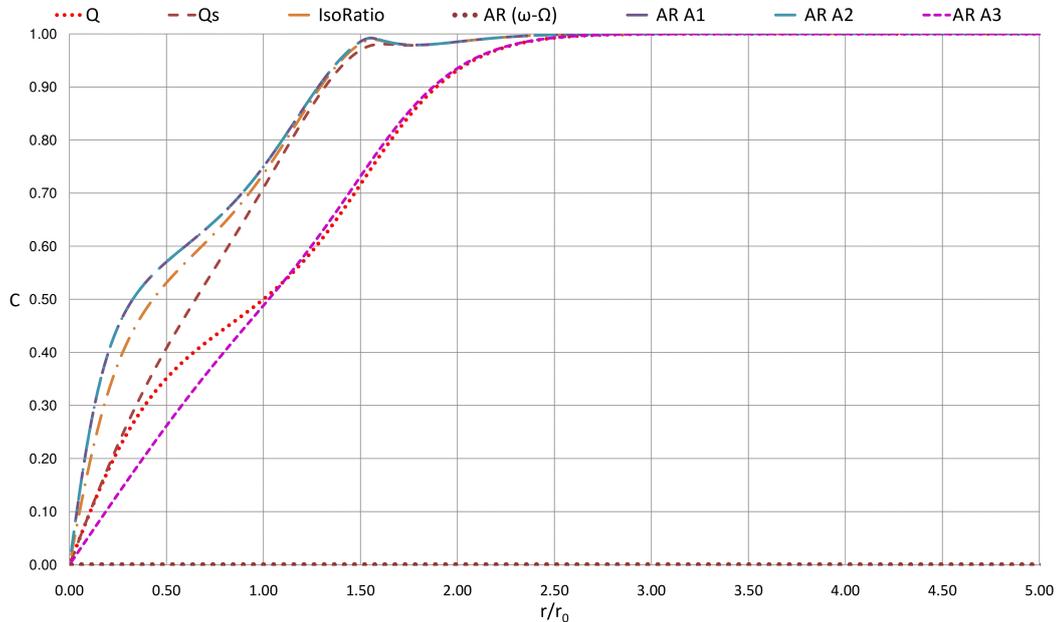


Fig. 4.3: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^A$ ,  $IR$  e  $AR^{\omega-\Omega}$  avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Batchelor

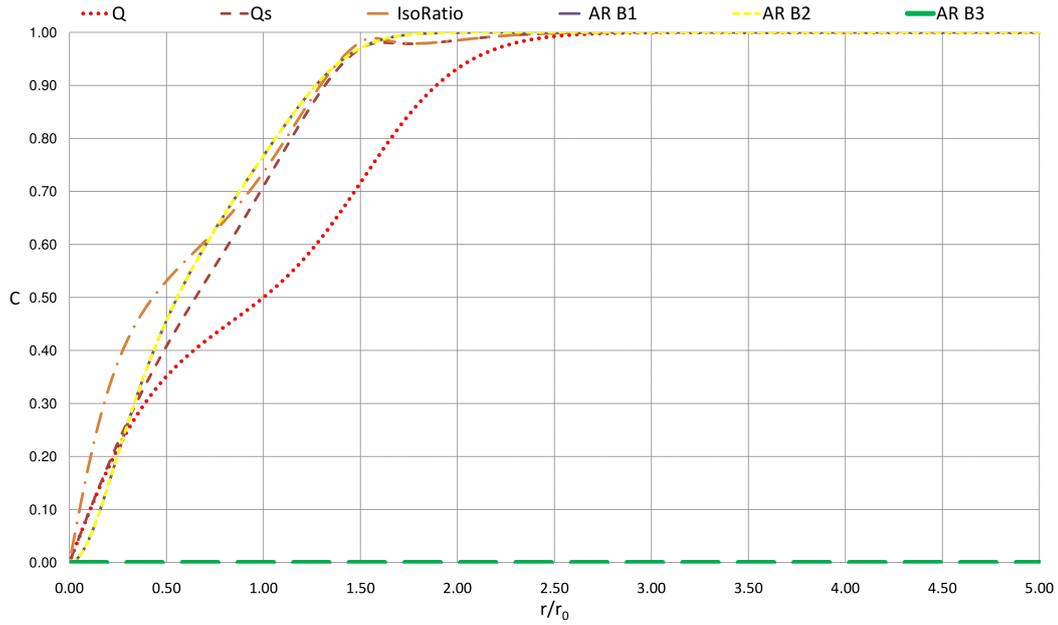


Fig. 4.4: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$  e  $AR^{\omega-\Omega}$  avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Batchelor

Pode-se observar pelos gráficos das Figs. 4.3 e 4.4 que os critérios baseados na derivada material objetiva do tensor taxa de deformação apresentam um diâmetro menor para o vórtice representado e, portanto, é mais restritivo nesse caso que o critério  $Q$ . O critério  $Q_s$ , pelo fato da vorticidade relativa ter relação direta com a parte fora de fase do tensor  $A_2$ , apresenta comportamento semelhante. Outros critérios baseados na vorticidade relativa, assim como o próprio módulo de  $W - \Omega$  e suas respectivas contrapartes não-objetivas se encontram dispostas nas Figs. 4.5 e 4.6. Como já discutido no capítulo 3, o critério  $H$  não apresenta uma contra parte objetiva, visto que a velocidade não pode, a princípio sofrer transformação tal que a torne objetiva, mas com o mesmo fundamento físico.

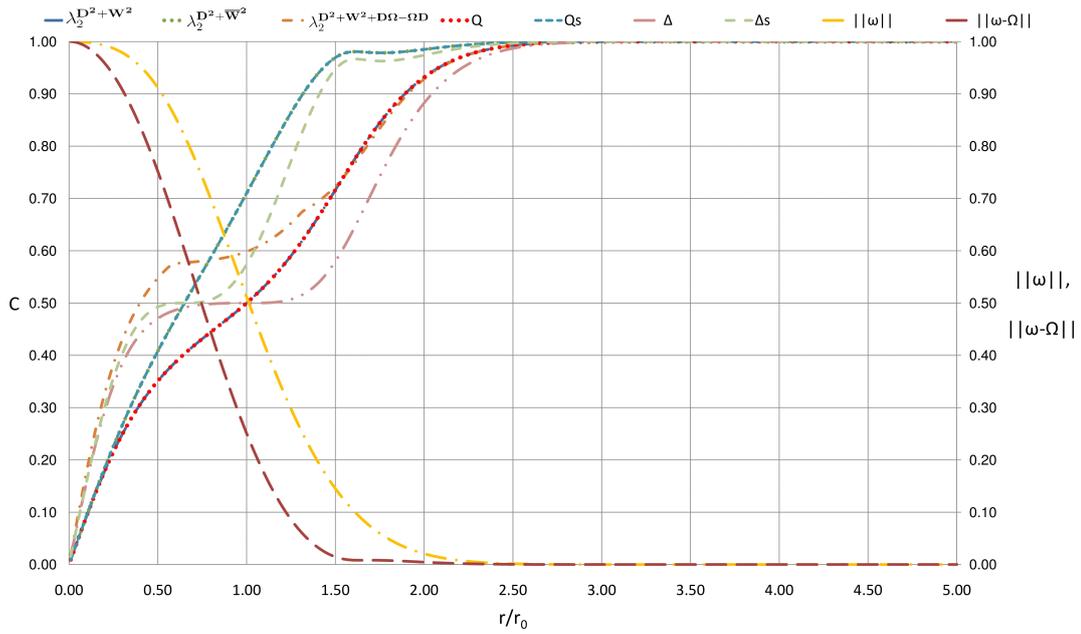


Fig. 4.5: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Batchelor

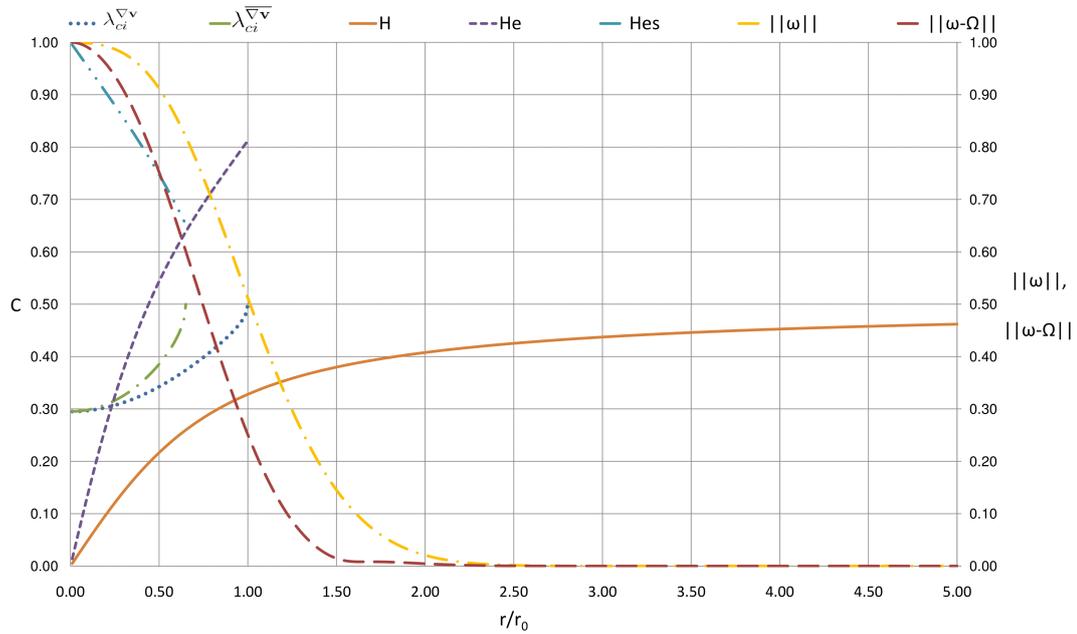


Fig. 4.6: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Batchelor

Observa-se nos gráfico das Figs. 4.5 e 4.6 uma antecipação da distância radial crítica, a partir da qual os autovalores do gradiente de velocidade não apresentam mais autovalores imaginários. Finalmente, o critério  $M_z$  proposto por Haller [14],

em sua formulação objetiva, pode ser observado na Fig. 4.5, comparados com outros critério existentes e propostos no presente trabalho. Na versão euleriana deste critério não há margem para uma grandeza contínua normalizada e, portanto, sua representação é indicada pelo valor 0 ou pelo valor 1 (passa ou não passa). Observa-se a prorrogação da diâmetro do vórtice observado pelo critério, próximo de valor radial a partir do qual a maioria dos critérios apresenta valor igual a 1, não mais identificando qualquer vórtice a partir desse ponto.

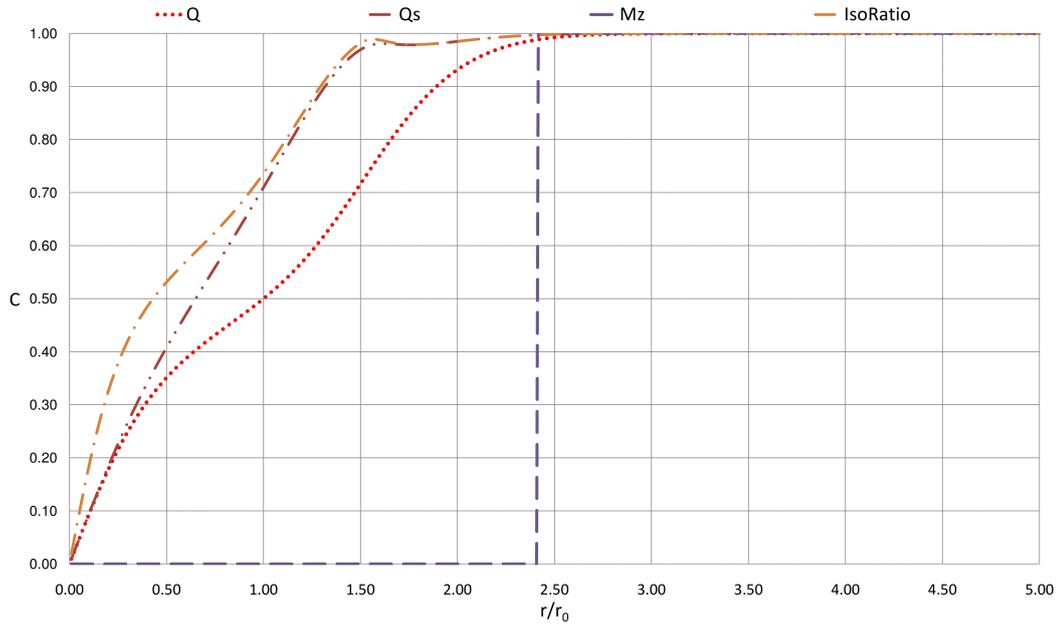


Fig. 4.7: Critério  $M_z$  avaliado ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Batchelor

No que diz respeito às soluções de vórtices colunares livres de deformação axial em escoamentos viscosos, uma família de soluções foi proposta por Neuville [67] cujas variáveis de similaridade são

$$\tau = \nu t, \quad \eta = \frac{r^2}{4\tau} \quad (4.31)$$

As variáveis de similaridade apresentadas na Eq. (4.31), quando dispostas na Eq. (4.19), resultam na relação

$$\eta \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial \eta^2} + (\eta + 1) \frac{\partial \omega_z}{\partial \eta} - \tau \frac{\partial \omega_z}{\partial \tau} = 0 \quad (4.32)$$

A Eq. (4.20) não é levada em consideração porque  $\omega$  possui componente somente na direção  $z$ . Uma transformação do tipo  $\omega_z = \tau^{-(n+1)}e^{-\eta}L(\eta)$  resulta na *equação de Laguerre*

$$\eta L'' + (1 - \eta)L' + nL = 0 \quad (4.33)$$

cujas soluções são os *polinômios de Laguerre* [68] que possuem a forma

$$L_n(\eta) = e^\eta \frac{d^n}{d\eta^n} \left( \frac{\eta^n}{e^\eta} \right) \quad (4.34)$$

assim, a solução geral de (4.32) pode ser dada por

$$\omega_z(\eta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \tau^{-(n+1)} e^{-\eta} L_n(\eta) \quad (4.35)$$

O decaimento exponencial de  $\omega_z$  com a evolução de  $\eta$  indica que a vorticidade se encontra concentrada em uma região com  $\eta \ll 1$ . Visto que os polinômios  $L_n(\eta)$  possuem  $n$  zeros, é possível aplicar uma fórmula recursiva para a obtenção desses polinômios do tipo

$$L_0(\eta) = 1 \quad (4.36)$$

$$L_1(\eta) = 1 - \eta \quad (4.37)$$

$$L_{n+1}(\eta) = (2n + 1 - \eta)L_n(\eta) - n^2 L_{n-1}(\eta) \quad (4.38)$$

Dois modos são soluções clássicas de vórtices colunares. O modo  $n = 0$  descreve a solução de vórtice de *Oseen-Lamb* [69] e [70]

$$v_\theta(r, t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right] \quad (4.39)$$

$$\omega_z(r, t) = \frac{\Gamma_0}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \quad (4.40)$$

Essa solução representa o decaimento viscoso de uma linha vortical de  $t = 0$  com circulação finita  $\Gamma = 2\pi r v_\theta$  que satisfazem as condições iniciais e de contorno

$$\Gamma(0, 0) = \Gamma_0, \quad \Gamma(0, t) = 0, \quad \Gamma(\infty, t) = \Gamma_0 \quad (4.41)$$

O comportamento do vórtice de Oseen-Lamb para  $r \gg 4\nu t$  se aproxima do comportamento do vórtice de linha, onde  $\Gamma_0 = 2\pi r v_\theta$ . Para valores pequenos na direção radial, quando  $v_\theta \cong \Gamma_0 r / (8\pi\nu t)$ , onde o movimento é similar a rotação de corpo-rígido. A distribuição na direção azimutal da velocidade na solução de vórtice de Oseen-Lamb é praticamente a mesmo do vórtice de Batchelor, sendo que, no segundo caso, avalia-se o campo de velocidade em um instante de tempo fixo  $t_0$  e a direção radial encontra-se reescalada a partir de um fator  $\sqrt{4\nu t_0}$ . Com o objetivo de normalizar a direção radial nas análises realizadas no decorrer do capítulo para essa solução, será aplicado o mesmo valor de  $r_0$  do caso anterior, quando foi estudada a solução de vórtice de Batchelor. Nas condições utilizadas no exemplo que será apresentado ( $\Gamma_0 = 100$  e  $\nu = 10$ ), o mesmo comportamento experimentado no vórtice de Batchelor ocorrerá na solução analítica de Oseen-Lamb quando  $t_0 \approx 0,0314$ , ou seja,  $r_0 = \sqrt{4\nu t_0} = 1,120905$ .

Novamente nessa solução de vórtice existe um patamar, que varia no tempo, a partir do qual ao longo da direção radial os autovalores do tensor gradiente de velocidades não apresentam mais valores imaginários conjugados. Para que o tensor gradiente de velocidades admita valores imaginários, torna-se necessário, nesse escoamento, que a seguinte condição seja atendida

$$\left[ \frac{1}{r} - \left( \frac{8\nu t + 2r^2}{4\nu t r} \right) \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right) + \left( \frac{4\nu t + 2r^2}{4\nu t r} \right) \exp\left(\frac{-2r^2}{4\nu t}\right) \right] < 0 \quad (4.42)$$

A condição (4.42) reproduz a necessidade de avaliação temporal do patamar a

partir do qual o gradiente de velocidades admite valores imaginários e é possível observar sua difusão, na direção radial, de acordo com a Fig. 4.8.

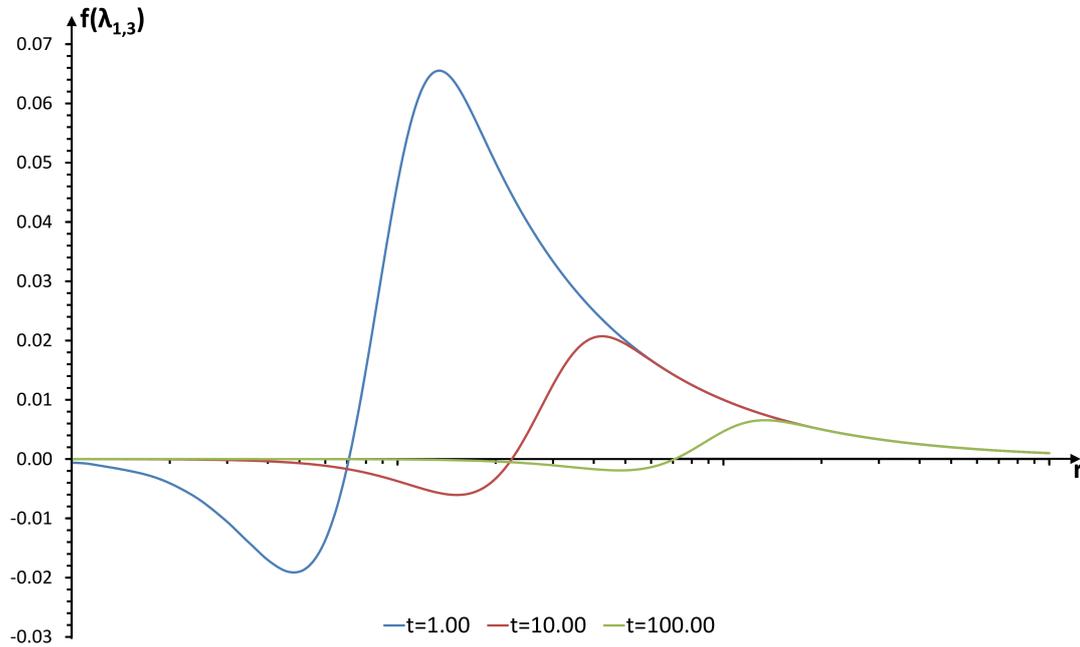


Fig. 4.8: Função de determinação da complexidade dos autovalores do gradiente de velocidades no modelo analítico do vórtice de Oseen-Lamb

O número de Reynolds para esse tipo de escoamento pode ser definido pela relação

$$Re_{\Gamma_0} = \frac{\Gamma_0}{2\pi\nu} \quad (4.43)$$

As Figs. 4.9-4.11 apresentam os critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $H_e$ , avaliados contra o módulo da vorticidade, para a solução de vórtice de Oseen-Lamb para instantes de tempo  $t = 0, 01, 10$  e  $100$  para um número de Reynolds baseado na circulação,  $Re_{\Gamma_0}$ , igual a unidade.

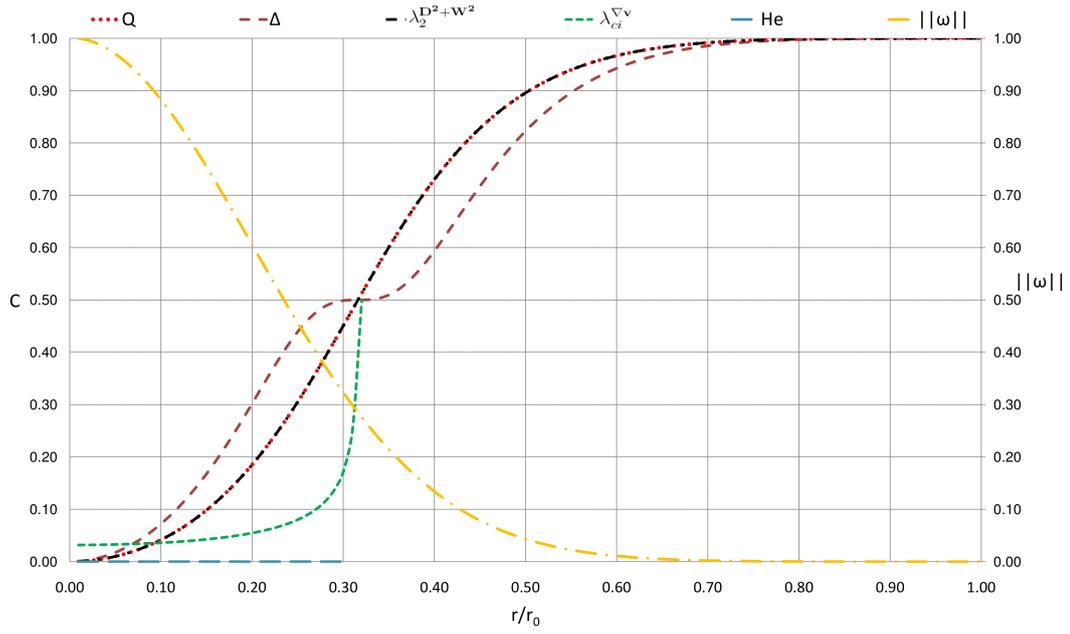


Fig. 4.9: Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1$

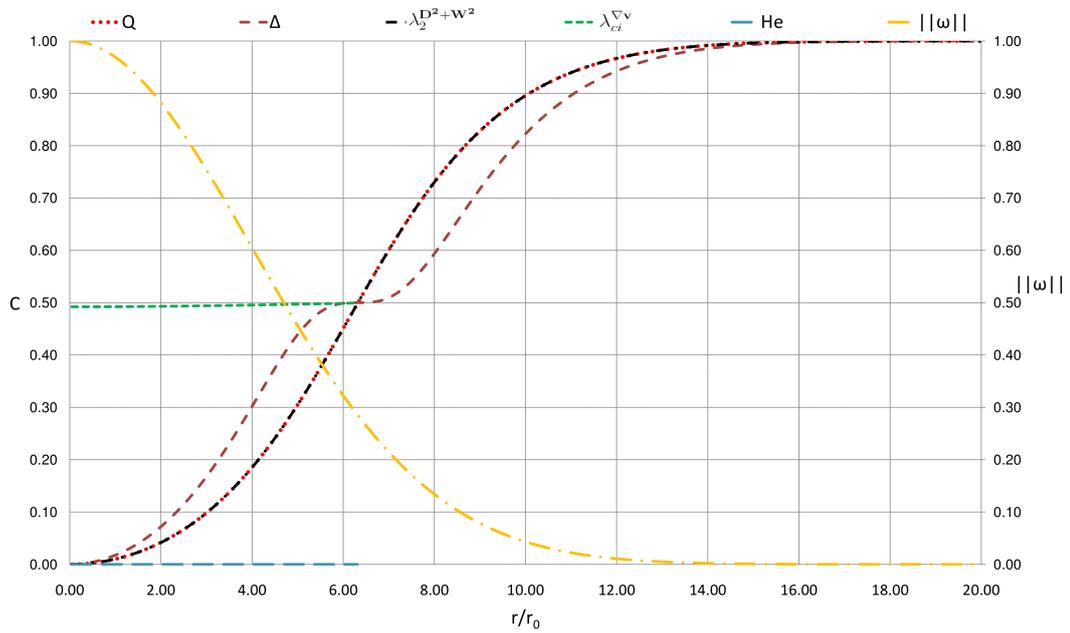


Fig. 4.10: Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1$

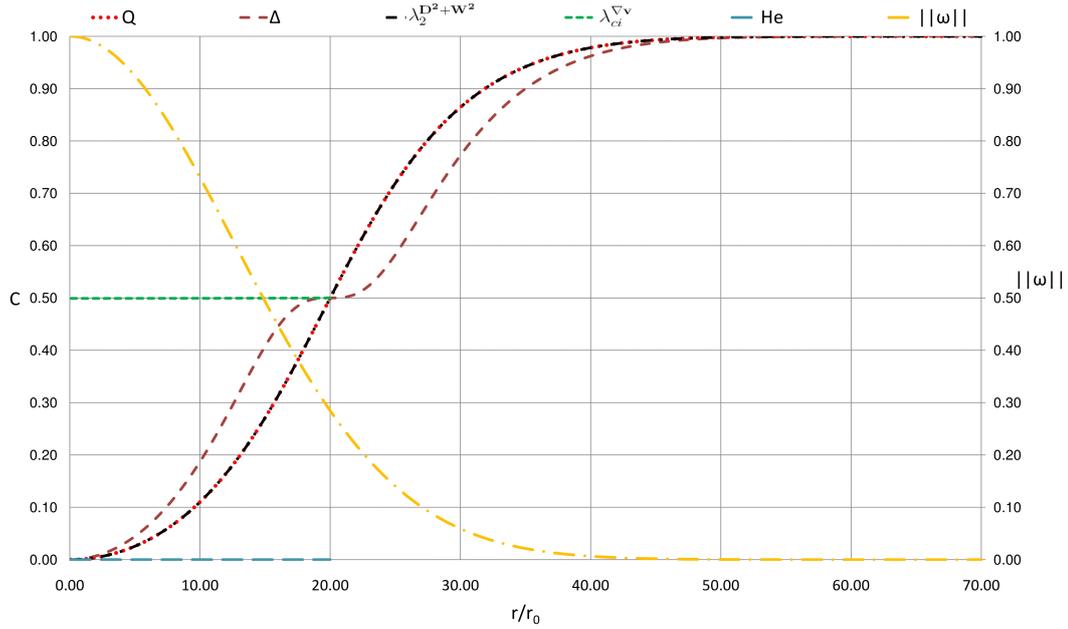


Fig. 4.11: Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re\Gamma_0 = 1$

Os resultados apresentados nas figuras anteriores corroboram os resultados obtidos para o vórtice de Batchelor, onde os critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$  e  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  capturam o mesmo diâmetro vortical em um mesmo instante de tempo, e a medida que o tempo avança, a região vortical é difundida na direção radial. O Critério  $G$ , assim como o operador  $\frac{\lambda_{cr}^{\nabla v}}{\lambda_{ci}^{\nabla v}}$  apresentam valores iguais a zero ao longo de todo o domínio, visto que ocorre um domínio dos termos fora da diagonal principal do tensor gradiente de velocidades na base dos autovetores da Hessiana da pressão para o primeiro e pelo fato da parte real do gradiente de velocidades na base original do problema apresentar parte real igual a zero, indicando um movimento circular de corpo rígido no plano formado pela parte real e imaginária dos autovetores de  $\nabla v$ .

Os critérios  $H$  e  $H_e$  apresentam valores constante e iguais a 1 e zero, respectivamente, seguindo a normalização descrita no capítulo 3, coerente com a idéia de que a vorticidade e a velocidade são ortogonais ao longo de toda a direção radial, e que o eixo de rotação das linhas de corrente é coincidente com a vorticidade, na região onde são encontrados autovalores imaginários para o gradiente

de velocidades, visto que trata-se de uma solução bidimensional.

Os operadores  $AR_{1,2}^A$  e  $AR_{1,2,3}^B$  encontram-se, respectivamente, plotados nas Figs. 4.12-4.14 e 4.15-4.17, sendo avaliados com o critério  $Q$  e o seu respectivo critério objetivo  $Q_s$ , além dos operadores  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  para os instantes de tempo  $t = 0, 01, 10$  e  $100$  para  $Re_{\Gamma_0} = 1$ . O operador AniRat  $AR_3^A$  é indeterminado, visto que todos os seus termos avaliados no tensor  $A_2^{A1}$  são nulos.

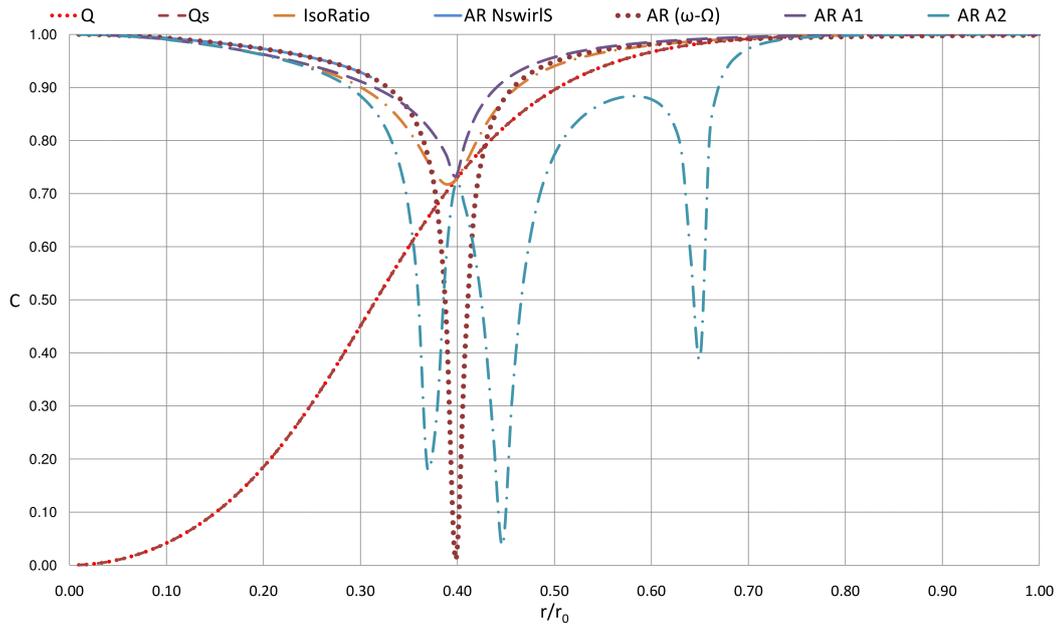


Fig. 4.12: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1$

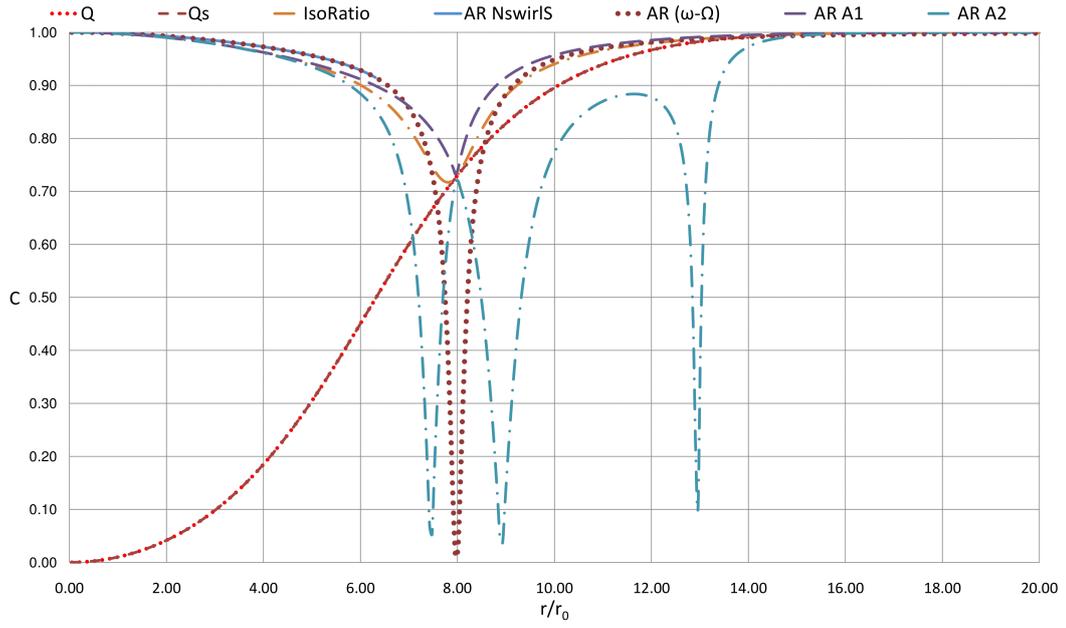


Fig. 4.13: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1$

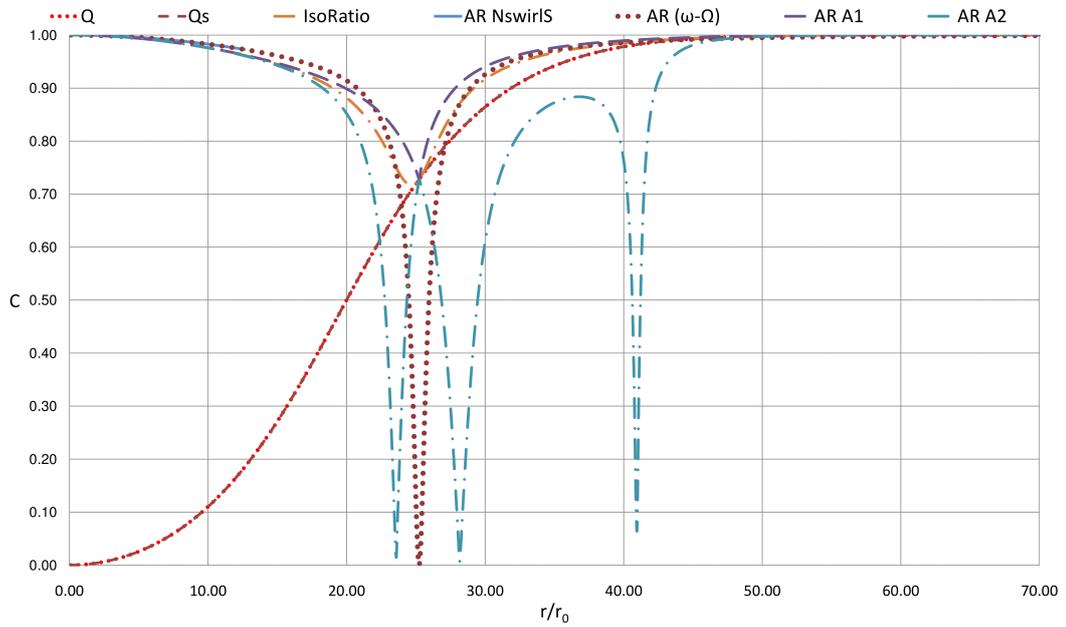


Fig. 4.14: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1$

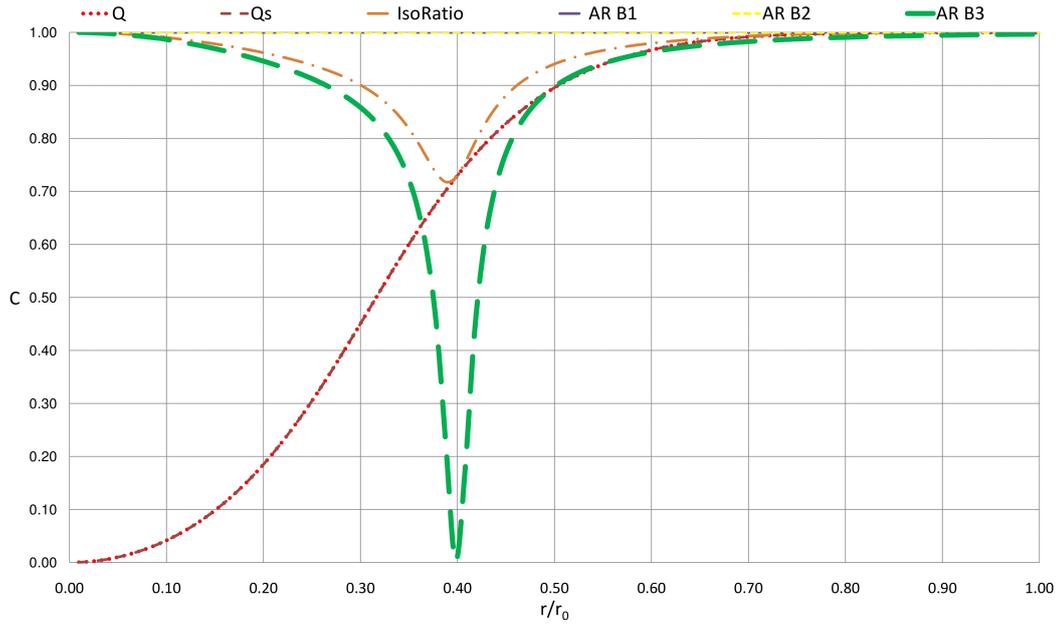


Fig. 4.15: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1$

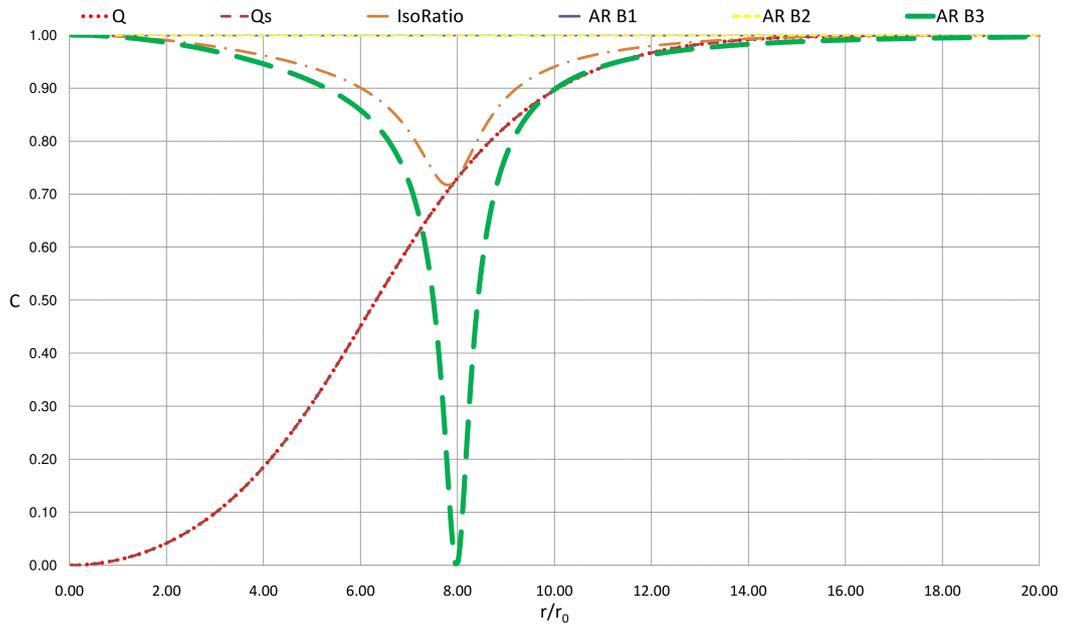


Fig. 4.16: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1$

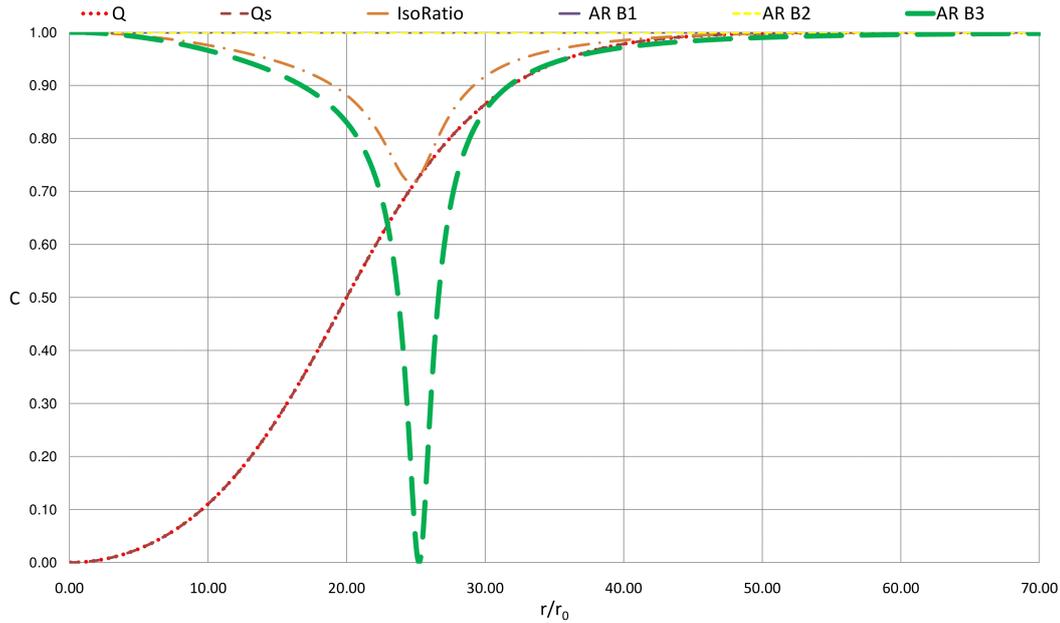


Fig. 4.17: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirlS}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1$

A possibilidade de avaliação das derivadas temporais no tensor  $A_2$  resulta em uma alteração no comportamento do critério, quando comparado com a solução de vórtice de Batchelor ou mesmo com os critérios existentes que se baseiam na vorticidade. Destacam-se nesses resultados o fato de que os operadores  $AR_{1,2}^B$  não avaliaram estruturas coerentes ao longo de toda a direção radial, enquanto que os operadores  $AR_{1,2}^A$  e  $AR_3^B$  possuem valor diferente de um em uma região afastada do eixo, comportamento não evidenciado nos critérios e operadores dos gráficos 4.9-4.11. Esse comportamento acontece por que o termo de aceleração local transiente apresenta valores relativamente altos, se comparados com os outros termos de  $A_2$ . Esses valores tendem a se alinhar com a diagonal principal de  $A_2^{A_1}$ , ou seja, estão em fase com  $A_1$ .

Visto que a vorticidade relativa nesse caso aponta na mesma direção da vorticidade, mas com sentidos diferentes, os critérios baseados na vorticidade, com a exceção dos critérios  $H_{es}$  e  $H_e$ , que avaliam diretamente essa direção, apresentaram valores semelhantes em toda a direção radial. O critério  $H_{es}$  apresenta valores iguais a unidade ao longo de toda a direção radial. A vorticidade e a

vorticidade relativa apresentaram comportamento semelhantes se normalizadas pelos seus respectivos valores máximos, mas o módulo absoluto da vorticidade relativa é relativamente superior ao da vorticidade. Esse comportamento pode ser observado nos gráficos das Figs. 4.18-4.20

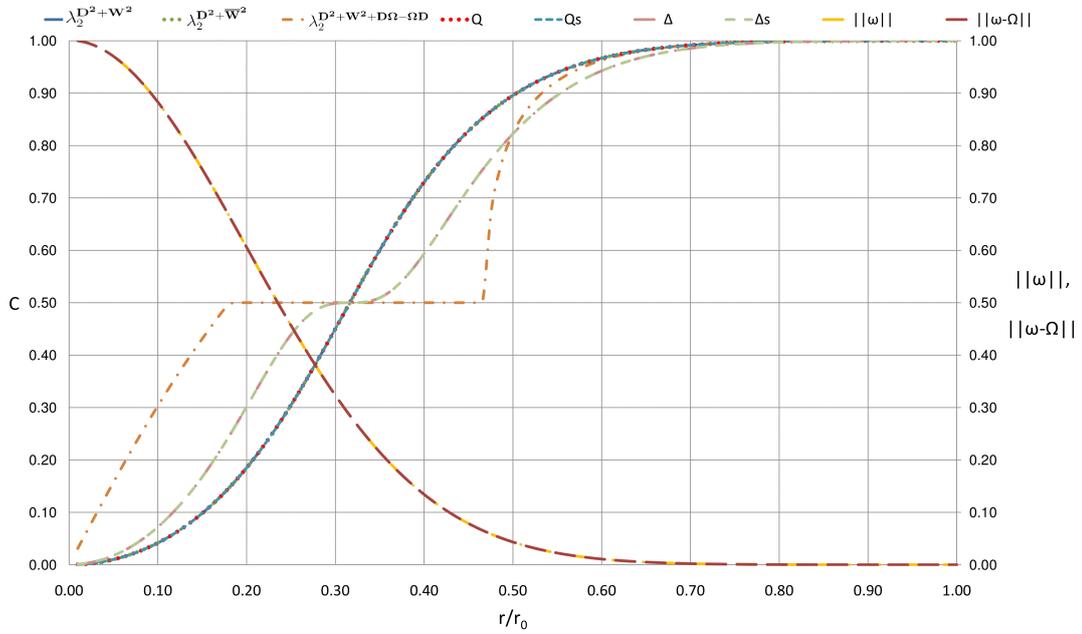


Fig. 4.18: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1$

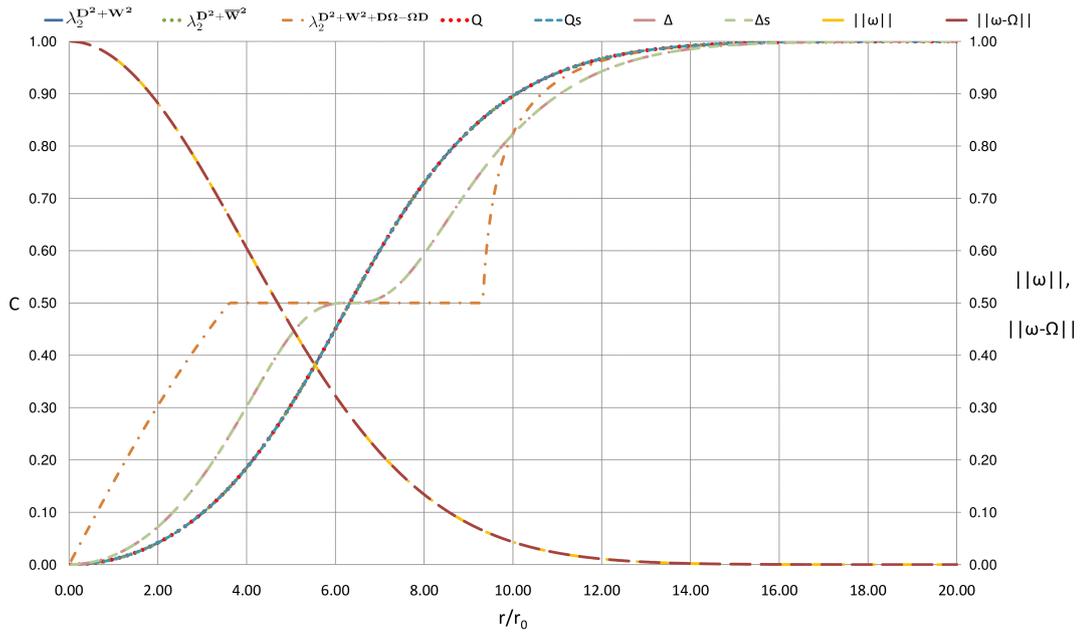


Fig. 4.19: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1$

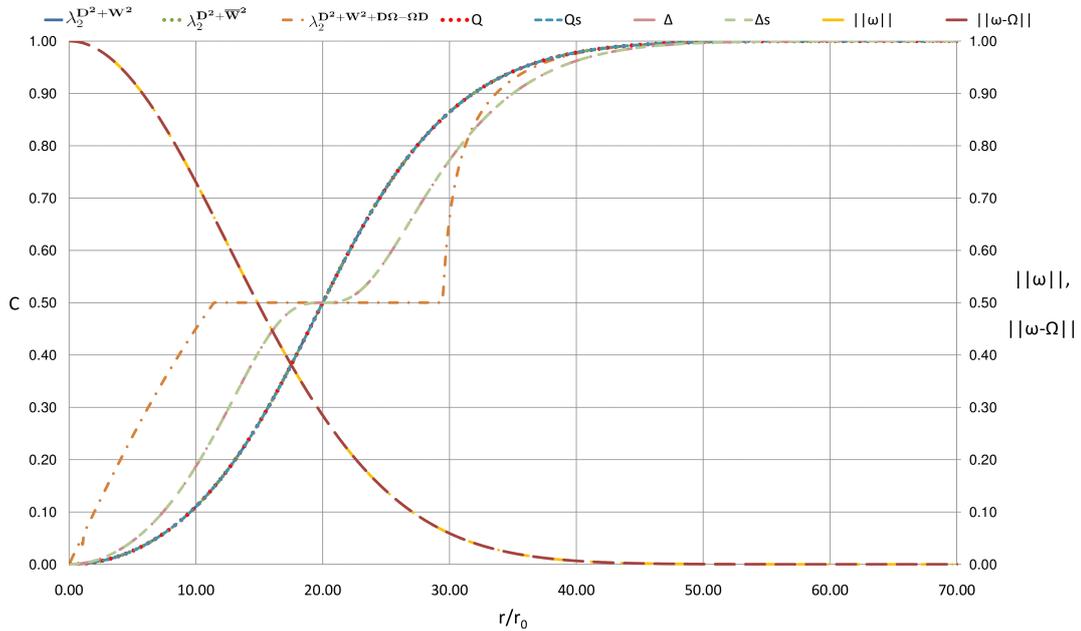


Fig. 4.20: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 1$

Nos gráficos das Figs. 4.18-4.20 destaca-se o comportamento do critério  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$  frente aos demais e a zona de transição que o operador dispõe entre a região vortical e a região onde não mais são observadas essas estruturas,

devido à mudanças no valor do autovalor associado ao critério e a consequente mudança na direção principal da Hessiana da pressão, quando avaliada em sua plenitude. Novamente os critérios  $G_s$  e  $G'_s$  apresentaram valores iguais a zero ao longo de toda a direção radial, devido a superioridade dos termos de  $\nabla \mathbf{v}$  em fase com  $\mathbf{D}^2 + \overline{\mathbf{W}}^2$  e  $\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2 + \mathbf{D}\Omega - \Omega\mathbf{D}$  frente aos termos fora de fase. Visto que o campo de velocidades do vórtice de Oseen-Lamb é bidimensional, o  $Det(\mathbf{D})$  é nulo e o critério  $M_z$  torna-se indeterminado ao longo de todo o domínio.

Avaliando a influência do número de Reynolds no escoamento, a partir das mudanças nos critérios e operadores de identificação de estruturas vorticiais, temos que os critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$ ,  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  e  $H_e$ , avaliados contra o módulo da vorticidade, para a solução de vórtice de Oseen-Lamb para instantes de tempo  $t = 0,01$ , 10 e 100 para um número de Reynolds baseado na circulação,  $Re_{\Gamma_0}$ , igual a 10 têm seus comportamentos apresentados nos gráficos das Figs. 4.21-4.23.

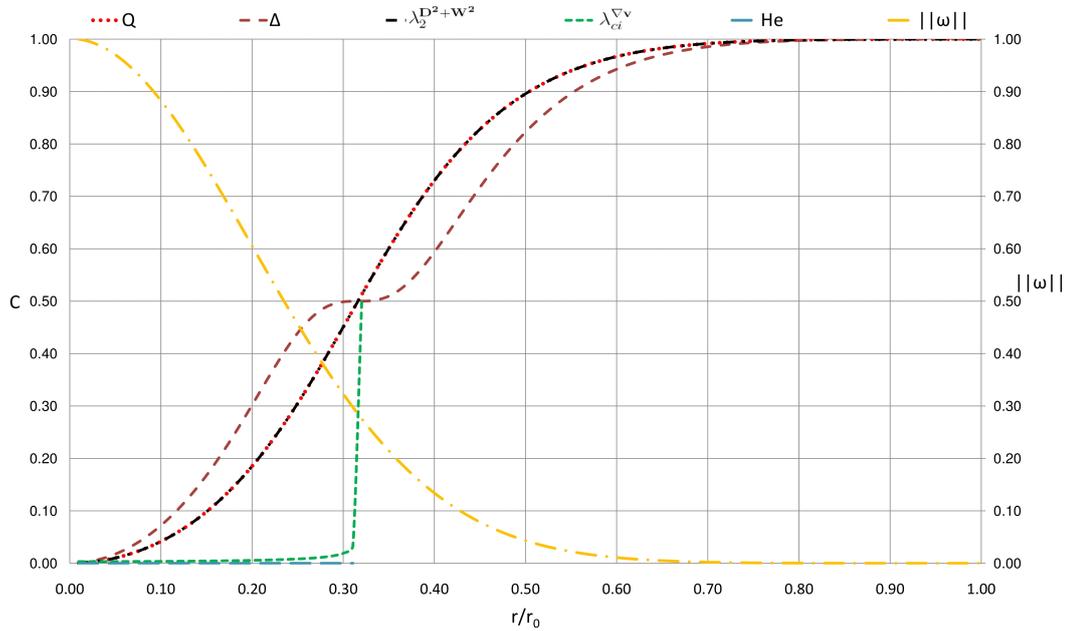


Fig. 4.21: Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$

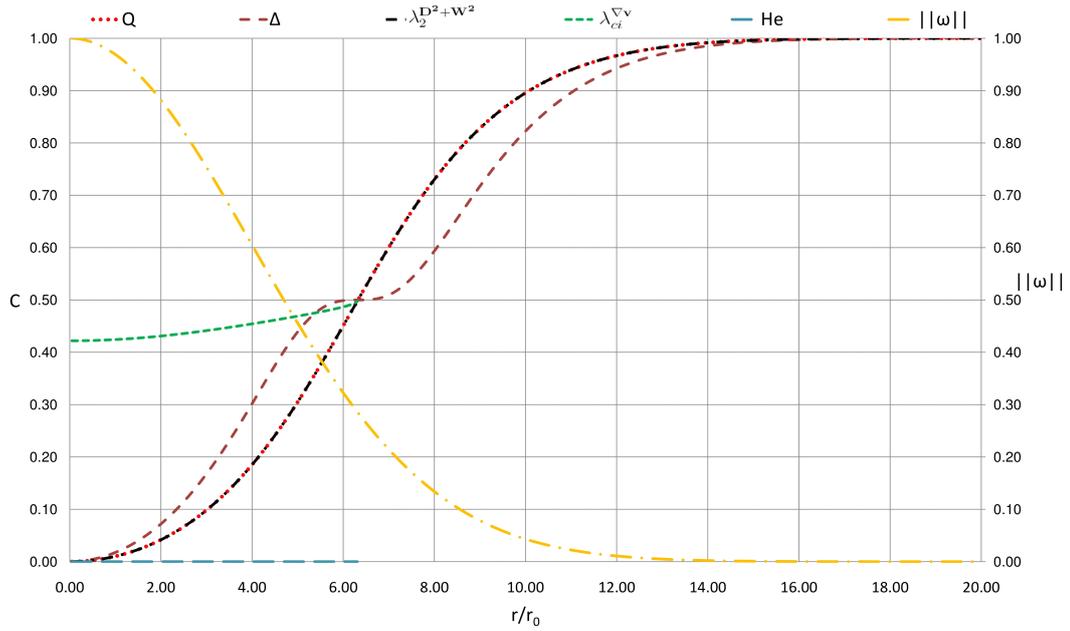


Fig. 4.22: Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $He$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$

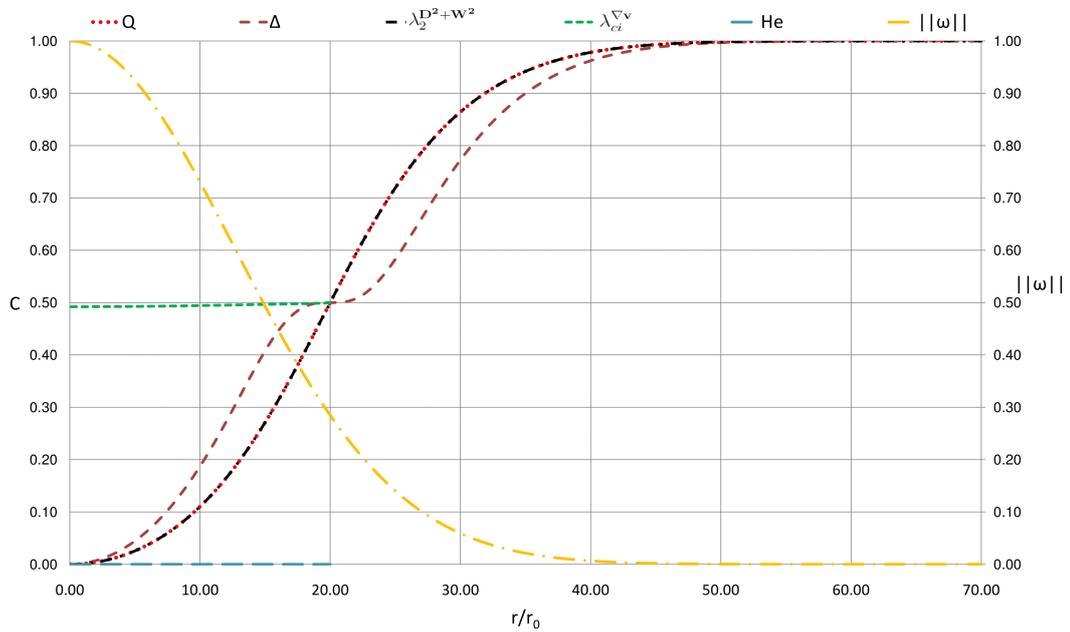


Fig. 4.23: Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $He$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$

Observa-se praticamente a inexistência de diferenças nos critérios apresentados nos gráficos das Figs. 4.21-4.23 com relação aqueles apresentados anterior-

mente com o número de Reynolds igual a unidade. Somente o operador  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  apresenta significativa diferença. Os operadores  $AR_{1,2}^A$  e  $AR_{1,2,3}^B$  encontram-se, respectivamente, dispostos nos gráficos das Figs. 4.24-4.26 e 4.27-4.29, sendo avaliados com o critério  $Q$  e o seu respectivo critério objetivo  $Q_s$ , além dos operadores  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  para os instantes de tempo  $t = 0,01$  e  $100$ , porém com um número de Reynolds baseado em  $\Gamma_0$ ,  $Re_{\Gamma_0}$ , igual a 10.

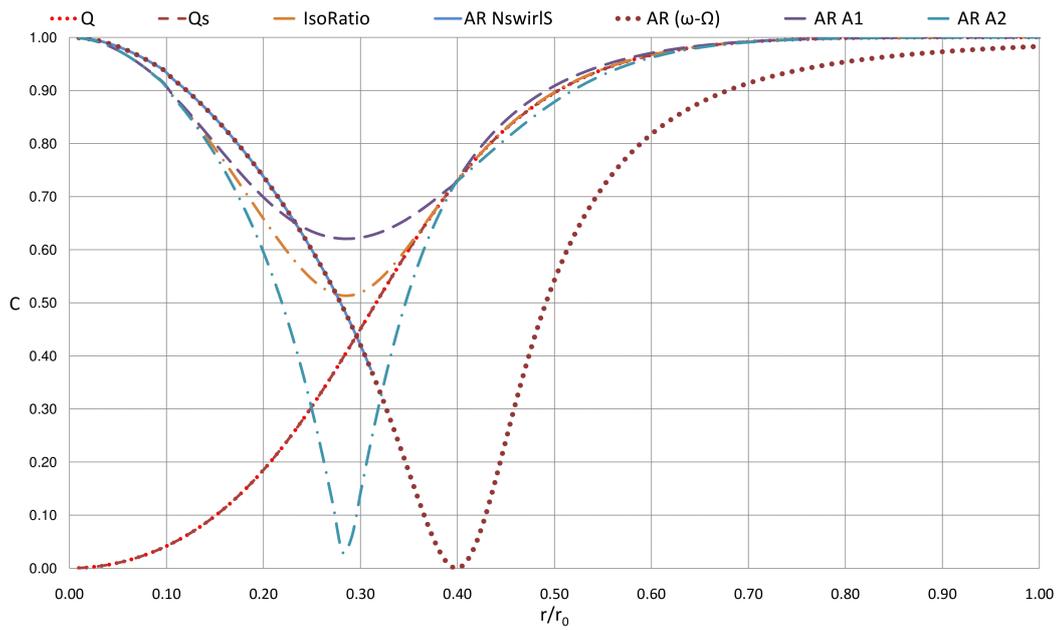


Fig. 4.24: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirls}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$

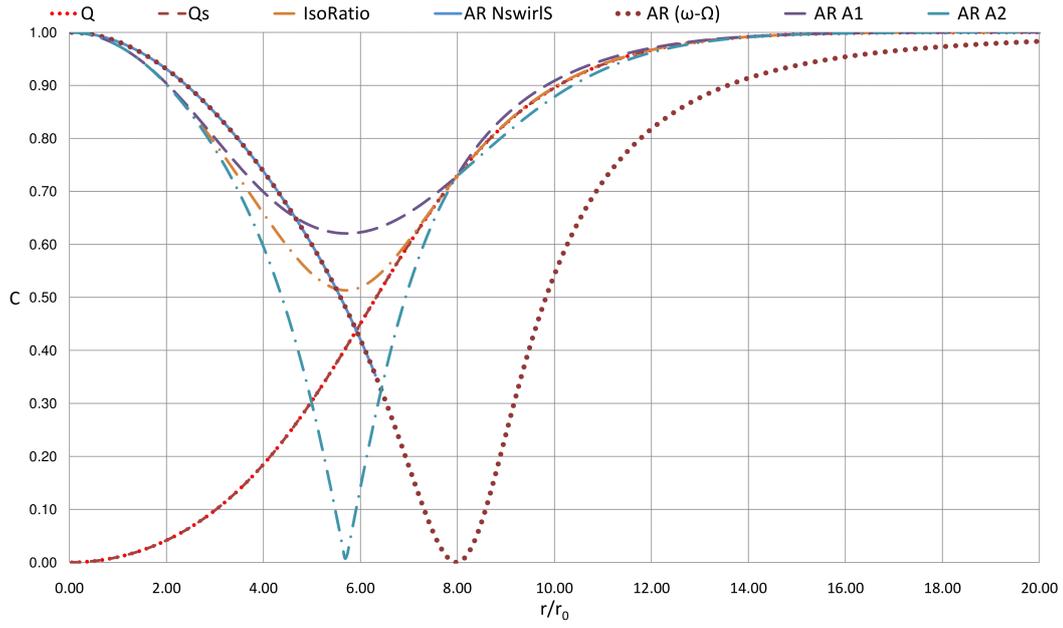


Fig. 4.25: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirlS}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$

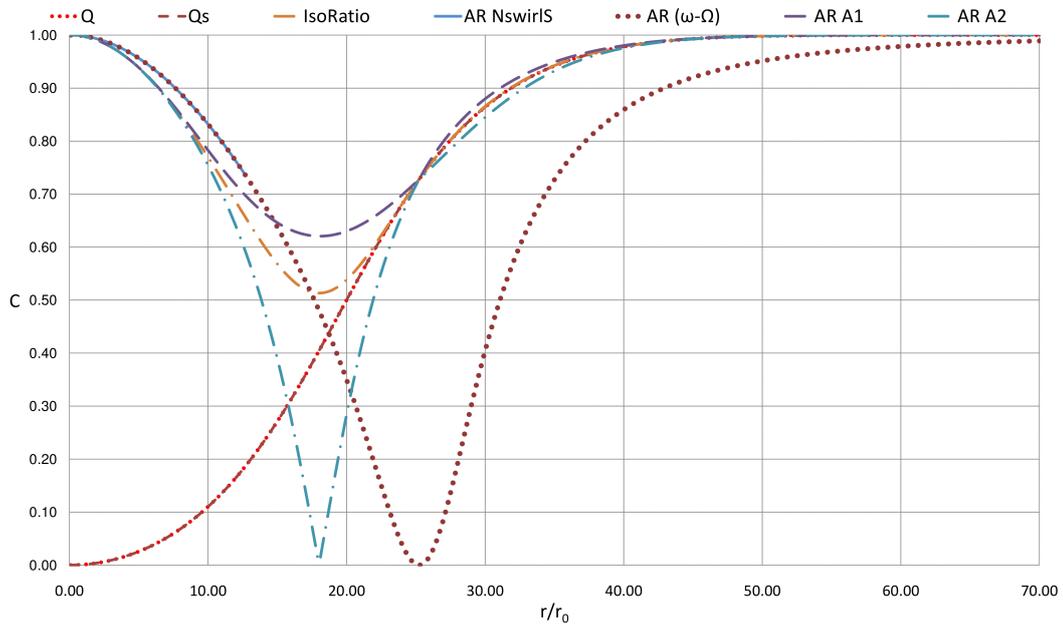


Fig. 4.26: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{nswirlS}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$

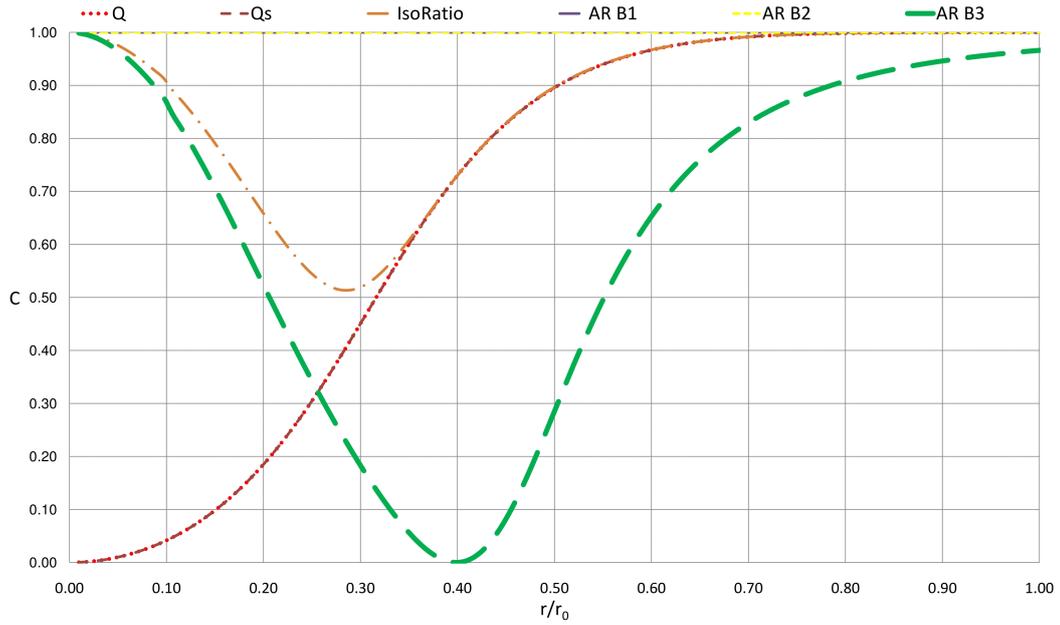


Fig. 4.27: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$

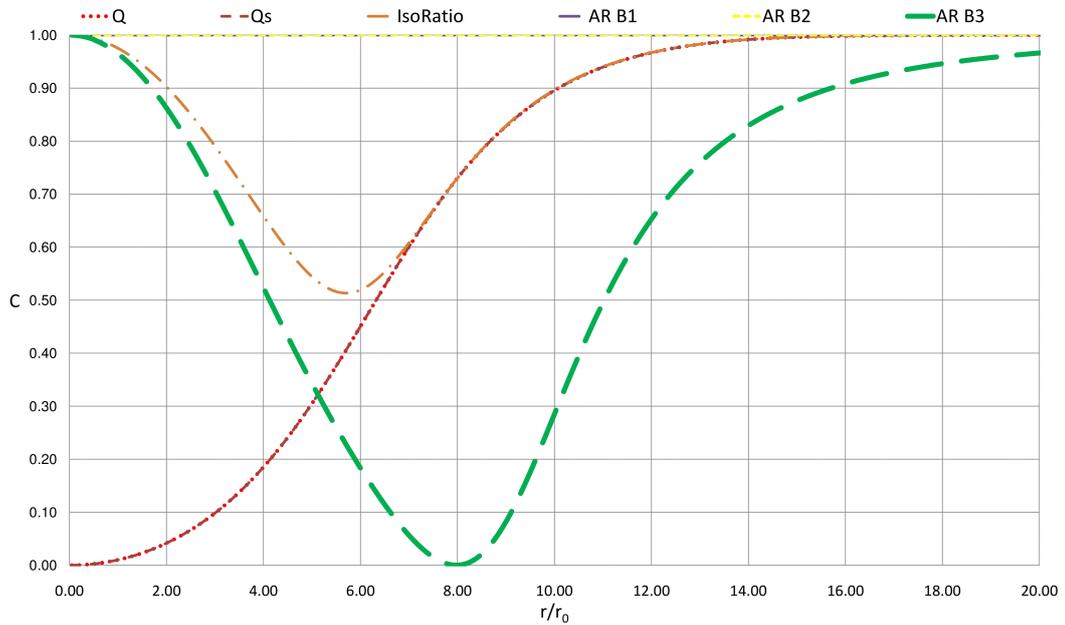


Fig. 4.28: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$

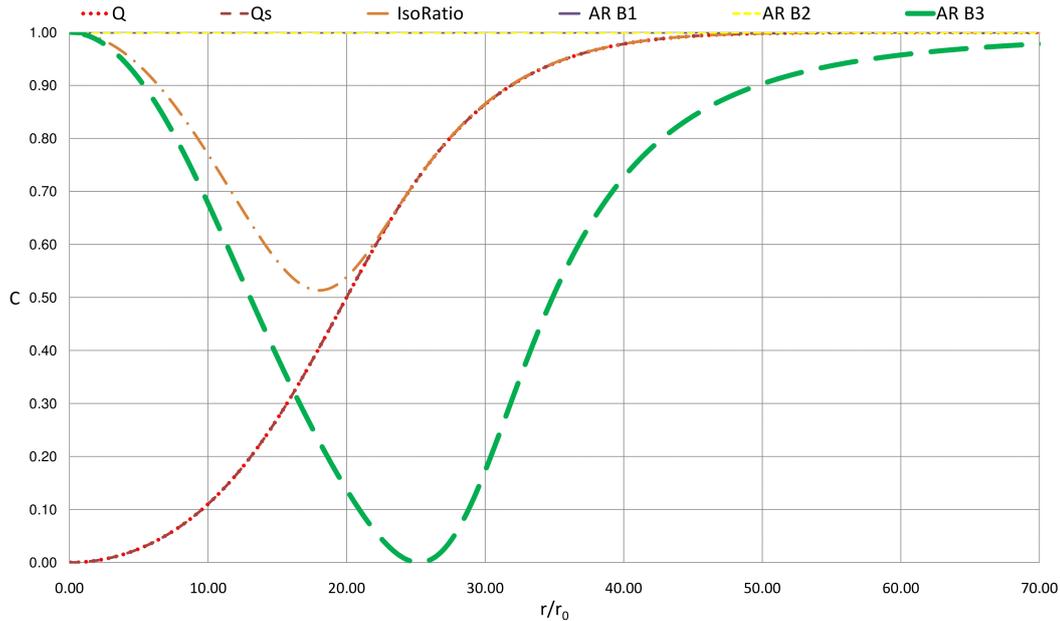


Fig. 4.29: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirls}}$  avaliados no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$

É possível observar nas Figs. 4.24-4.29 uma completa mudança no comportamento dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirls}}$  com relação aos resultados mostrados para  $Re_{\Gamma_0}$  igual a unidade. Isso ocorre por que, diferente da situação anterior, os termos que tornam objetivo o tensor  $A_2$  ganham relevância em relação aos termos de aceleração local transiente do mesmo, um vez que a circulação maior implica na acentuação da difusão no domínio, diminuindo a distância a partir da qual os critérios baseados no tensor  $A_2$  identificam estruturas vorticais no domínio.

Alguns dos critérios baseados na vorticidade relativa, assim como suas contrapartes originais encontram-se dispostas nos gráficos das Figs. 4.30-4.32 para  $Re_{\Gamma_0}$  igual a 10. O critério  $H_{es}$  possui valores iguais a 1 até o ponto onde o gradiente de velocidades objetivo apresenta autovalores imaginários, que nesse caso é o mesmo ponto representado pelo gradiente de velocidades não-objetivo, visto que a vorticidade relativa encontra-se no sentido contrário da vorticidade e o vetor formado pelas partes real e imaginária do autovetor complexo de  $\overline{\nabla \mathbf{v}}$ . O operador  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla \mathbf{v}}}$  possui o mesmo comportamento de sua contraparte não-objetiva,

$\lambda_{ci}^{\nabla v}$ , e também não se encontra disposto nos gráficos.

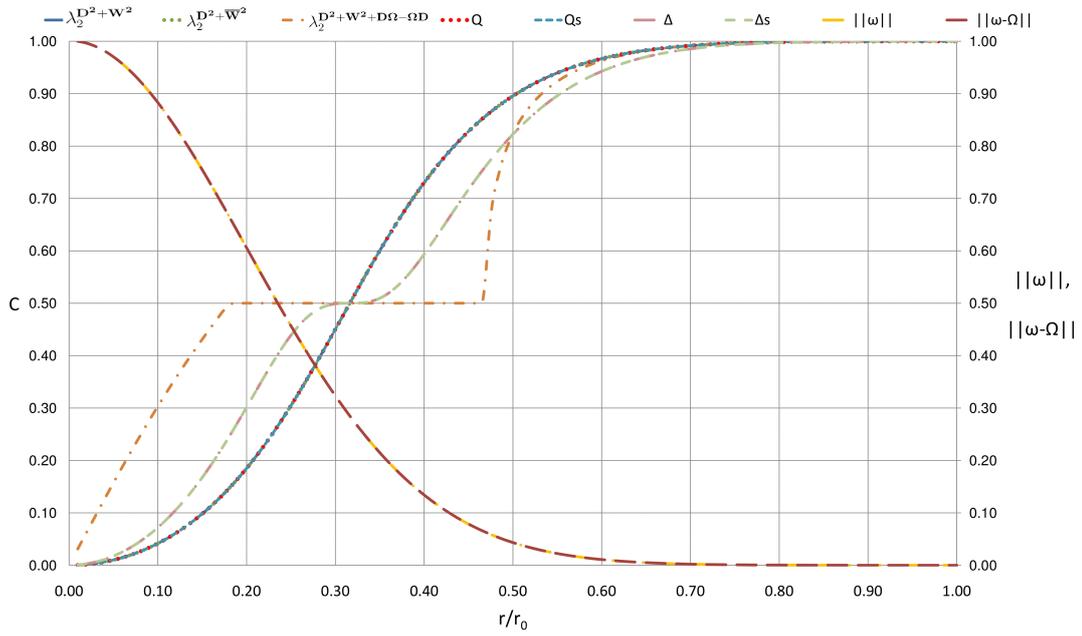


Fig. 4.30: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$

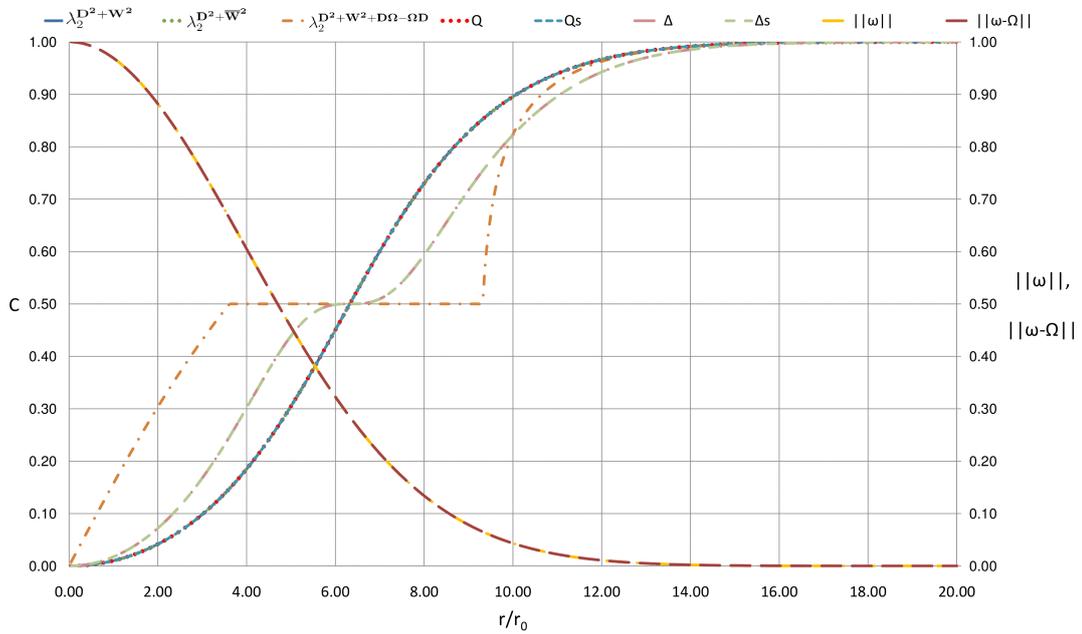


Fig. 4.31: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$

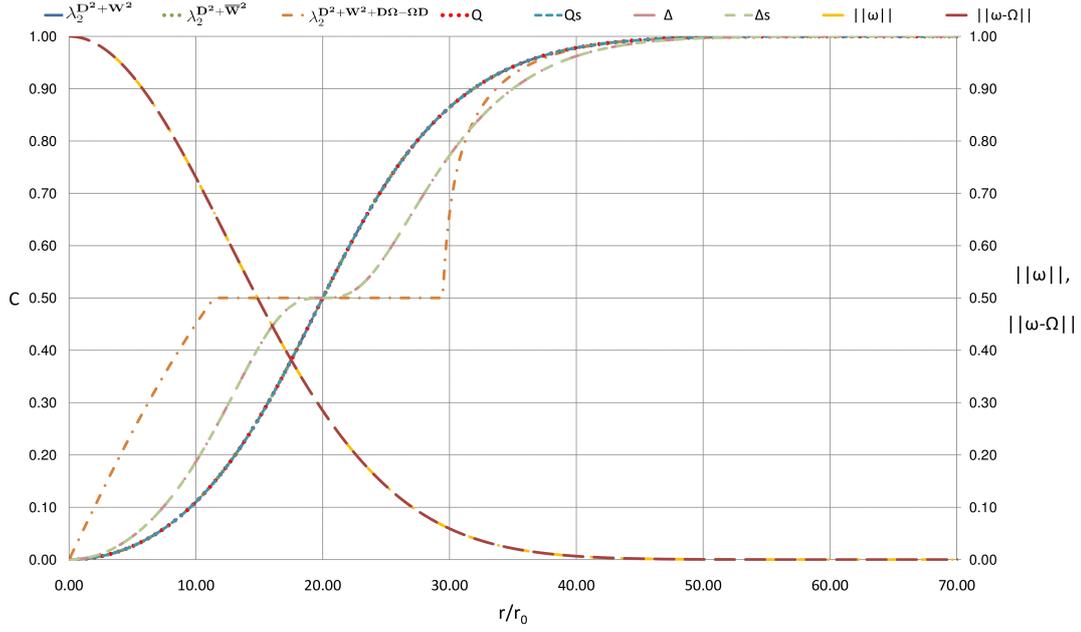


Fig. 4.32: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$  e  $Re_{\Gamma_0} = 10$

O escoamento de Oseen-Lamb reforça a necessidade de critérios que identifiquem estruturas vorticais, mas que sejam sensíveis a características dinâmicas do escoamento e não somente cinemáticas. Os critérios baseados no tensor  $A_2$  mostram-se sensíveis a variação no número de Reynolds e a sua relação de efeitos contra os efeitos locais transientes no escoamento.

O modo  $n=1$  do polinômio de Laguerre representa o modelo analítico de vórtice de Taylor [71], cujo campo de velocidades é dado pela função

$$v_{\theta}(r, t) = \frac{Mr}{8\pi\nu t^2} \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right) \quad (4.44)$$

e com vorticidade dada pela relação

$$\omega_z(r, t) = \frac{M}{2\pi\nu t^2} \left(1 - \frac{r^2}{4\nu t}\right) \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu t}\right) \quad (4.45)$$

Nas funções descritas acima,  $M$  representa o momentum angular total com relação a direção radial e é dado pela integral

$$M = \int_0^{\infty} 2\pi r^2 v_{\theta} dr. \quad (4.46)$$

Essa solução analítica de vórtice tem circulação total nula, visto que a vorticidade muda de sinal quando  $\frac{r^2}{4\nu t} > 1$  e  $M$  finito. Cabe notar que a vorticidade nessa solução de vórtice é igual a derivada temporal da vorticidade da solução de Oseen-Lamb e, assim como o caso anterior, novamente torna-se necessária a avaliação do patamar a partir do qual, na direção radial, o escoamento passa a não mais admitir autovalores imaginários, o que acarreta na alteração na região vortical avaliada pelos principais critérios. Entretanto, Alguns outros pontos devem ser examinados nesse escoamento para que seja possível a topologia da distribuição dos critérios na direção radial e ao longo do tempo.

As Figs. 4.33-4.35 apresentam os critério  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  e  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  para a solução de vórtice de Taylor para instantes de tempo  $t = 0.01$ , 10 e 100 para valores de  $M = 100$ , equivalente ao valor de  $\Gamma_0$  para a solução de vórtice de Oseen-Lamb com  $Re_{\Gamma_0} = 10$  e  $\nu = 10$ . O operador  $\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}} / \lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  até  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}} = 0.5$ , pois a parte real do autovalor complexo do gradiente de velocidades  $\nabla \mathbf{v}$  é nula, assim como nas soluções de vórtice de Batchelor e Oseen-Lamb.

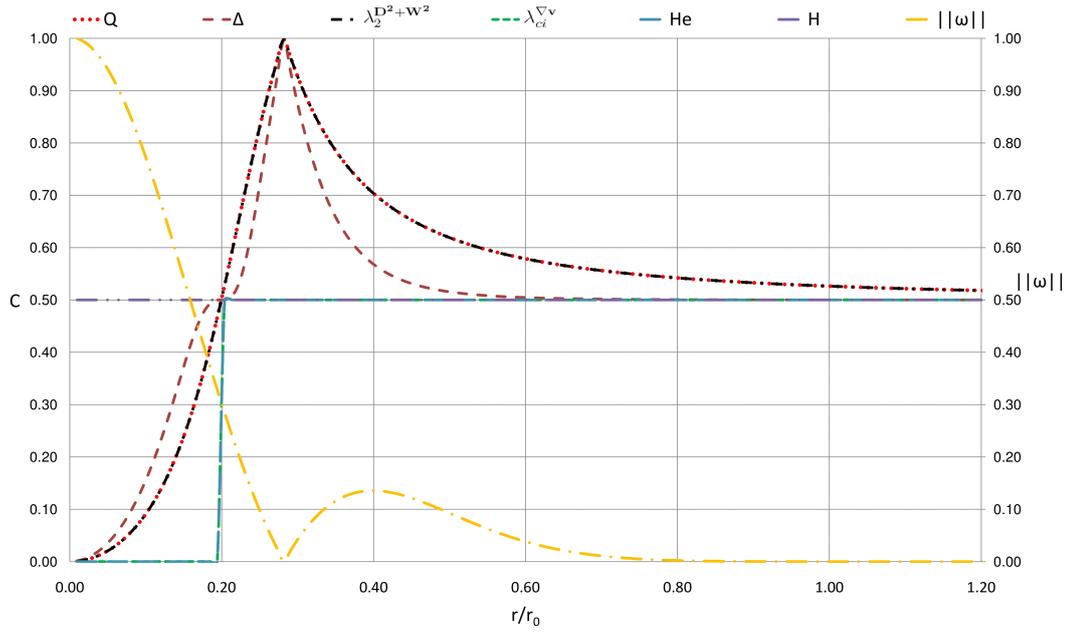


Fig. 4.33: Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Taylor para  $t=0,01$

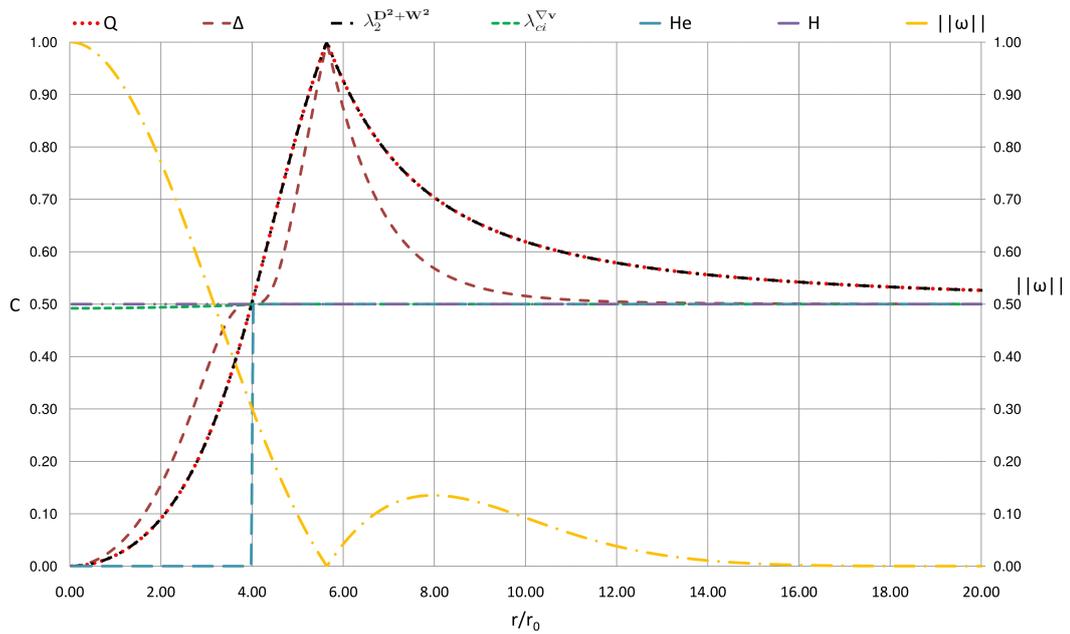


Fig. 4.34: Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Taylor para  $t=10$

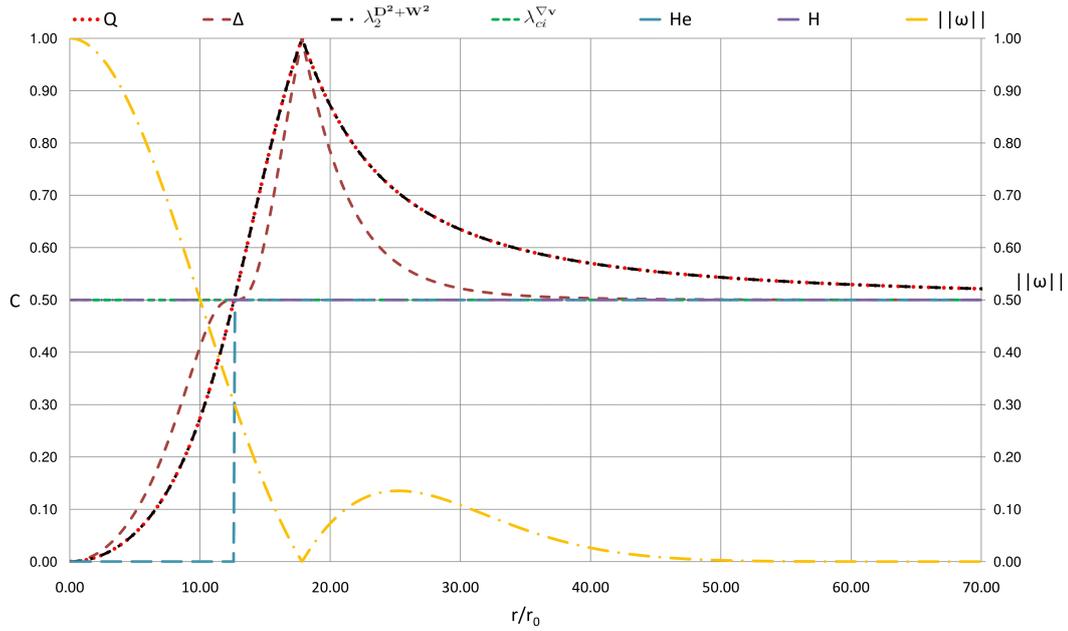


Fig. 4.35: Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Taylor para  $t=100$

Observa-se nos gráficos das Figs. 4.33-4.35 a existência de um ponto de descontinuidade na derivada das curvas referentes aos critérios que ocorre devido a mudança na orientação da vorticidade, como pode ser observado na curva associada. Com a exceção desse fato, todas as curvas dos critérios dispostas nessas figuras são equivalentes aquelas apresentadas na solução de Oseen-Lamb, onde novamente todos os critérios concordam na indicação de um diâmetro único para o vórtice formado pelo escoamento de Taylor.

Os operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirls}}$  encontram-se dispostos para os instantes de tempo  $t = 0.01$ , 10 e 100 nas Figs. 4.36-4.41. O critério  $AR_3^A$  é indeterminado, visto que todos os termos avaliados pelo critério são nulos.

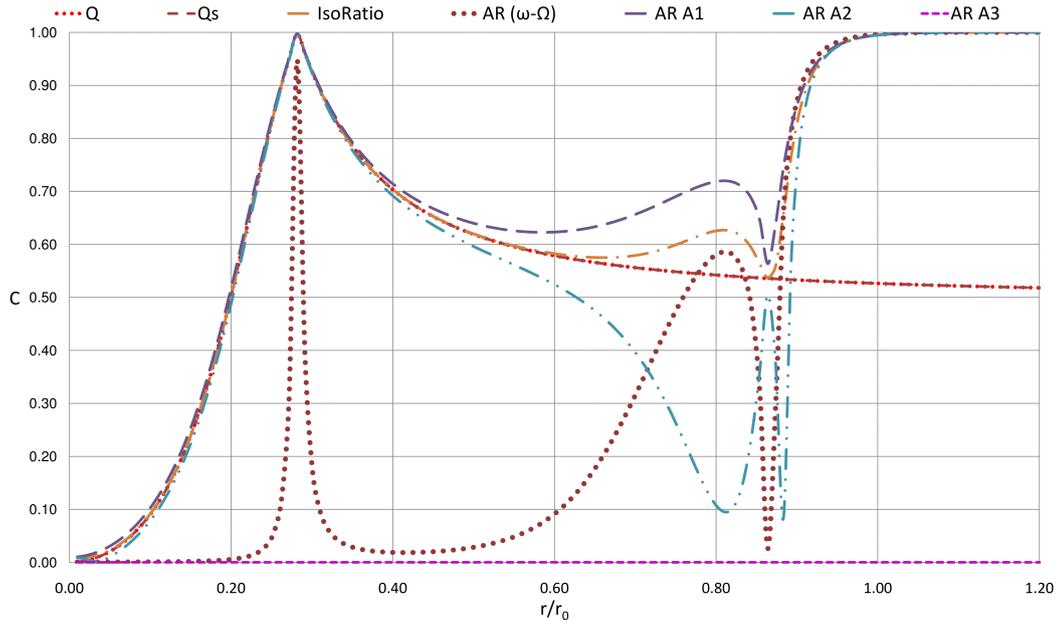


Fig. 4.36: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Taylor para  $t=0,01$

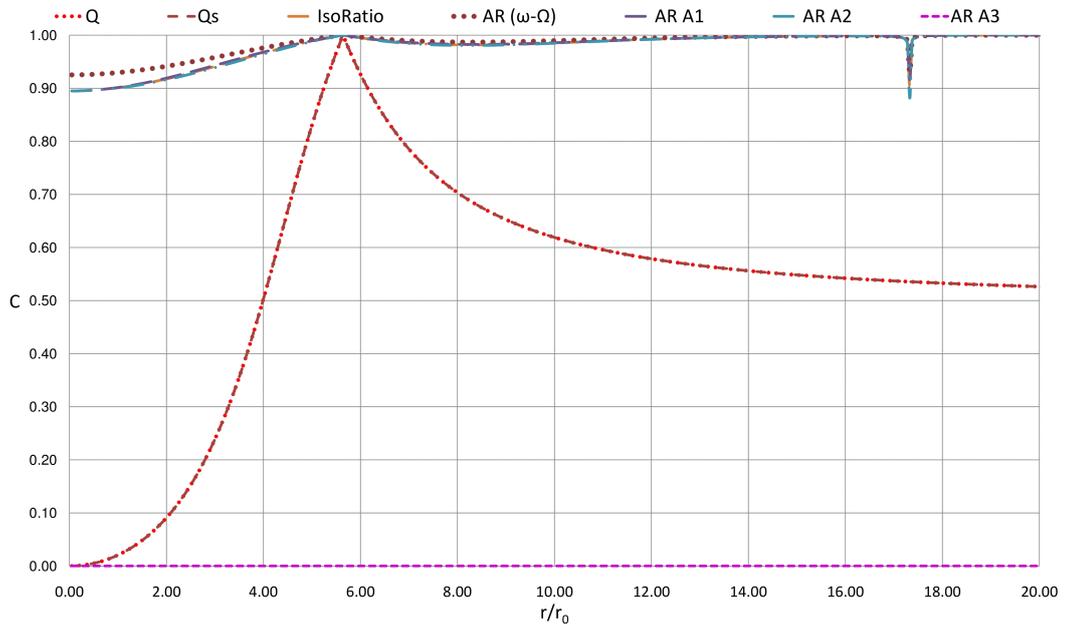


Fig. 4.37: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Taylor para  $t=10$

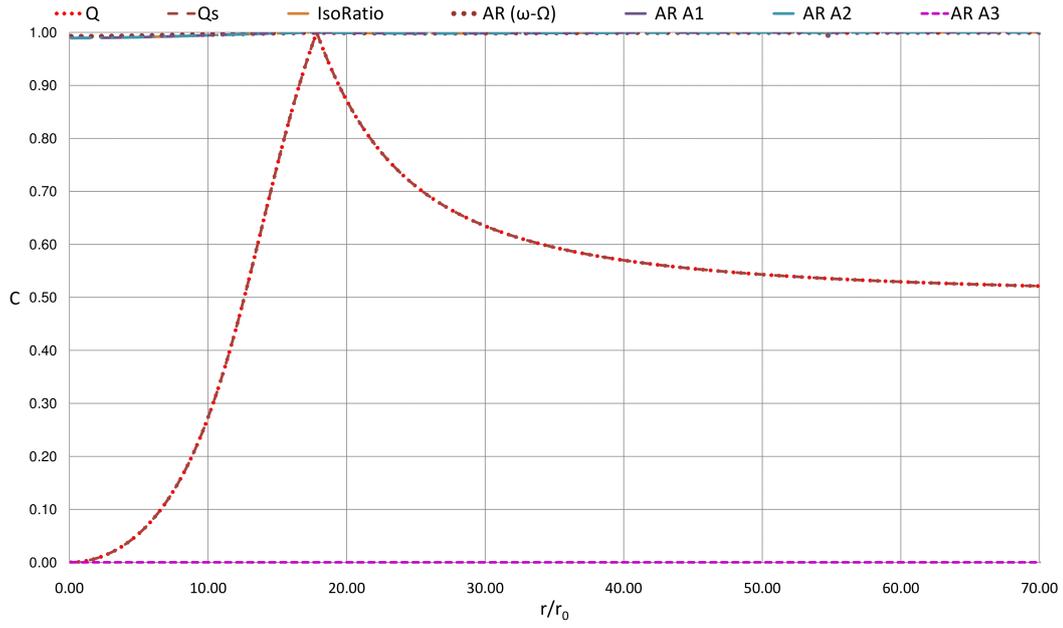


Fig. 4.38: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Taylor para  $t=100$

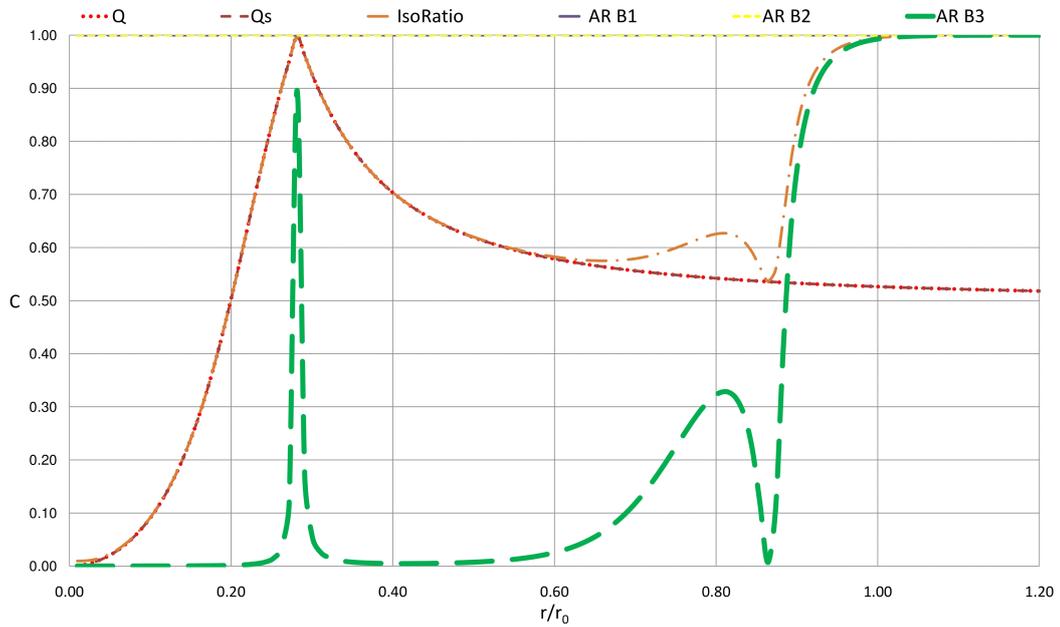


Fig. 4.39: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Taylor para  $t=0,01$

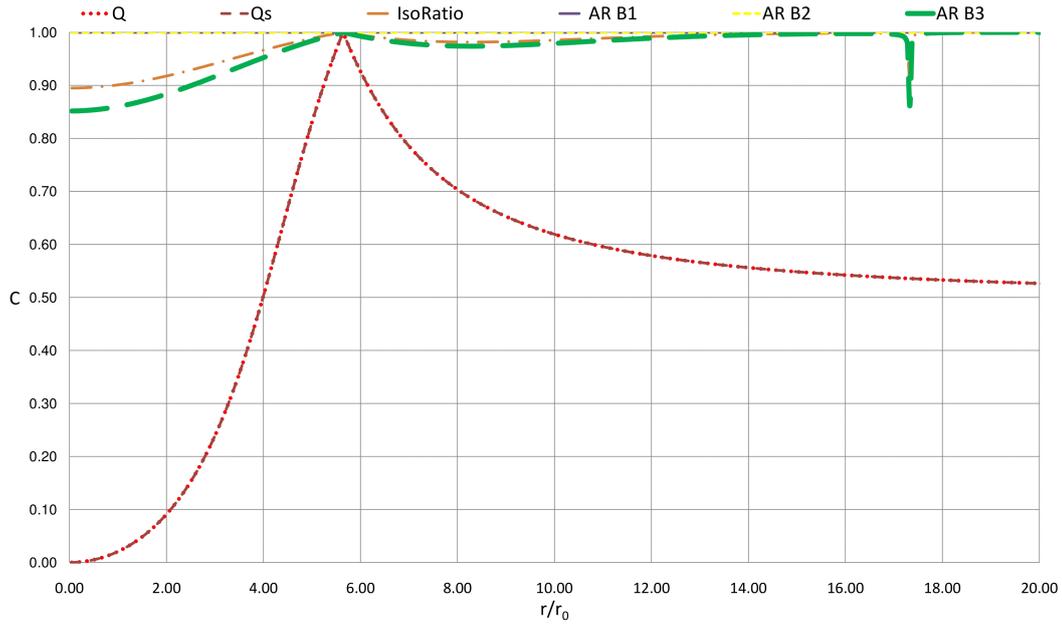


Fig. 4.40: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Taylor para  $t=10$

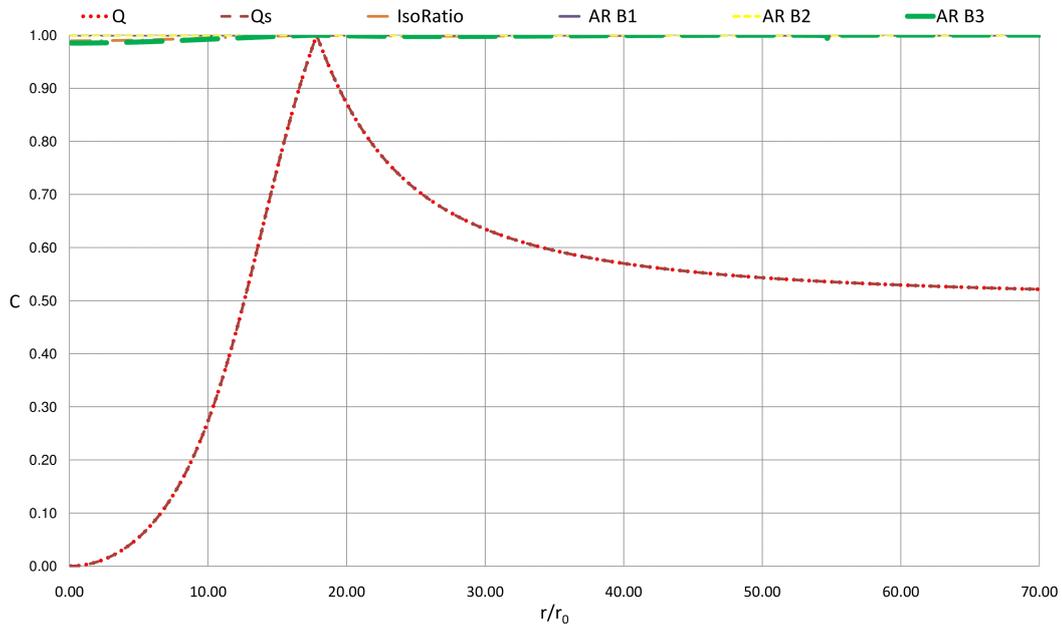


Fig. 4.41: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Taylor para  $t=100$

As curvas das Figs. 4.36-4.41 mostram a evolução transiente do escoamento, e denotam uma grande diferença dos critérios avaliados com o avanço no tempo. Essa mudança ocorre, por que, diferentemente do escoamento de Oseen Lamb,

mantendo-se a distância  $r$  constante, o campo de velocidade varia no tempo com  $1/t^2$ , o tensor taxa de deformação com  $1/t^3$  e a derivada local transiente do tensor taxa de deformação com  $1/t^4$  e, conseqüentemente a extinção desse vórtice com o avanço no tempo. A segunda descontinuidade observada nas figuras referentes a  $t = 10$  e  $t = 100$  pode ser constatada avaliando-se os sinais das derivadas temporais do tensor taxa de deformação que mudam uma vez ao longo de  $r$ . Por se tratar de um comportamento apresentado pela variação transiente na taxa de deformação, este não é avaliado pela maioria dos critérios existentes na literatura. Outra questão que cabe ressaltar é o fato de que, ao longo da direção radial, a derivada transiente do tensor taxa de deformação apresentou valores relativamente altos com relação aos valores fora da diagonal principal, o que ajuda a confirmar a importância do termo transiente e suas respectivas variáveis nos critérios.

Alguns dos critérios baseados na vorticidade relativa, assim como suas contraparte originais encontram-se dispostas nos gráficos das Figs. 4.42-4.44. Assim como na solução de vórtices de Oseen-Lamb, o vórtice de Taylor apresenta a vorticidade relativa com o mesmo comportamento da vorticidade, mas com módulos relativamente diferentes que, normalizados pelos seus valores máximos, apresentam comportamento semelhante. O critério  $H_{es}$  possui valores iguais a 1 até o ponto onde o gradiente de velocidades objetivo apresenta autovalores imaginários, que nesse caso é o mesmo ponto representado pelo gradiente de velocidades não-objetivo. O operador  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla \mathbf{v}}}$  apresenta o mesmo comportamento de sua contraparte não-objetiva,  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  e não encontra-se disposto nesses gráficos.

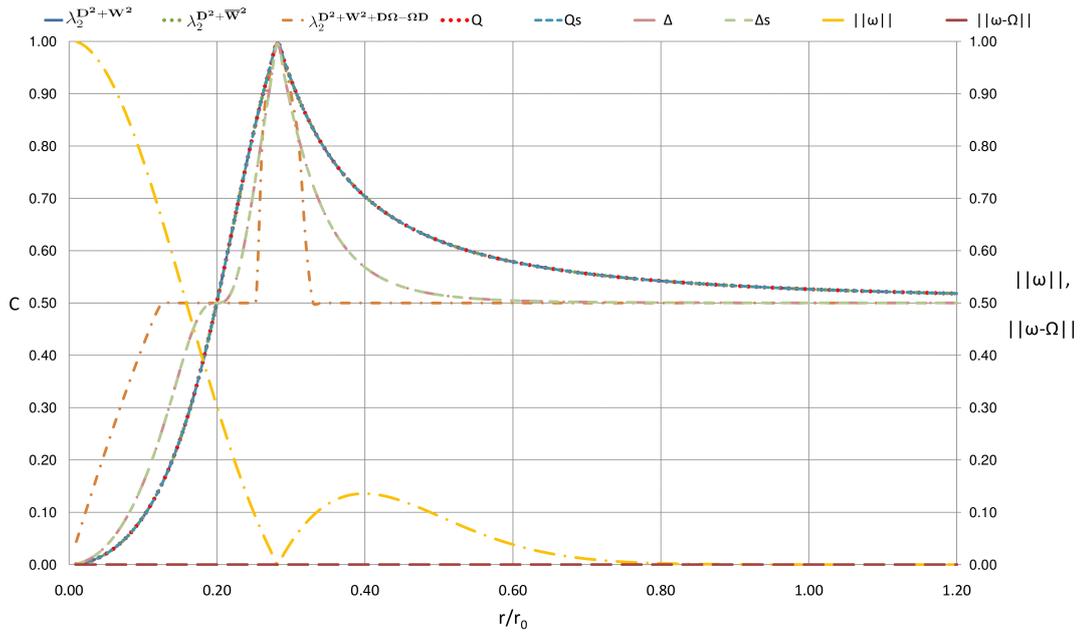


Fig. 4.42: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=0,01$

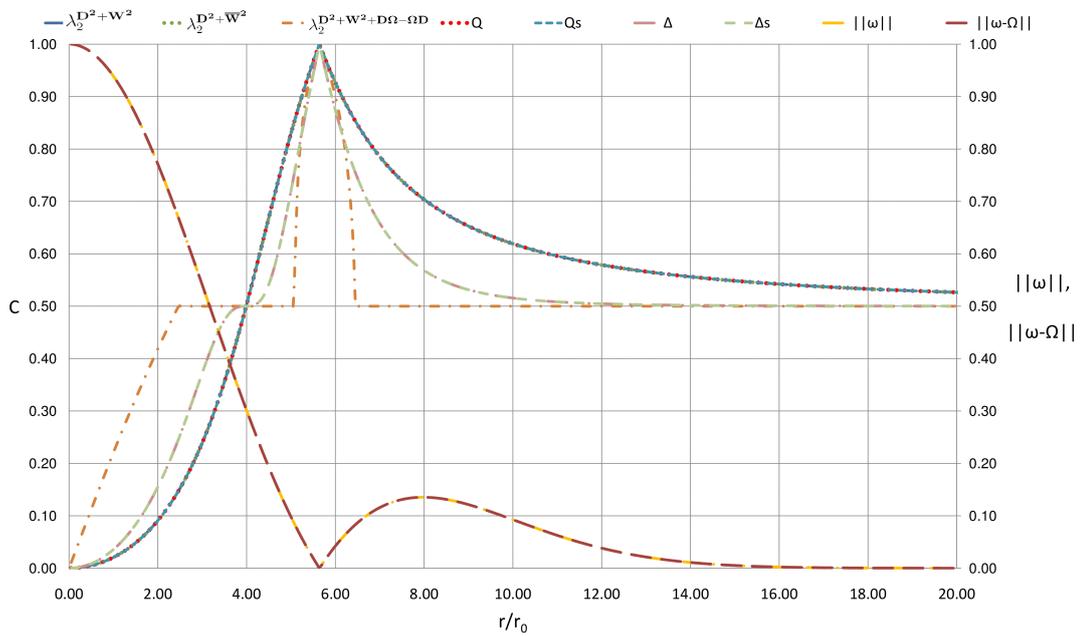


Fig. 4.43: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=10$

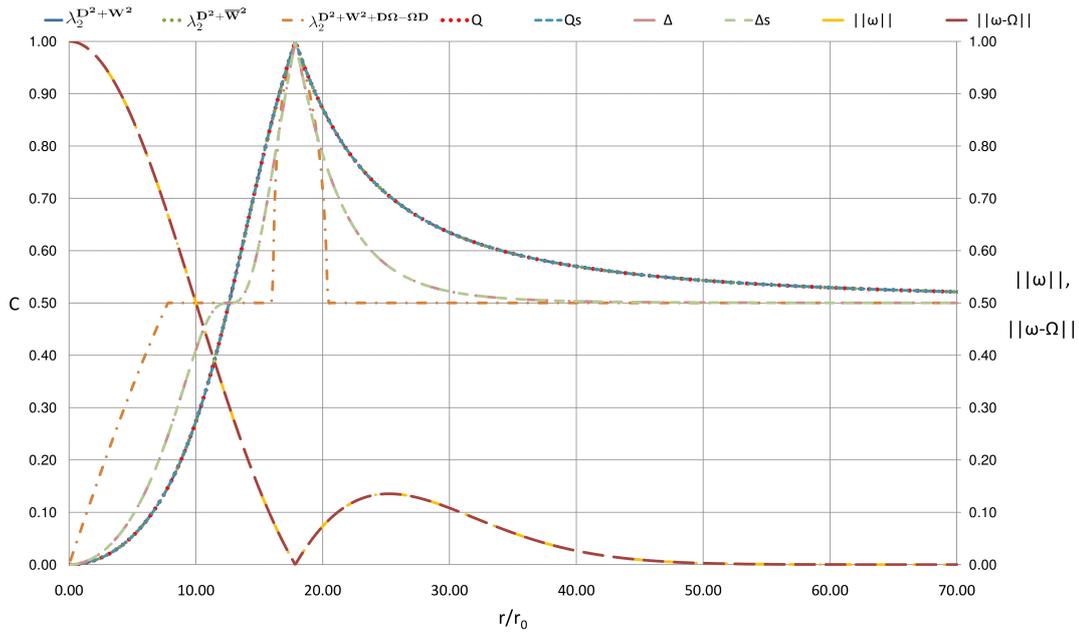


Fig. 4.44: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados ao longo da direção radial no modelo de vórtice de Oseen-Lamb para  $t=100$

#### 4.1.1.2 Vórtices Colunares Viscosos com Estiramento Axial

O estiramento axial ocorre quando a componente  $z$  da velocidade é também uma função dessa coordenada, ou seja,  $v_z = \hat{v}_z(r, z, t)$ , visto que serão tratadas somente soluções axissimétricas de vórtices nessa seção. A função mais simples de dependência axial da velocidade  $v_z$  é linear e uniforme

$$v_z(z, t) = \gamma(t)z, \quad v_r(r, t) = -\frac{1}{2}\gamma(t)r, \quad \gamma > 0 \quad (4.47)$$

Nesse caso representado no campo de velocidades (4.47), a vorticidade tem somente uma componente, em  $z$ . Aplicando esse campo de velocidades na Eq. (4.4), temos que

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \gamma r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} + \gamma \omega_z \quad (4.48)$$

Do lado direito da Eq. (4.48), o segundo termo representa a advecção radial, enquanto que o terceiro e último termo representa um estiramento uniforme. Se um filamento material tem comprimento unitário em  $t = 0$ , em um instante de

tempo  $t = t_f$  seu comprimento será

$$S(t) = \exp \left( \int_0^{t_f} \gamma(t') dt' \right) \quad (4.49)$$

Seguindo os trabalhos de Lundgren [72] e Kambe [73], estes autores propuseram as seguintes variáveis de similaridade

$$\psi \equiv S^{1/2}(t)r, \quad \tau \equiv \int_0^{t_f} S(t') dt'. \quad (4.50)$$

Aplicando as duas variáveis de similaridade na Eq. (4.48), temos que

$$S \frac{\partial \omega_z}{\partial \tau} = \gamma \omega_z + \nu \frac{S}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \psi \frac{\partial \omega_z}{\partial \psi} \right) \quad (4.51)$$

entretanto, visto que

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\partial S}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} \quad (4.52)$$

é possível obter finalmente uma versão da Eq. (4.19), mas em termos das variáveis de similaridade  $(\psi, \tau)$

$$\frac{\partial \omega_z^*}{\partial \tau} = \frac{\nu}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \psi \frac{\partial \omega_z^*}{\partial \psi} \right), \quad \omega_z^* \equiv S^{-1} \omega_z \quad (4.53)$$

Assim, aplicando a *transformada de Lundgren* qualquer solução de vórtice puro pode ser utilizada para gerar uma nova versão com estiramento axial a partir da relação

$$\omega_z(r, t) = S(t) \omega_z^* \left( S^{1/2}(t)r, \int_0^{t_f} S(t') dt' \right) = S(t) \omega_z^*(\psi, \tau) \quad (4.54)$$

O escoamento transformado pelo operador (4.80) possui o mesmo comportamento do escoamento original. Um exemplo de escoamento transformado é a solução de vórtice de Oseen-Lamb. Quando esta é submetida a uma deformação axial uniforme  $\gamma$  obtém-se a relação

$$\omega_z(r, t) = \frac{\gamma\Gamma_0}{4\pi(1 - e^{-\gamma t})} \exp\left(-\frac{\gamma r^2 2\nu}{1 - e^{-\gamma t}}\right), \quad (4.55)$$

Integrando a equação anterior ao longo da direção radial, é possível encontrar o campo de velocidades na direção azimutal

$$v_\theta(r, t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\gamma r^2 2\nu}{1 - e^{-\gamma t}}\right) \right] \quad (4.56)$$

Avaliando a solução do problema para  $t \rightarrow \infty$ , encontra-se uma solução assintótica de vórtice com raio  $\delta \sim (\nu/\gamma)^{1/2}$  que existe somente se  $\gamma > 0$ . Trata-se do consagrado vórtice de Burgers[36]. Este escoamento é equivalente a solução de Oseen-Lamb, para  $t = 1/\gamma$  e é dado pelo campo de velocidades

$$v_r(r) = -\frac{\gamma}{2}r, \quad v_\theta(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left( 1 - e^{-\frac{\gamma r^2}{2\nu}} \right), \quad v_z(z) = \gamma z \quad (4.57)$$

O modelo de vórtice de Burgers foi um dos primeiros a ser utilizado na modelagem de estruturas coerentes em escoamentos turbulentos. Uma propriedade importante desse tipo de escoamento é que a dissipação total por unidade de comprimento na direção  $z$  é finita, mas independente da viscosidade  $\nu$

$$\rho\nu \int_0^\infty 2\pi r \omega_z^2(r) dr = \frac{\rho\gamma\Gamma_0^2}{4\pi} \quad (4.58)$$

Assim, a dissipação permanece com valores finitos, mesmo que  $\nu \rightarrow 0$ , prerrogativa fundamental da turbulência [74]. Essa solução de vórtice é largamente utilizado na análise de novos critérios de identificação de estruturas vorticais. Destacam-se os trabalhos de Chakraborty et al. [6] e Wu et al. [7], que utilizaram esse escoamento como base para fundamentar seus respectivos critérios.

O número de Reynolds para o escoamento de Burgers pode ser definido a partir da relação

$$Re_{\Gamma_0} = \frac{\Gamma_0}{2\pi\nu} \quad (4.59)$$

A função que define a presença de autovalores imaginários para o gradiente de velocidades pode ser dada pela relação

$$\eta\tilde{r} = \frac{1}{\tilde{r}^4} \left( (1 + \tilde{r}^2) e^{\frac{-\tilde{r}^2}{2}} - 1 \right) \left( 1 - e^{\frac{-\tilde{r}^2}{2}} \right) \quad (4.60)$$

onde

$$\tilde{r} = r \sqrt{\frac{\gamma}{\nu}} \quad (4.61)$$

Assim quando o valor de  $\tilde{r}$  é, aproximadamente, maior que 1,585 o gradiente de velocidades não apresenta valores imaginários, sem qualquer dependência com o valor do número de Reynolds. As Figs. 4.45-4.47 apresenta os critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $H_e$ , além dos operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  plotados para o vórtice de Burgers para números de Reynolds iguais a 1, 10 e 100.

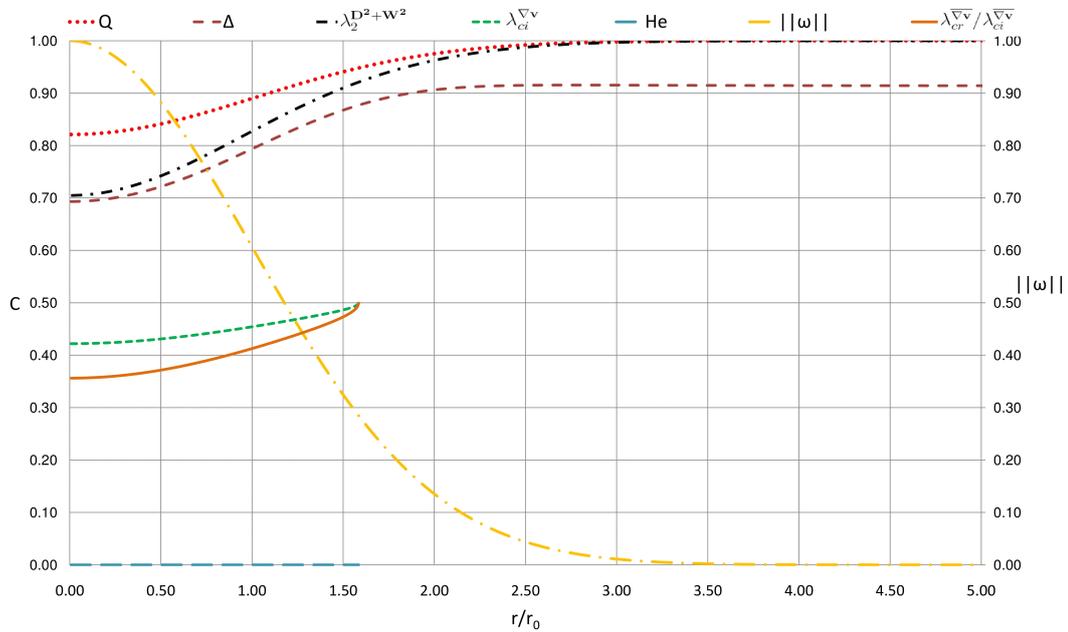


Fig. 4.45: Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 1$

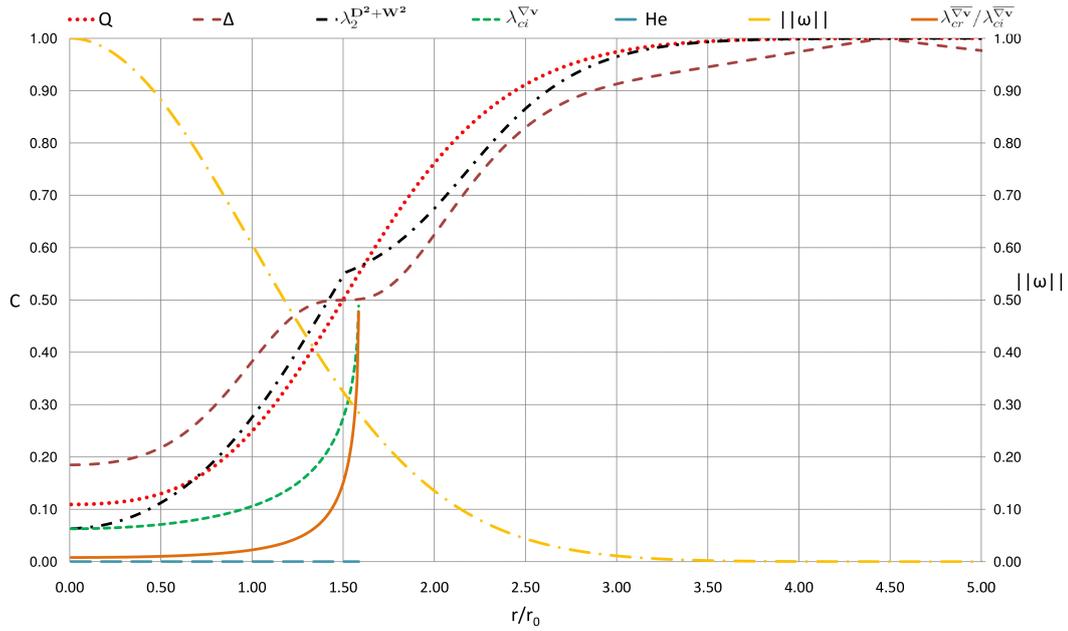


Fig. 4.46: Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v} / \lambda_{ci}^{\nabla v}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 10$

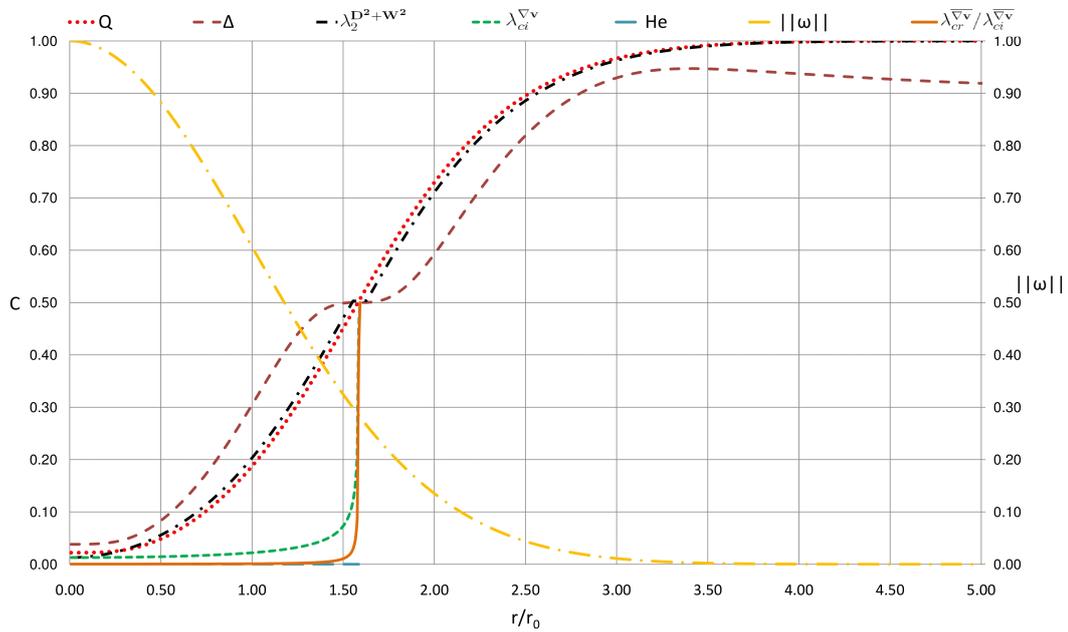


Fig. 4.47: Critérios  $Q$ ,  $\Delta$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $H_e$ , além do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v} / \lambda_{ci}^{\nabla v}$  avaliados contra a vorticidade no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 100$

É possível observar que para valores de Reynolds baixo não é observado movimento vortical para os principais critérios dispostos nas Figs. 4.45-4.47, com

excessão dos operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ . Diferente das soluções de vórtices apresentados anteriormente, os critérios baseados na vorticidade não identificam um diâmetro único para o vórtice de Burgers, e divergem quanto ao tamanho da estrutura colunar resultante do escoamento. Isso acontece por causa da presença no escoamento de estiramento axial, o que modifica o valor encontrado pelos diversos critérios de acordo com seu balanceamento entre o tensor taxa de deformação e a vorticidade.

Os operadores  $AR_{1,2,3}^A$ ,  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirls}}$  encontram-se plotados para o vórtice de Burgers para números de Reynolds iguais a 1, 10 e 100 nas Figs. 4.48-4.53. Os operadores são comparados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$ .

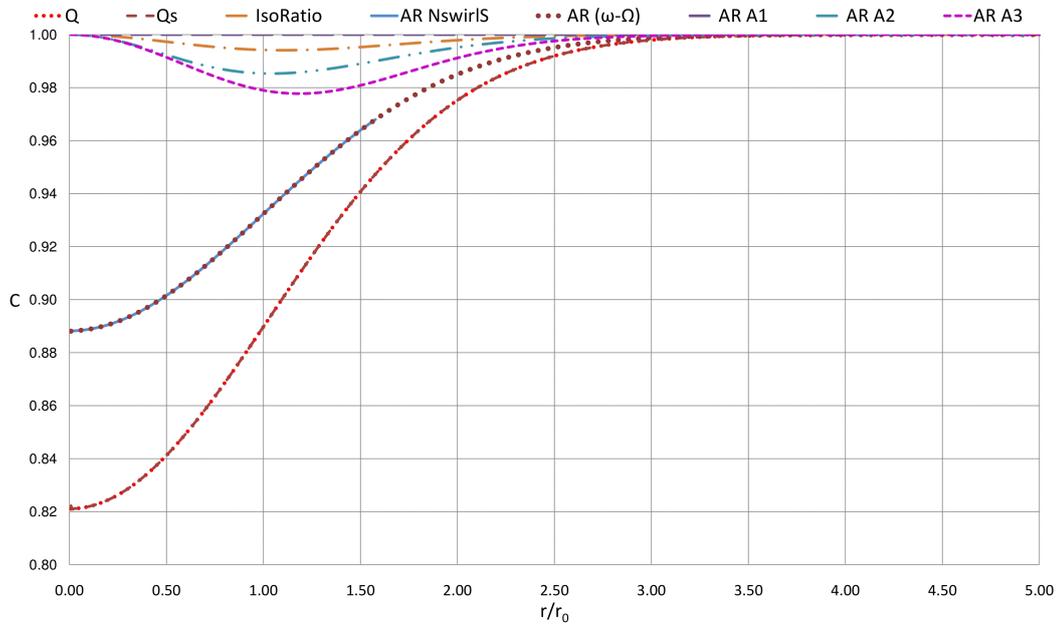


Fig. 4.48: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirls}}$  avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 1$

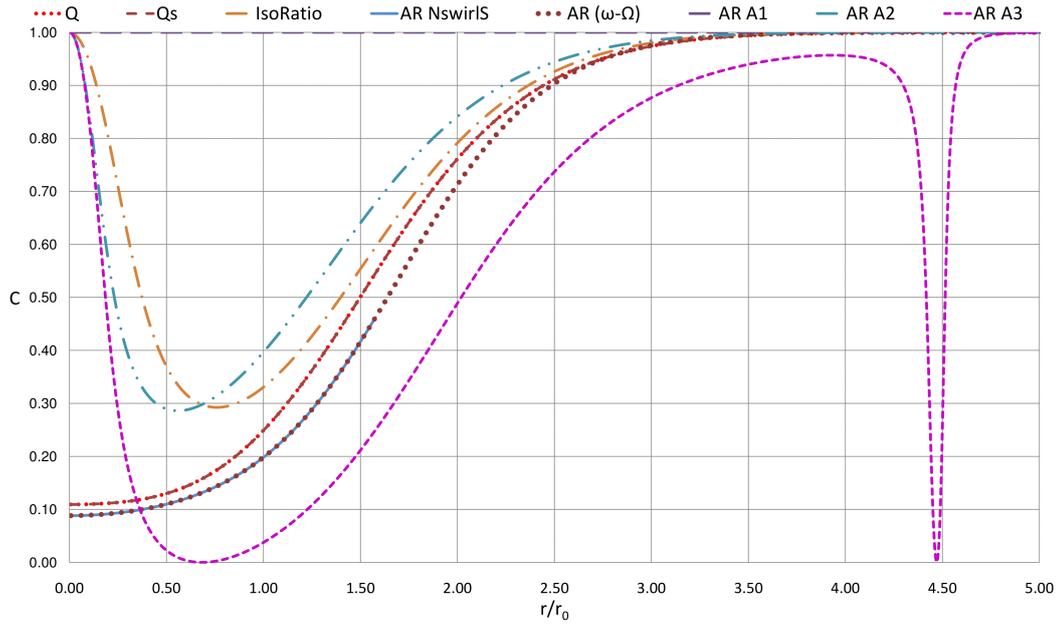


Fig. 4.49: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 10$

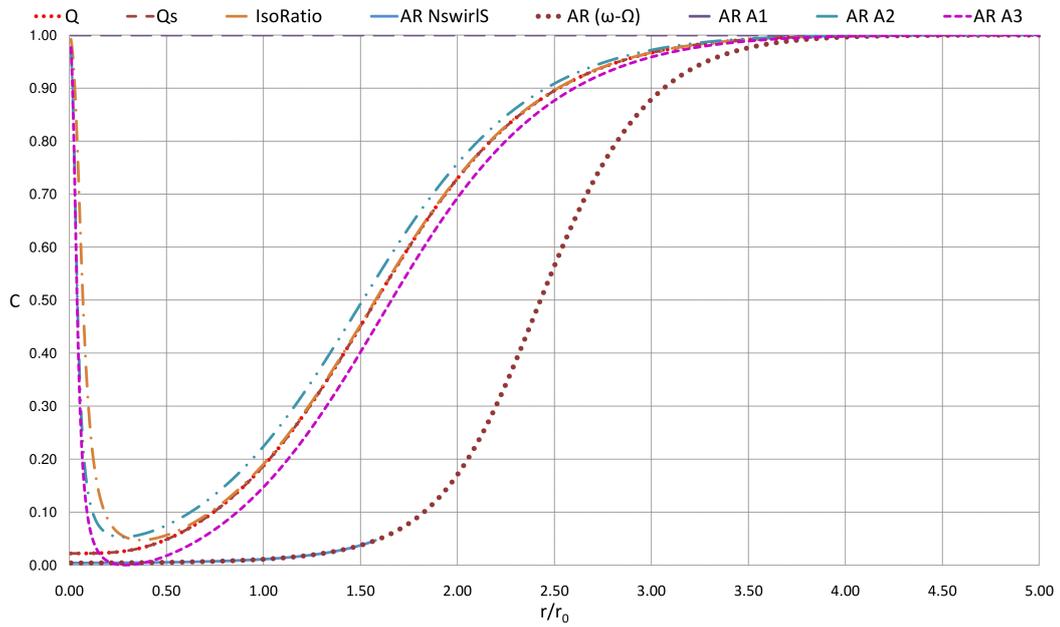


Fig. 4.50: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^A$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 100$

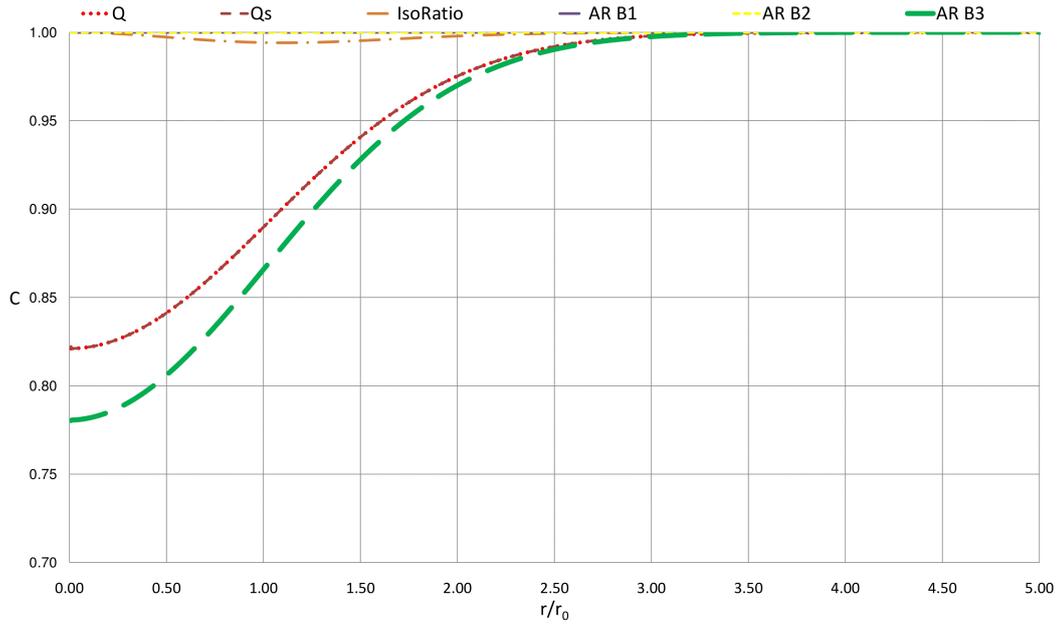


Fig. 4.51: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 1$

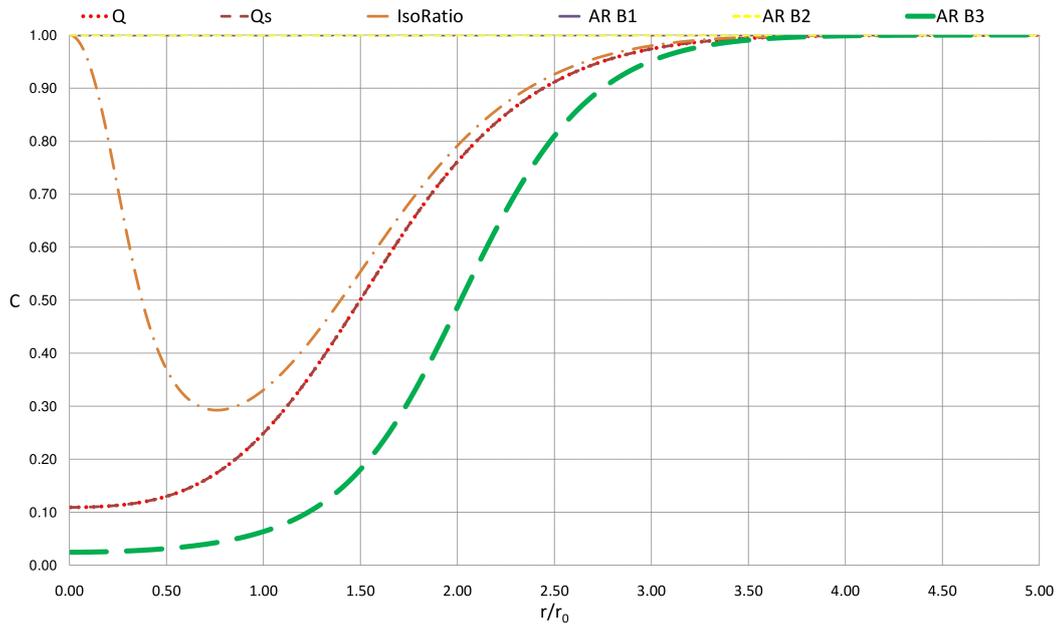


Fig. 4.52: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 10$

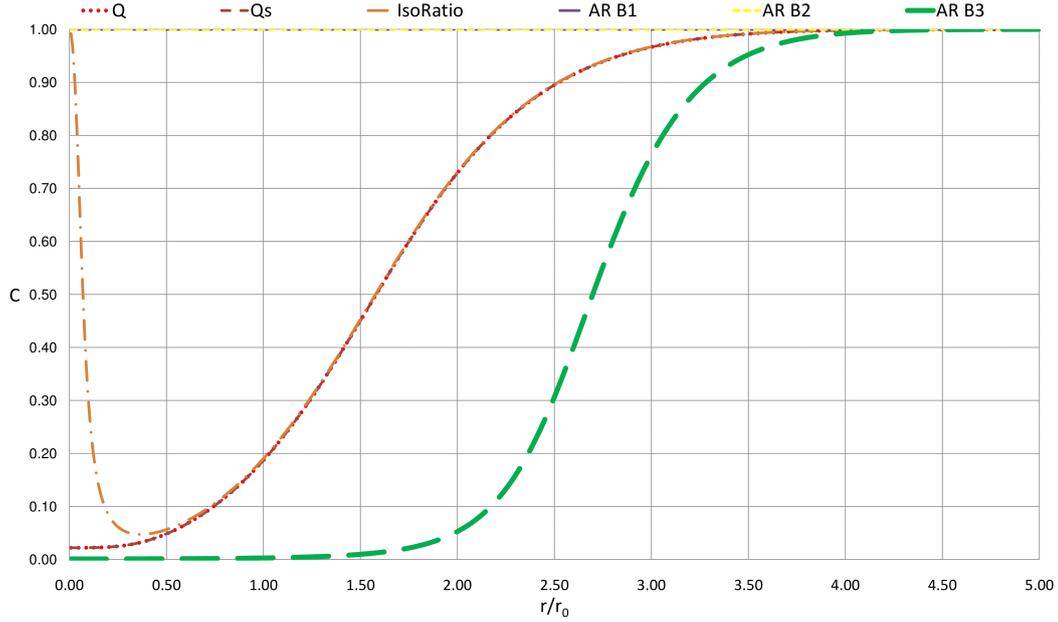


Fig. 4.53: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ , além dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{n_{swirlS}}$  avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 100$

Observa-se nos gráficos das Figs. 4.48-4.53 que os critérios baseados no  $A_2$  também apresentam restrições quanto a captura de estruturas vorticais para número de Reynolds baixos. Esse fato acontece nesses critérios devido a relevância dos efeitos de deformação extensional, representado pela constante  $\gamma$  no campo de velocidades (4.81). Os termos de deformação extensional no tensor  $A_2$  encontram-se em fase com o tensor  $A_1$  e, a medida que o número de Reynolds tem seu valor elevado, os efeitos de deformação de cisalhamento e rotação pura ganham relevância e ultrapassam os termos de deformação extensional.

Os critérios baseados na vorticidade relativa encontram-se dispostas nos gráficos das Figs. 4.54-4.56. Novamente nessa solução de vórtices a vorticidade relativa apresenta comportamento semelhante a vorticidade e os critérios apresentam comportamento semelhante. Pelo fato de  $\overline{\mathbf{W}} \mathbf{W}$  apresentarem sinais opostos, o critério  $H_{es}$ , diferente de  $H_e$  é constante e igual a unidade até  $r/r_0 \approx 1,585$ . Os operador  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  apresenta o mesmo comportamento de suas respectivas contrapartes não-objetiva,  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$ .

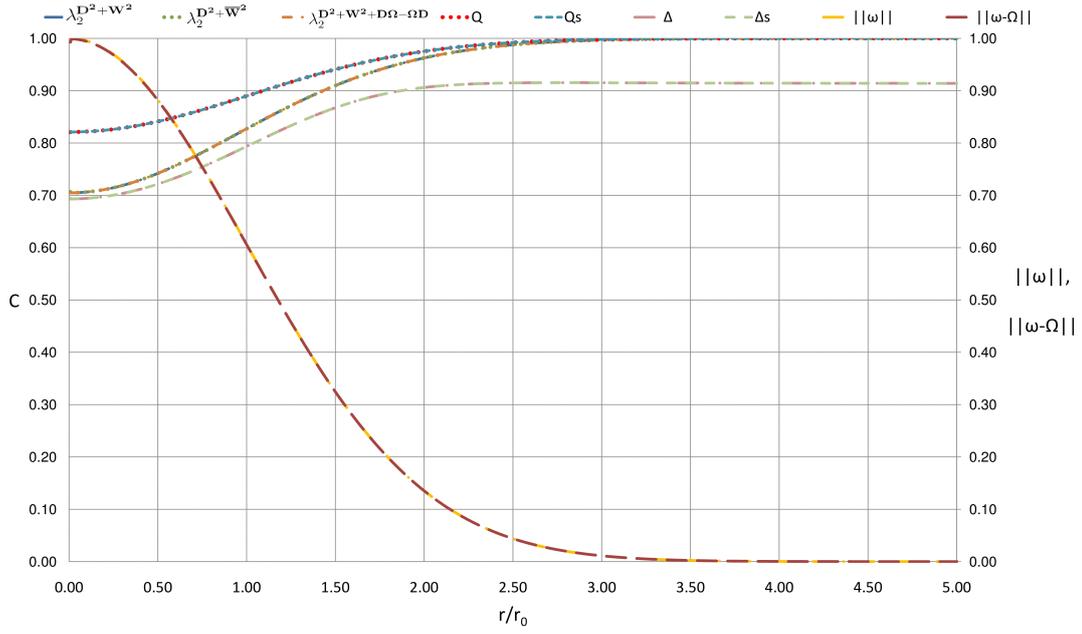


Fig. 4.54: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 1$

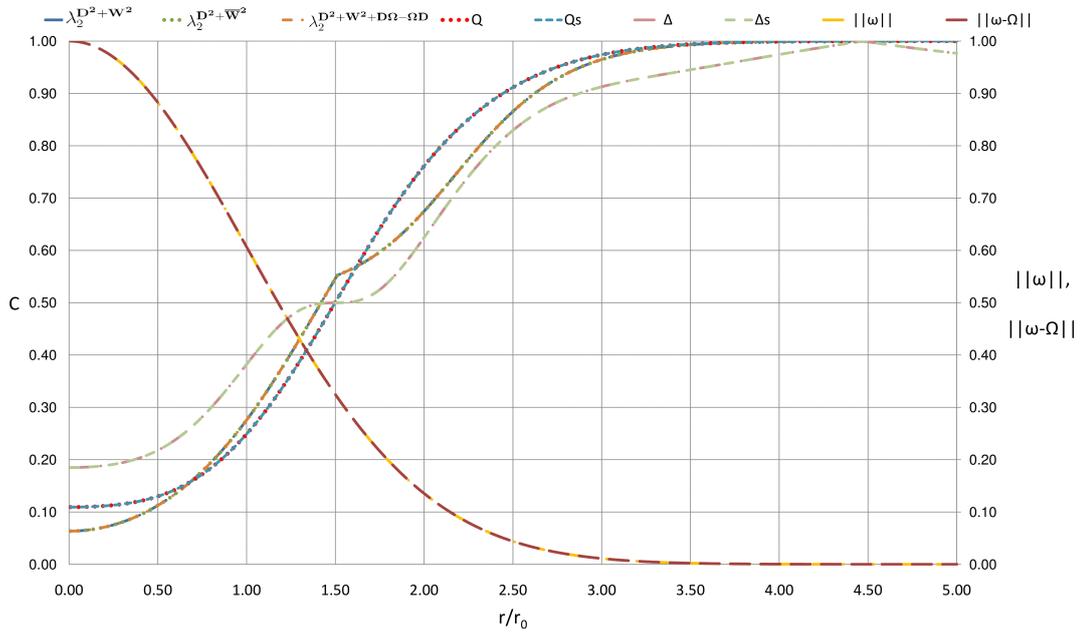


Fig. 4.55: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 10$

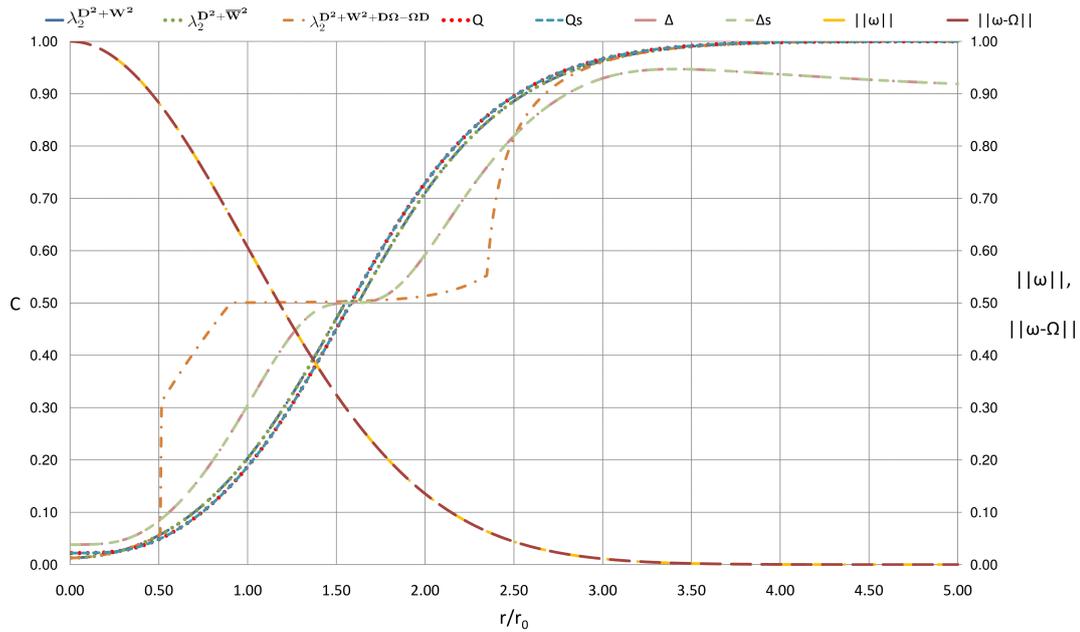


Fig. 4.56: Critérios baseados na vorticidade relativa avaliados no modelo de vórtice de Burgers para  $Re_{\Gamma_0} = 100$

## 4.2 Escoamentos com Linhas de Corrente Caóticas

Escoamentos que produzam linhas de corrente caóticas são de grande interesse no estudo de critérios de identificação de vórtices, pois são encontrados nesses regiões que muitas vezes desafiam a identificação de estruturas vorticais, principalmente em critérios que se baseiam em entidades físicas primárias para a identificação, como o campo de pressão ou mesmo a vorticidade. Além disso, a anisotropia da orientação de estruturas vorticais muitas vezes encontradas nesses escoamentos favorece, em um primeiro momento, a verificação do critério quanto a busca por esse tipo de alinhamento antes de iniciar um estudo mais aprofundado em resultados numéricos.

Apesar de serem largamente utilizados no estudo de trajetórias lagrangianas, muitas vezes sua concepção advêm de equações de transporte e propriedades em sua forma euleriana, portanto, torna-se possível o estudo mais aprofundado de critérios de identificação de estruturas vorticais eulerianos e a observação da presença de padrões caóticos nesse tipo de escoamento.

Serão estudados nessa seção dois escoamentos famosos por apresentarem esse comportamento caótico nas trajetórias percorridas no domínio, sendo avaliados os critérios propostos no capítulo 3, assim como alguns critérios existentes e suas contrapartes objetivas.

#### 4.2.1 Escoamento de uma Gota Imersa em Fluido de Stokes

O estudo apresentado por Stone et al.[75] propõem um modelo analítico para representar o comportamento das linhas de corrente dentro de uma gota esférica, imersa em um escoamento sob regime de Stokes. Esse estudo foi motivado pelo estudo anterior apresentado por Bajer e Moffatt [76] que demonstrou que um escoamento confinado com divergente da velocidade nulo ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ) em regime permanente não apresenta necessariamente linhas de correntes fechadas, o que dificulta o surgimento de linhas de corrente caóticas.

Os autores ressaltam o fato de que, apesar do escoamento ocorrer em regime de Stokes, onde as equações são lineares no que diz respeito ao campo de velocidades, essa linearidade do escoamento ocorre na relação entre a velocidade da gota esférica e efeitos provenientes do escoamento externo que tem influência direta somente na taxa de deformação e na vorticidade. A descrição de trajetórias lagrangianas relacionada diretamente a cinemática do escoamento é dada por funções não lineares e tridimensionais, o que torna um desafio a identificação de estruturas vorticiais realizada por meio de critérios que se baseiam nos tensores taxa de deformação e vorticidade.

O escoamento considera o escoamento de uma gota esférica, constituída por um material de densidade  $\rho$  e viscosidade  $\mu$ , imersa em um fluido Newtoniano com densidade  $\rho$  e viscosidade  $\mu$ . O sistema de coordenadas do problema se move com o centróide da gota e, longe da região de influência da gota, assume-se que o fluido se encontra submetido a um movimento linear na forma

$$\mathbf{u}_\infty(\mathbf{x}) = \mathbf{U} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} \quad (4.62)$$

As equações de Stokes incompressíveis em regime permanente são resolvidas externa e internamente à região delimitada pela gota, levando em consideração as condições de contorno de continuidade tanto da velocidade na interface quanto da tensão na direção tangencial. No presente trabalho, será considerado que a diferença de propriedades do material é pequena o suficiente para desconsiderar as forças de corpo atuante na gota, nesse caso representada pelas forças de empuxo. Além disso, visto que a gota se encontra em equilíbrio com o meio externo, desconsideram-se, forças advindas da diferença de aceleração entre fases, como os efeitos de massa adicionada. É importante ressaltar que, se a gota acelerasse com relação ao referencial inercial e, conseqüentemente, seu sistema de coordenadas de referência, a utilização de critérios invariantes galileanos já não se justificaria, visto que a aceleração do referencial é uma transformação euclidiana.

No caso do escoamento de uma gota em um fluido de Stokes sem forças de empuxo atuando, temos que o campo de velocidades interno a gota pode ser escrito a partir da relação

$$\mathbf{u}(x) = \frac{1}{2(1 + N_\mu)} [(5r^2 - 3)\mathbf{D} \cdot \mathbf{x} - 2\mathbf{x}\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}] + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad (4.63)$$

Na Eq. (4.63) todas as velocidades foram adimensionalizadas por  $Sa$ , onde  $S$  é a taxa de cisalhamento característica do escoamento,  $a$  é o raio da gota e  $r^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$  é  $a$ . Além disso, o termo  $N_\mu = \mu/\mu$  representa a razão de viscosidades entre a gota e o meio. Os termos da equação definem efeitos distintos de estiramento e contração de elementos materiais se movendo ao longo da região onde as solicitações de deformação são mais relevantes (no centro da bolha, por exemplo), além de regiões de movimento de rotação de corpo rígido.

O termo de razão de viscosidade pode ser retirado da Eq. (4.63) reescalando-a. Se a solução de (4.63) correspondente a condição inicial  $\mathbf{X}$  como  $\mathbf{x}(t, \mathbf{X}; \boldsymbol{\omega}, \mathbf{D}, 1 + N_\mu)$ , pode-se chegar conclusão que

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{X}; \boldsymbol{\omega}, \mathbf{D}, 1+N_\mu) = \mathbf{x} \left( t, \mathbf{X}; \boldsymbol{\omega}, \frac{\mathbf{D}}{1+N_\mu}, 1 \right) = \mathbf{x} \left( \frac{t}{1+N_\mu}, \mathbf{X}; (1+N_\mu)\boldsymbol{\omega}, \mathbf{D}, 1+N_\mu \right) \quad (4.64)$$

Assim, para qualquer valor de razão de viscosidades, dada uma condição inicial, sua solução pode ser obtida para o caso  $N_\mu = 0$  simplesmente reescalando o tempo e a vorticidade juntas ou o tensor taxa de deformação. Ou seja, o aumento da viscosidade do material da gota, resulta no aumento do tempo de integração necessário para a avaliação das trajetórias.

O sistema de coordenadas do problema é escolhido de forma a se alinhar com a base canônica do tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$ , resultando na seguinte descrição

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -(D_{11} + D_{22}) \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Avaliando o tensor taxa de deformação como função da relação de velocidades  $\alpha = \frac{D_{22}}{D_{11}}$ , temos que o mesmo pode ser reescrito na forma

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1/(1+\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha/(1+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Finalmente, a Eq. (4.63) pode ser descrita com base nas suas componentes, em coordenadas cartesianas, de acordo com as funções

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \left[ (5r^2 - 3) \frac{x}{1+\alpha} - 2x \left( \frac{x^2}{1+\alpha} + \frac{ay^2}{1+\alpha} - z^2 \right) \right] + \frac{1}{2} (\omega_y z - \omega_z y) \quad (4.67)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \left[ (5r^2 - 3) \frac{\alpha y}{1+\alpha} - 2y \left( \frac{x^2}{1+\alpha} + \frac{ay^2}{1+\alpha} - z^2 \right) \right] + \frac{1}{2} (\omega_z x - \omega_x z) \quad (4.68)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \left[ -(5r^2 - 3)z - 2z \left( \frac{x^2}{1 + \alpha} + \frac{ay^2}{1 + \alpha} - z^2 \right) \right] + \frac{1}{2}(\omega_x y - \omega_y x) \quad (4.69)$$

O domínio de estudo desse campo de velocidade pode ser reduzido se forem observadas as seguintes invariâncias:

→ Restrição da análise ao intervalo  $0 \leq \alpha \leq 1$  devido à invariância com respeito às transformações:

$$x \rightarrow y, \quad y \rightarrow x, \quad (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \rightarrow (-\omega_x, -\omega_y, -\omega_z) \quad (4.70)$$

→ Restrição da análise em  $\omega_z \geq 0$  devido à invariância com respeito às transformações:

$$x \rightarrow -x, \quad \omega_y \rightarrow -\omega_y, \quad \omega_z \rightarrow -\omega_z \quad (4.71)$$

→ Restrição da análise em  $\omega_y \geq 0$  devido à invariância com respeito às transformações:

$$x \rightarrow -z, \quad \omega_x \rightarrow -\omega_x, \quad \omega_y \rightarrow -\omega_y \quad (4.72)$$

Conforme avaliado por Stone et al.[75], para os casos com  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , o campo de velocidades é integrável, o escoamento é axissimétrico e existe uma função de corrente  $\phi$ , que, em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \psi)$  pode ser escrita de acordo com a função

$$\psi(r, \theta) = \frac{3}{4}r^3(r^2 - 1) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (4.73)$$

A representação dessas linhas de correntes pode ser observada na Fig. 4.57. No caso da vorticidade estar alinhada com o eixo  $z$ , a função de corrente também

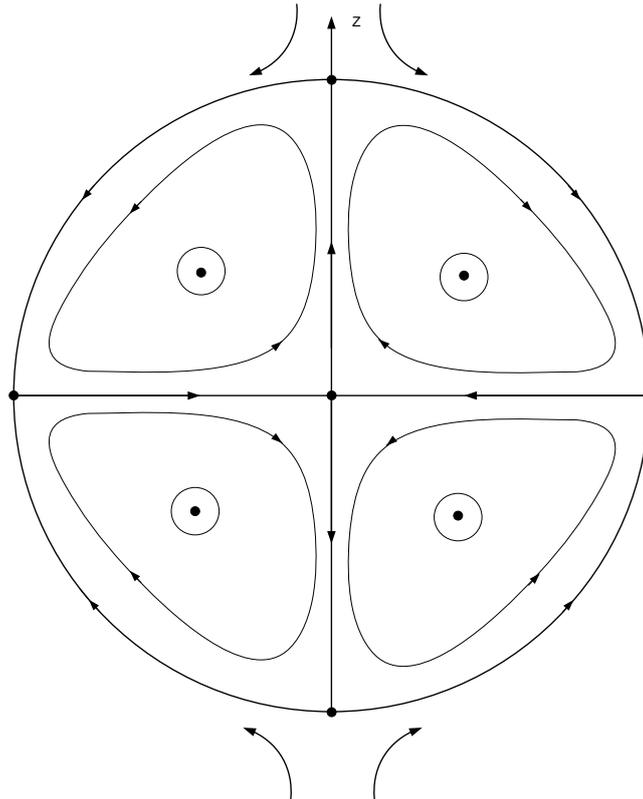


Fig. 4.57: Geometria das linhas de corrente do escoamento de Stokes ao redor de uma gota esférica para  $\omega = 0$ . Os pontos pretos representam pontos de sela ou pontos fixos.

pode ser avaliada de acordo com a função (4.73), mas as trajetórias lagrangianas mudam, pois a posição  $\phi(t)$  varia, nesse caso, diretamente com o tempo  $t$ , fazendo com que essas trajetórias possam percorrer uma superfície de corrente, dependendo do módulo da vorticidade. Nos casos em que  $\omega \neq 0$  e que não se encontram alinhados com a direção  $z$ , linhas de correntes caóticas são observadas e o escoamento torna-se muito mais complexo.

Inicialmente serão dispostos os resultados para  $\omega = 0$ , com alguns critérios avaliados nos capítulos anteriores, juntamente com os novos critérios e operadores discutidos no capítulo 3. Os critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos, encontram-se dispostos na Fig. 4.58. Os contornos dessas variáveis são avaliados no plano  $x = 0$  e avaliados em um domínio com  $1 \leq x \leq 1$ ,  $1 \leq y \leq 1$  e  $1 \leq z \leq 1$ , além das constantes do escoamento configuradas com o raio da esfera,  $\alpha$ , igual a

unidade.

Nota-se nos contornos da Fig. 4.59 que, devido a diferença em suas formulações matemáticas os critérios  $\Delta$  é menos restritivo que o critério  $Q$ , assim como suas contrapartes objetivas. Além disso, nota-se a formação de duas estruturas peculiares presentes simetricamente em forma de “8” nos critérios baseados na vorticidade relativa, assim como seu próprio módulo. Os quatro critérios também corroboram com a idéia de uma região de estiramento acentuado ao longo de toda a região de simetria das linhas de corrente do escoamento, enquanto que as regiões vorticais surgem distantes do centro da esfera.

Os gráficos da Fig. 4.59 apresenta os contornos dos critérios  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\overline{\mathbf{W}}^2}$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2+\mathbf{D}\Omega-\Omega\mathbf{D}}$ , além dos critérios  $G$  e  $G_s$  e do operador  $AR^{\mathbf{P}}$ , baseado no plano normal ao terceiro autovetor da Hessiana da pressão.

É possível observar nos contornos da Fig. 4.59 a semelhança entre os critérios baseados na vorticidade relativa, novamente com a formação de uma estrutura em “8” em  $y \approx \pm 0,5$ . A Fig. 4.60 dispõe os contornos de  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ , assim como suas versões objetivas,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos.

Os operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ , assim como suas versões objetivas demonstram que as regiões que não apresentam autovalores imaginários para o gradiente de velocidades, representadas em vermelho englobam as regiões onde não são observadas estruturas vorticais pelos critérios  $Q$ ,  $\Delta$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ , o que reforça a necessidade da existência de autovalores imaginários como um requisito inicial para a identificação de estruturas vorticais, no que diz respeito a esses critérios. A Fig. 4.61 apresenta os contornos dos critérios  $H$ ,  $H_e$  e  $H_{es}$ , assim como os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa e o operador  $AR^{\mathbf{n}_{swirlS}}$ .

A Fig. 4.61 mostra que enquanto toda a região do plano de corte aplicado apresenta valores igual a 0,5 para o critério  $H$ , que resulta no fato de que a vorticidade e a velocidade se mantêm perpendiculares ao longo de toda a região avaliada, os critério  $H_e$  corrobora com os operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ , assim como

os critérios  $H_{es}$  apresenta semelhança, apesar de dispor um contorno mais estratificado, com os operadores objetivos  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$ .

As Figs. 4.62, 4.63 e 4.64 apresentam os contornos dos operadores  $AR_{1,2,3}^A$ ,  $AR_{1,2,3}^B$ ,  $IR$ ,  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{nswirls}$  e  $AR^P$ , avaliados comparativamente aos critérios  $Q$  e  $Q_s$ . Nota-se nesses contornos a semelhança do operador  $AR_1^B$  com o operador  $AR^{\omega-\Omega}$  e do operador  $AR_2^B$  com o operador  $IR$ . Essa semelhança é devido principalmente a diferença nas formulações. Enquanto que os operadores  $AR_{1,2,3}^A$  avaliam o quanto cada uma das posições da diagonal principal ultrapassa os respectivos valores associados fora da diagonal principal, semelhante ao operador  $IR$ , os operadores  $AR_{1,2,3}^B$  realizam essa mesma avaliação, mas nas direções principais de deformação. Outro fato que deve ser ressaltado é a relativa semelhança entre os operadores  $AR^{nswirls}$  e  $AR^P$ , principalmente no que diz respeito a região onde não são avaliados vórtices. Visto que no regime de stokes as forças de pressão contrabalançam as forças viscosas e, portanto, é natural que as direções principais da Hessiana da pressão nesse caso estejam próximas à direção principal do eixo de rotação de filamentos materiais no escoamento. Finalmente, deve-se ressaltar o fato de que os novos operadores introduzidos no presente trabalho apresentam padrões tipicamente caóticos em campos eulerianos.

As Figs. 4.65-4.71 apresentam os mesmos critérios descritos anteriormente, mas avaliados para  $\omega_z = 5$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$  nas Eqs. (4.67) e (4.68). Os critérios  $Q$ ,  $\Delta$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$  apresentam comportamento semelhante, identificando uma única grande estrutura vortical que engloba grande do domínio e cujo centro coincide com o centro da gota. Esses critérios diferem somente na delimitação da fronteira desse vórtice. Entretanto, suas respectivas contrapartes objetivas não apresentam variações relevantes se comparados com aqueles relacionados com o caso  $\omega = 0$ . Também os operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  apresentaram relativa alterações com aqueles avaliados no caso  $\omega = 0$  enquanto que os operadores  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla\mathbf{v}}}$  não evidenciaram alterações nos padrões vorticais avaliados. Com relação aos critérios baseados na Hessiana da pressão proposta por Jeong e Hussain [3] e

a obtida diretamente no escoamento, temos que grande alterações foram encontradas nessa segunda categoria, no que diz respeito aos critérios  $G$  e sua contraparte objetiva  $G_s$  com relação ao caso apresentado inicialmente nessa seção. Com relação aos novos operadores apresentados nesse trabalho, os únicos que apresentaram relativa mudança foram os operadores  $AR^{n_{swirlS}}$  e  $AR^P$ .

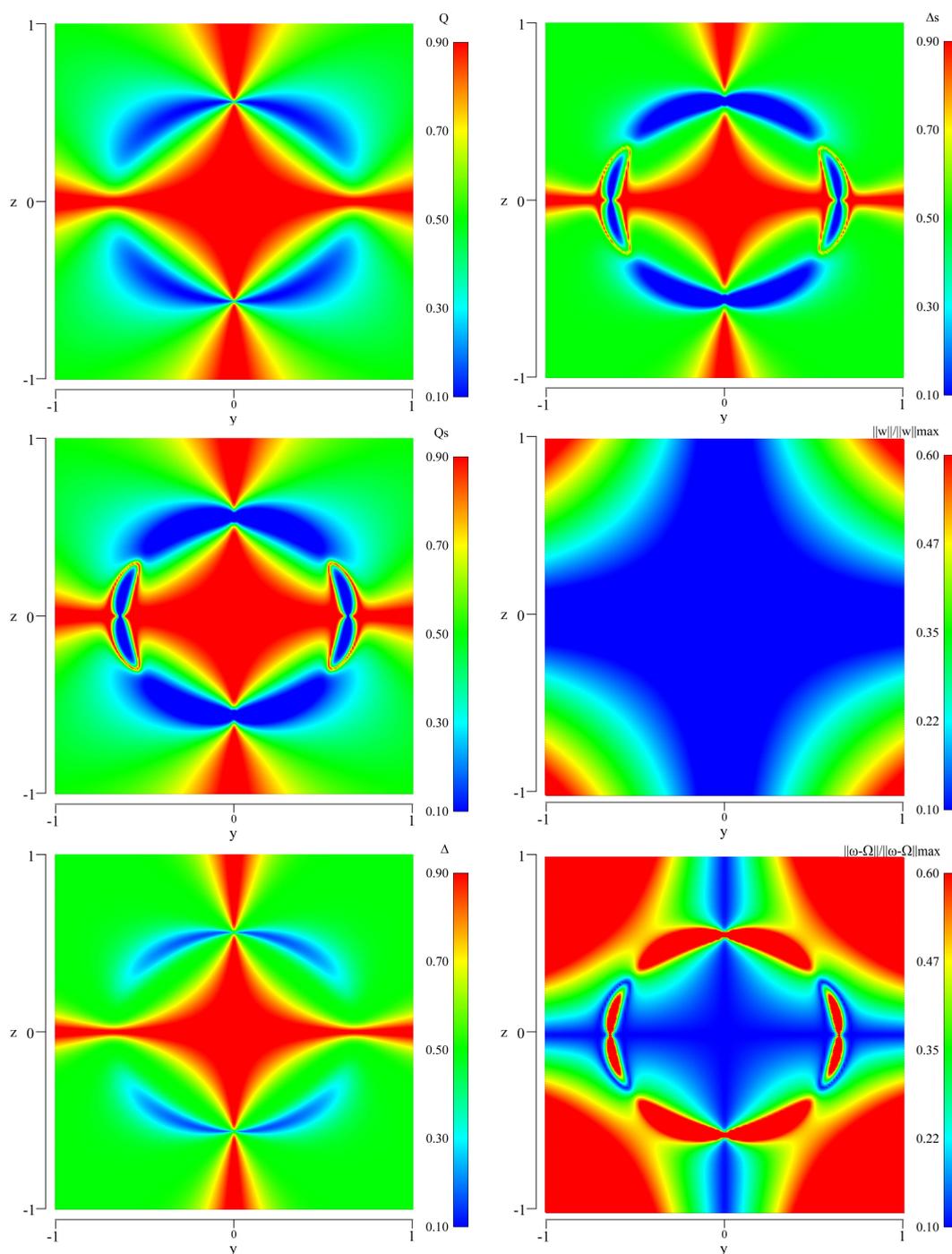


Fig. 4.58: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0$ .

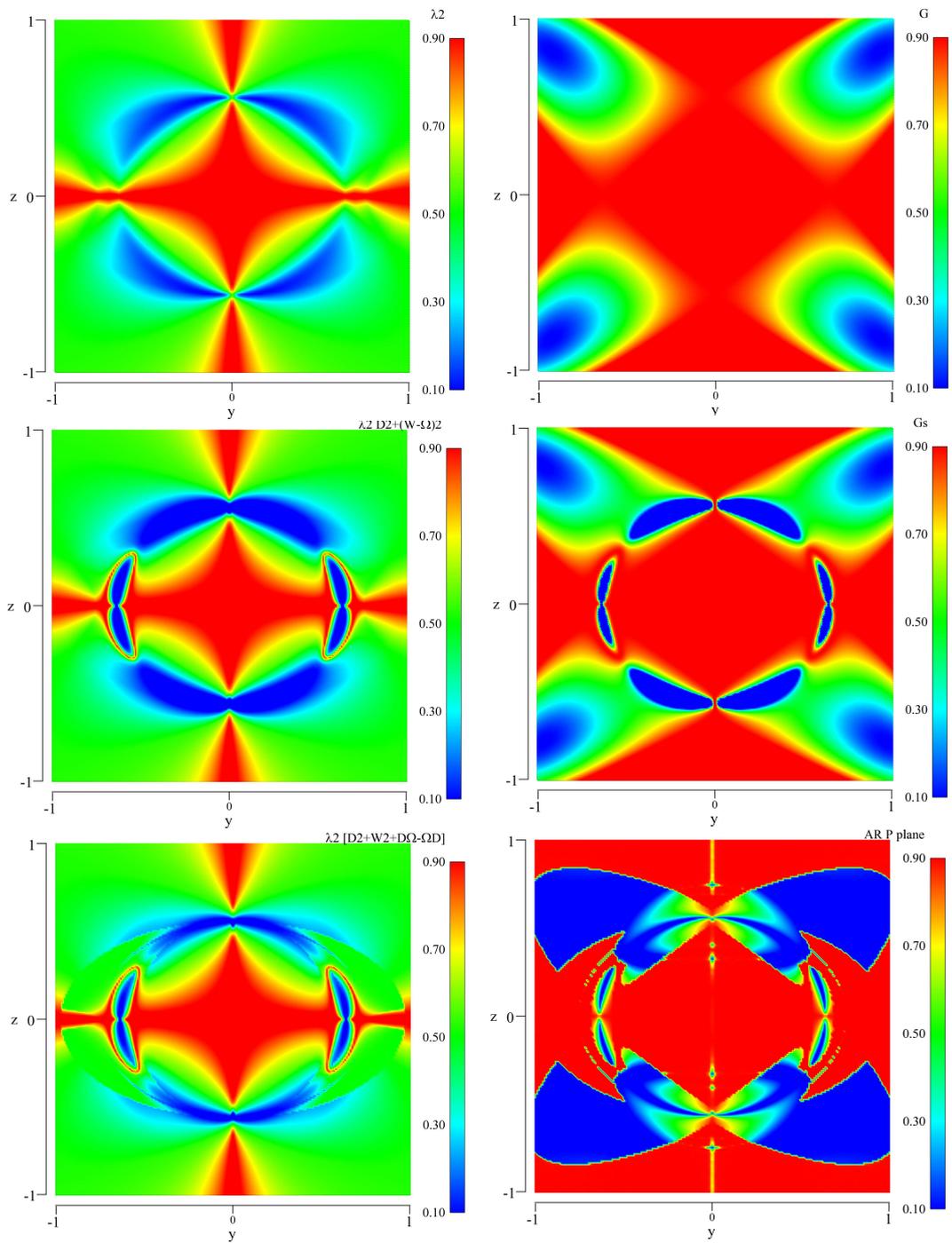


Fig. 4.59: Critérios  $\lambda_2^{\mathcal{D}^2 + \mathbf{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{\mathcal{D}^2 + \overline{\mathbf{W}}^2}$ ,  $\lambda_2^{\mathcal{D}^2 + \mathbf{W}^2 + \mathcal{D}\Omega - \Omega\mathcal{D}}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0$ .

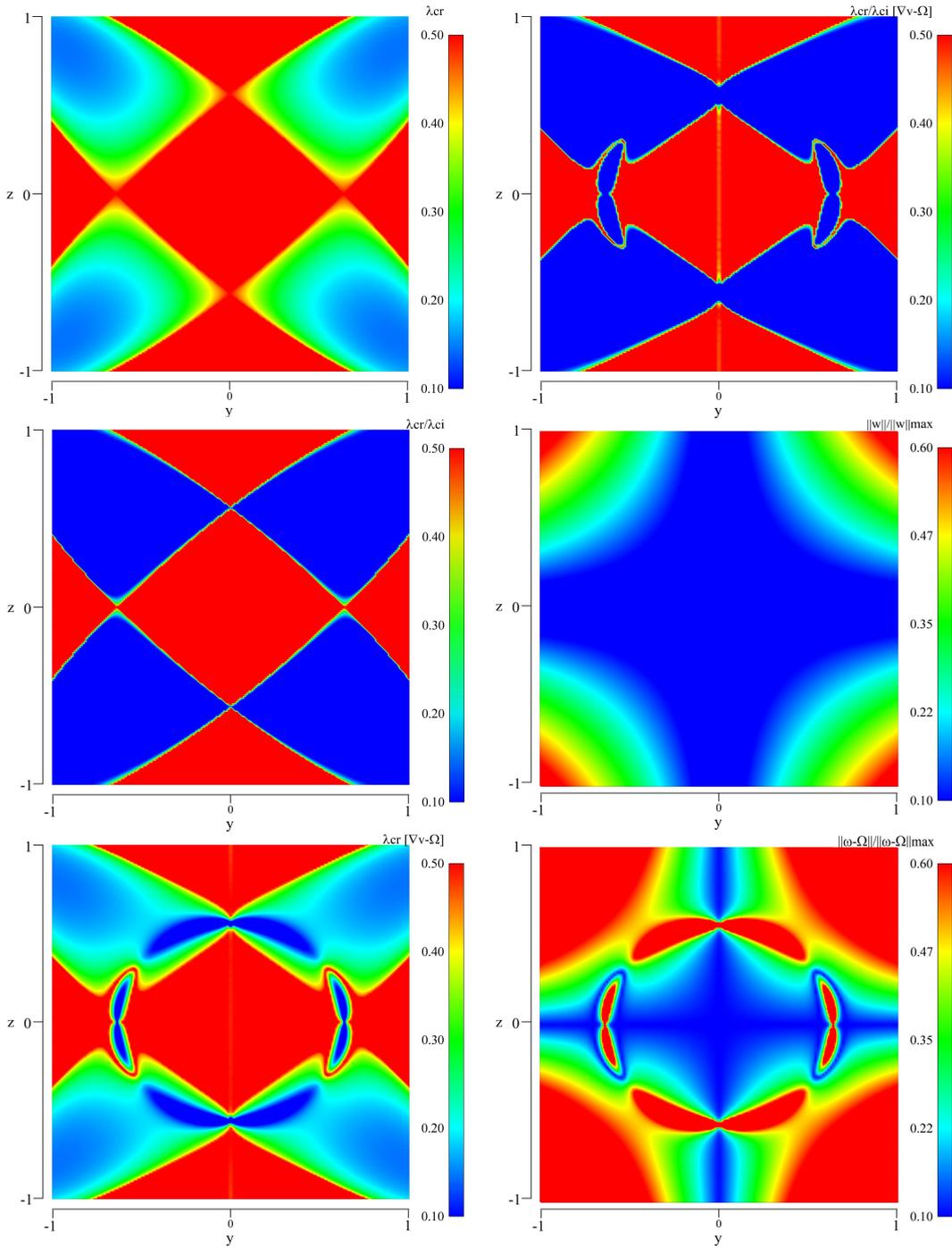


Fig. 4.60: Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla v}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0$ .

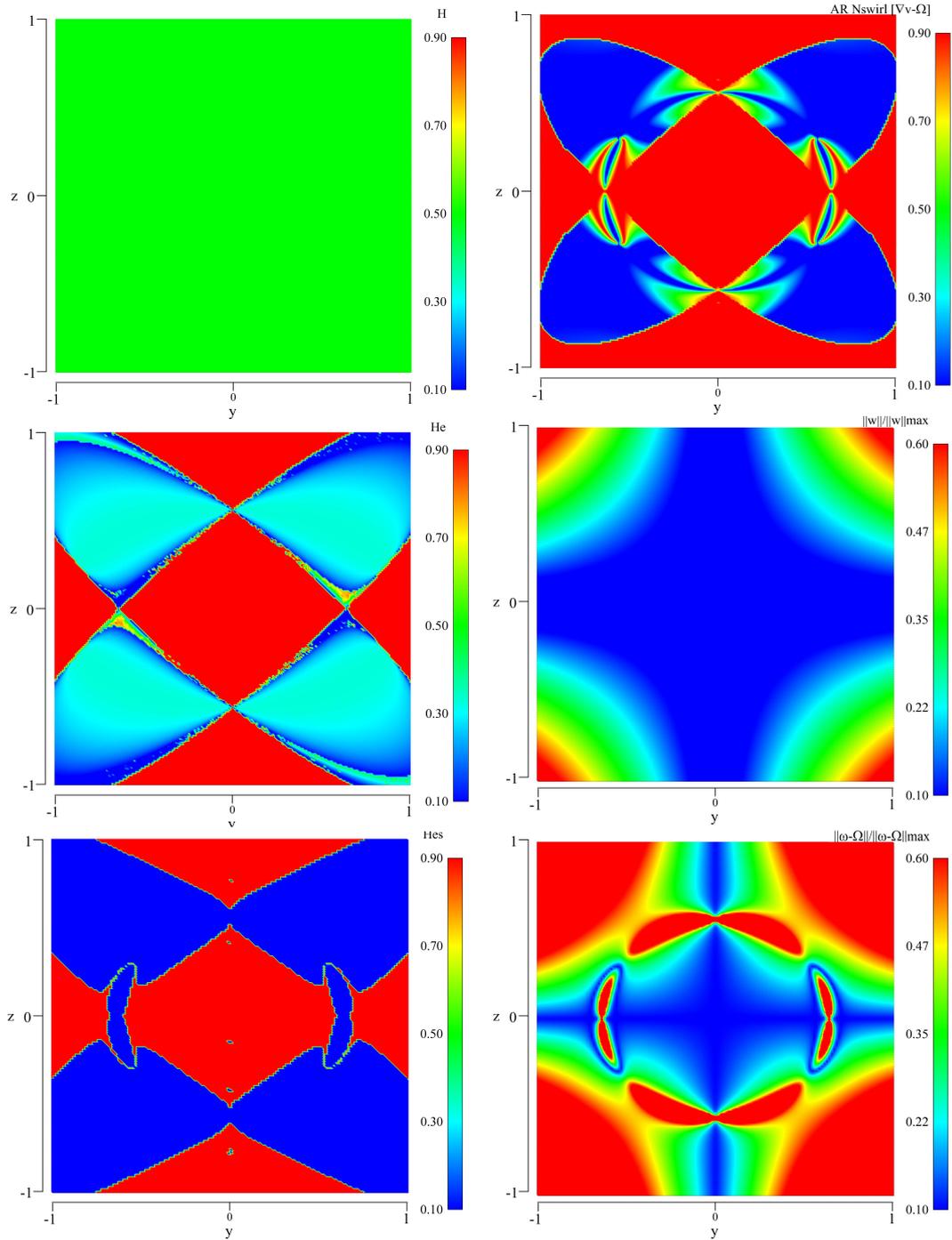


Fig. 4.61: Critérios  $H$ ,  $H_e$  e  $H_{es}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa e do operador  $AR^{n_{swirls}}$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0$ .

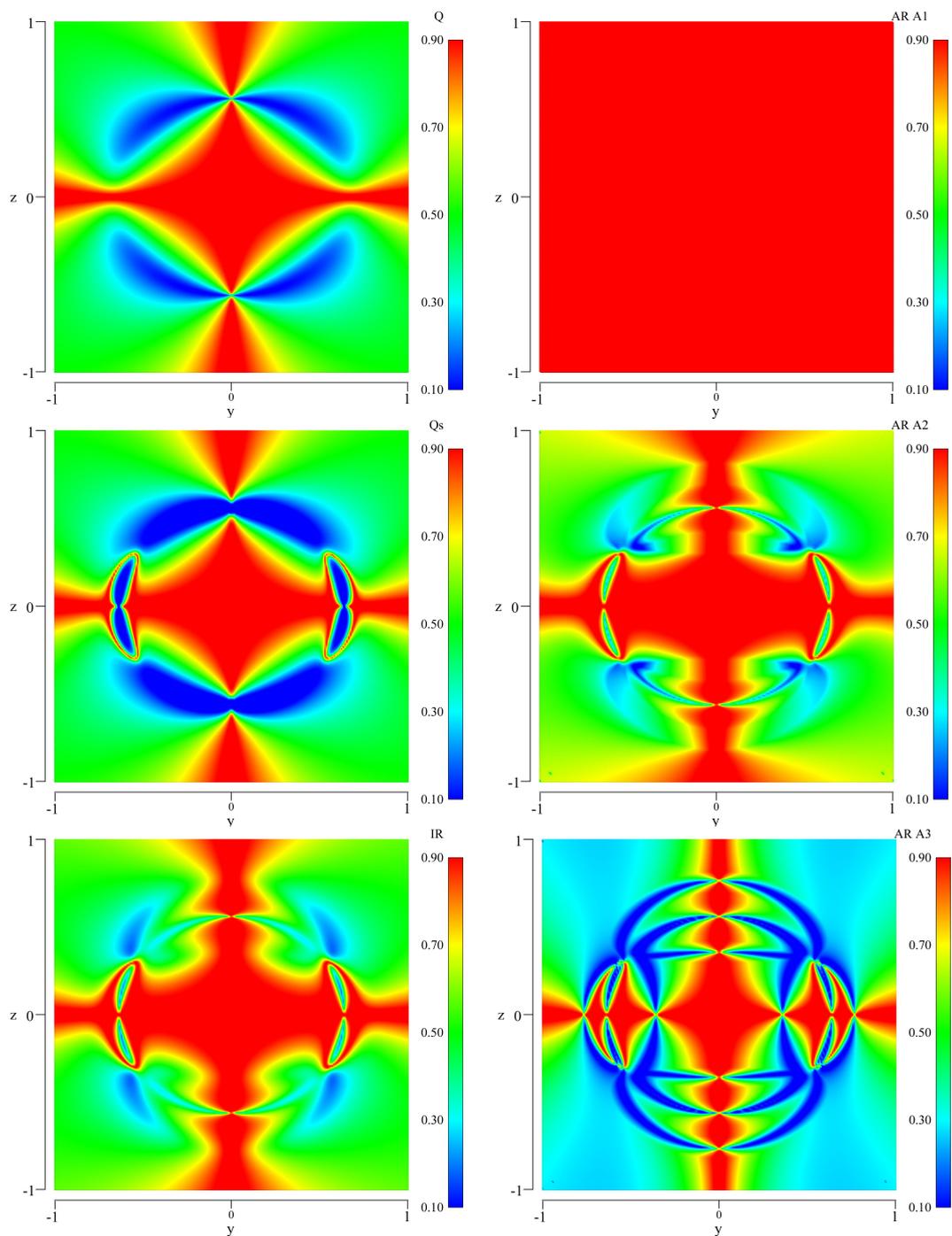


Fig. 4.62: Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0$ .

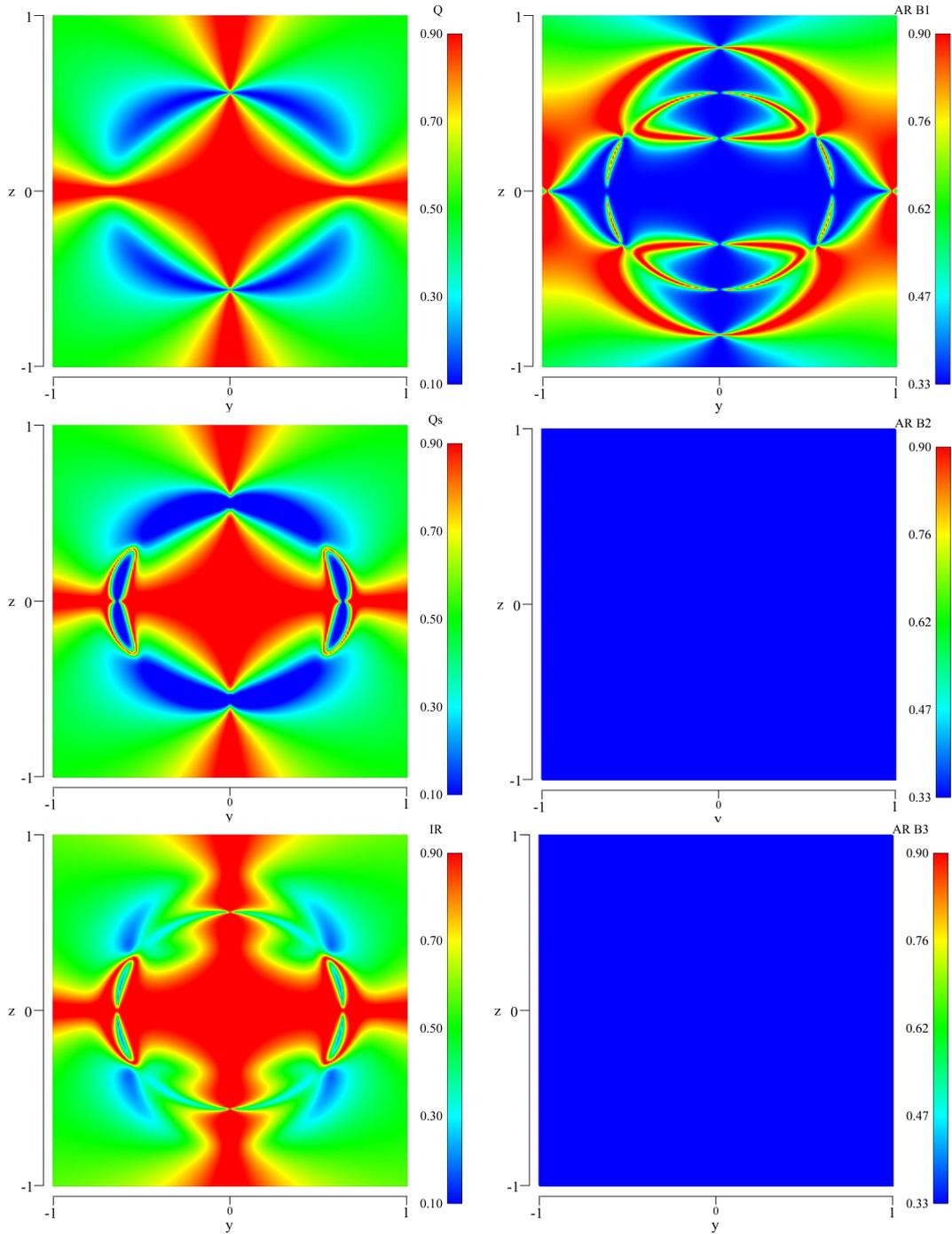


Fig. 4.63: Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0$ .

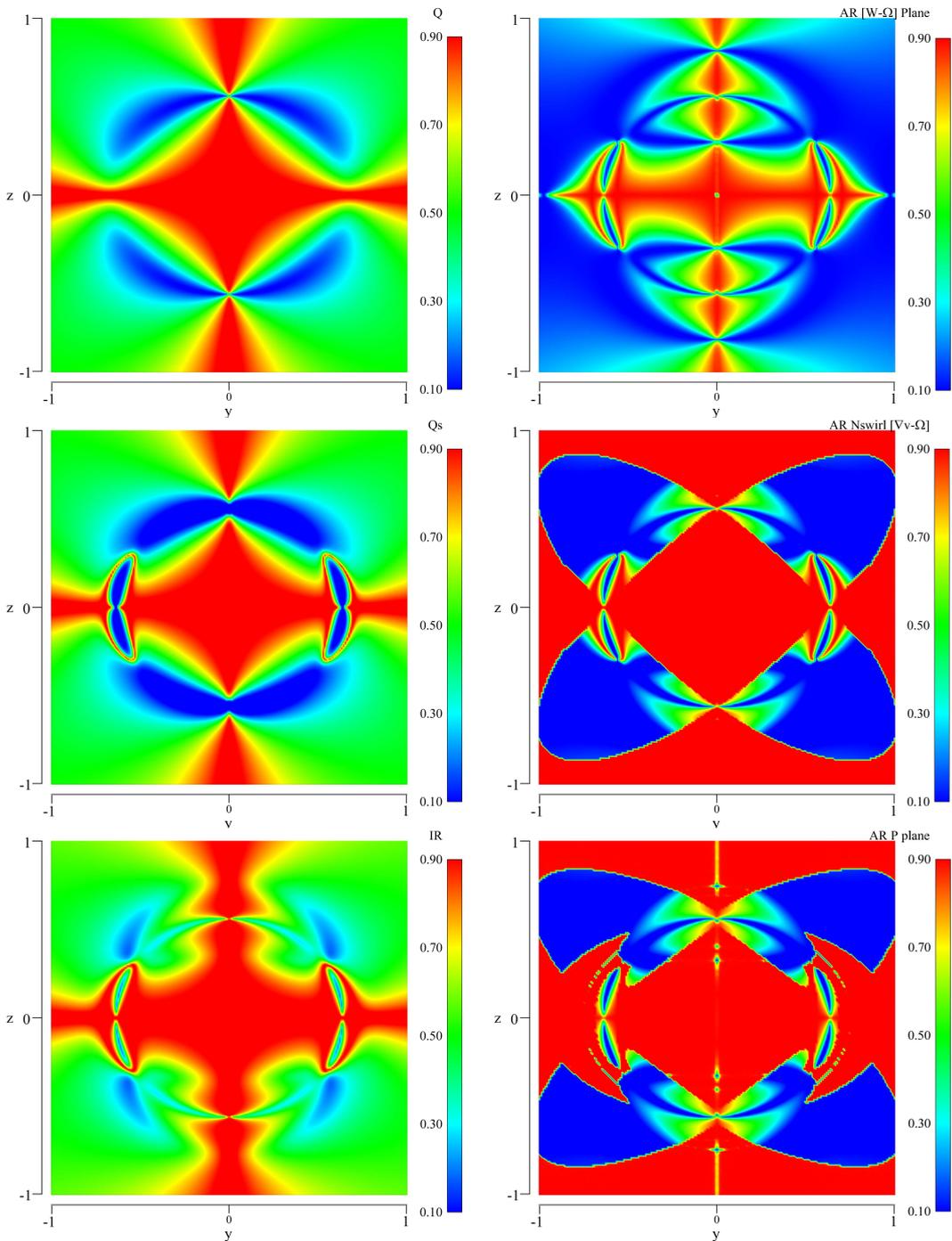


Fig. 4.64: Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{nswirls}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0$ .

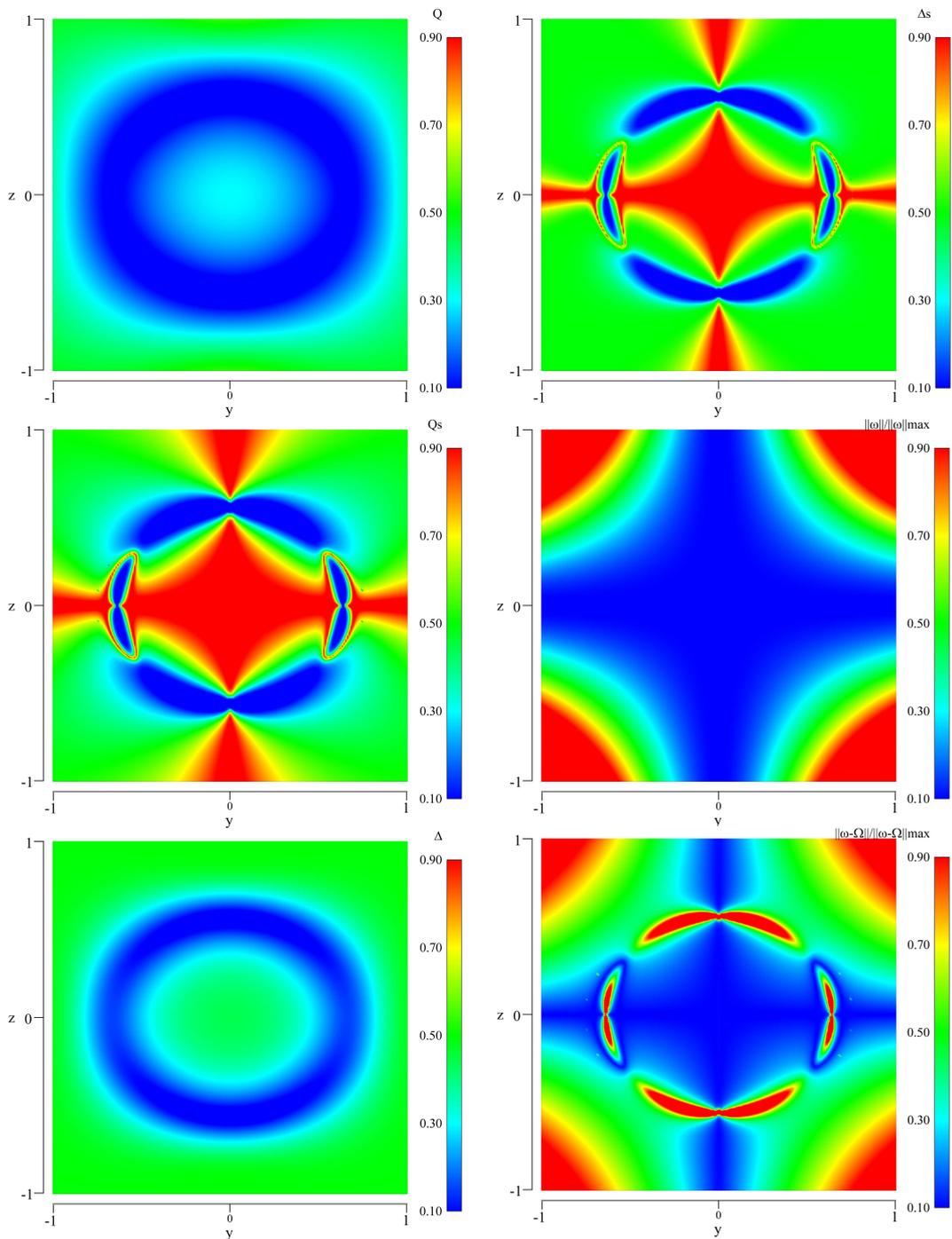


Fig. 4.65: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega = 0$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ .

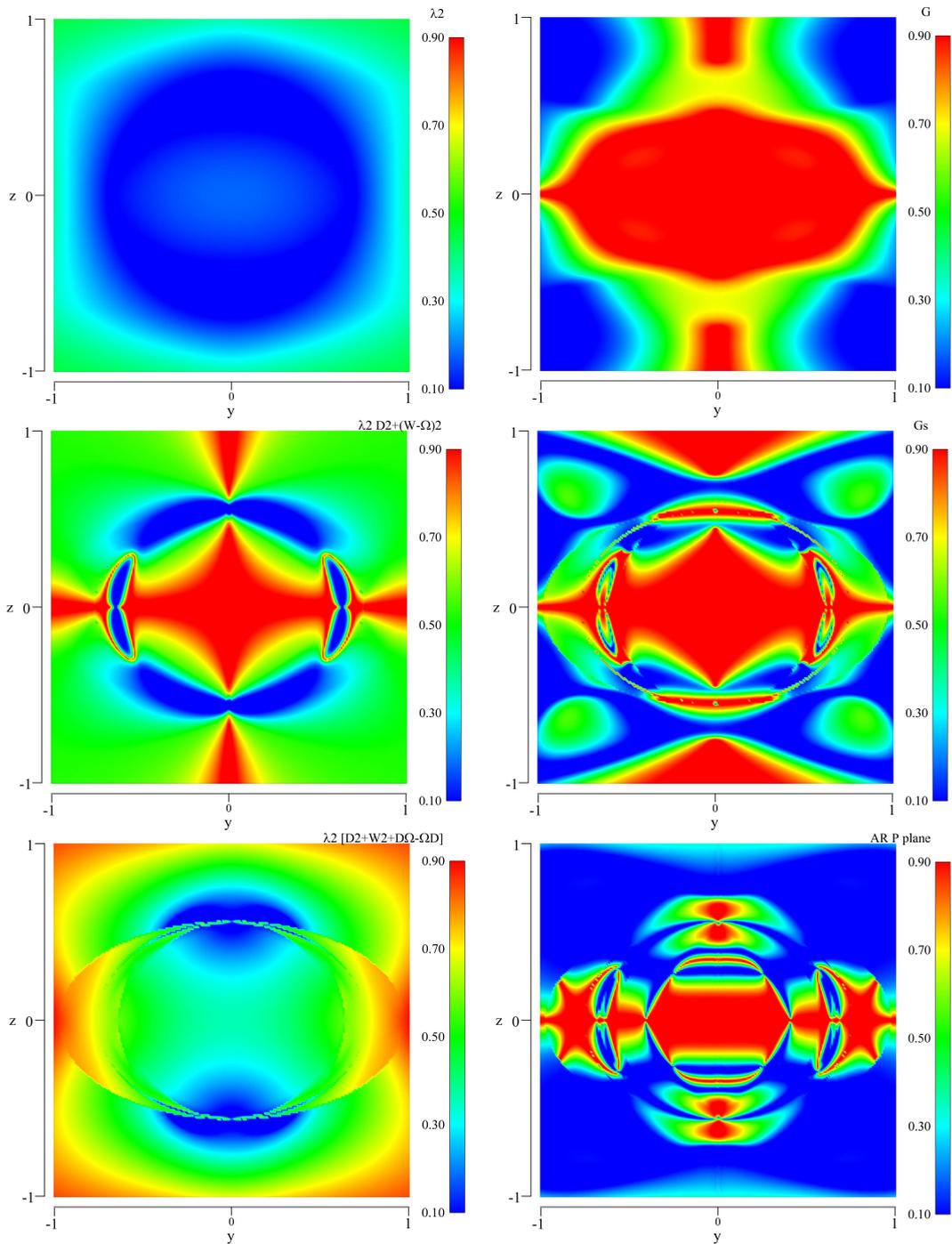


Fig. 4.66: Critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\bar{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_z = 5$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ .

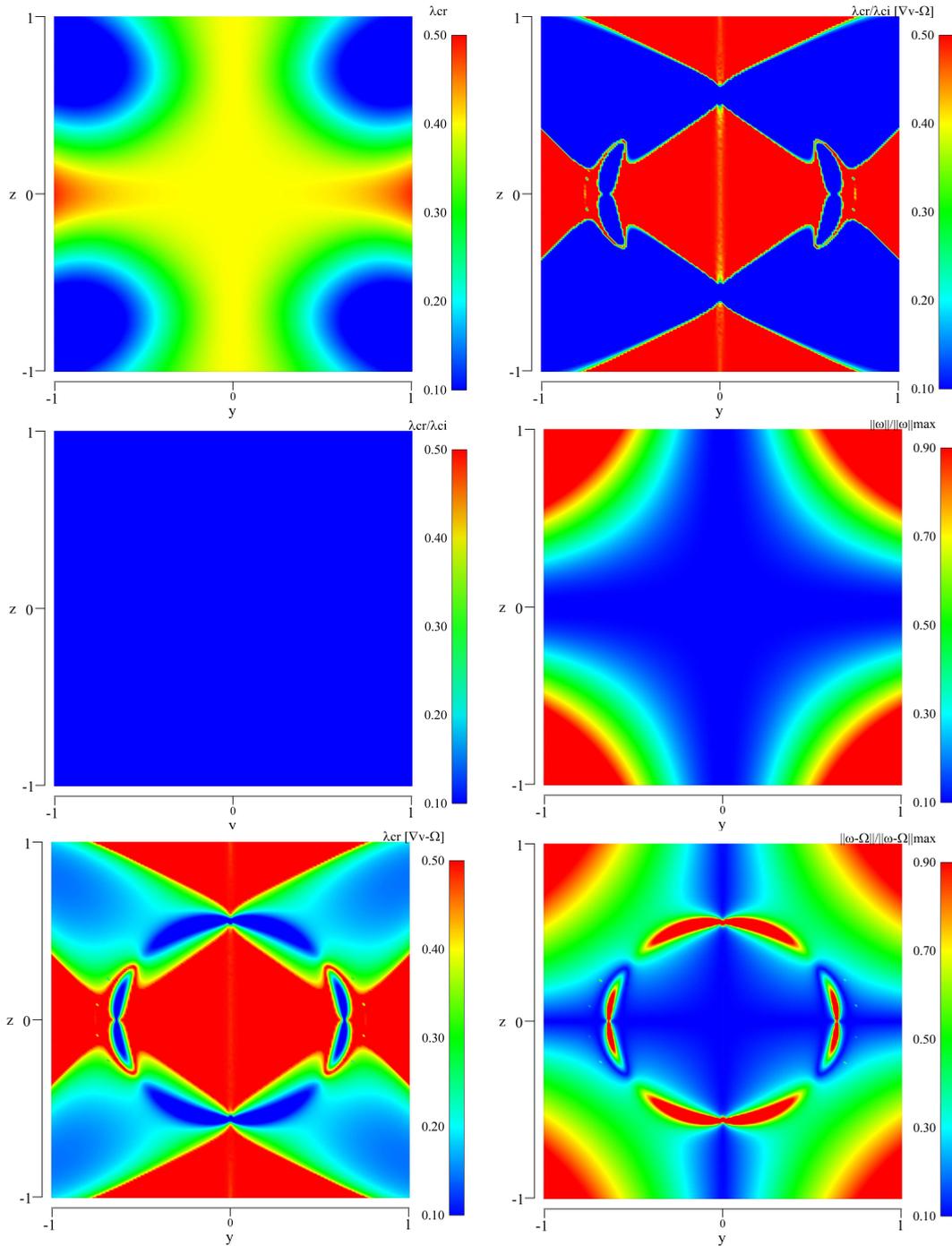


Fig. 4.67: Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla v}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_z = 5$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ .

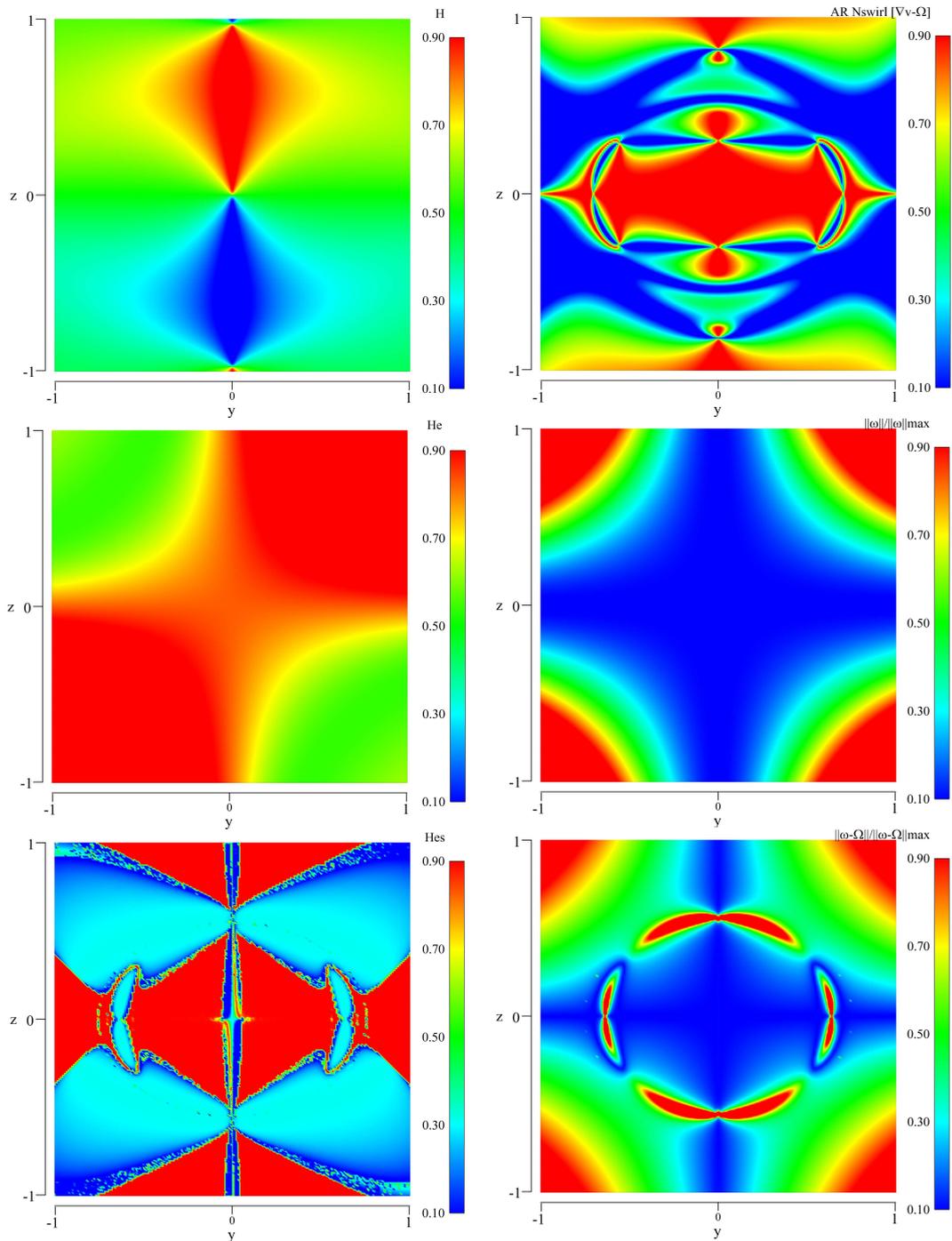


Fig. 4.68: Critérios  $H$ ,  $H_e$  e  $H_{es}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa e do operador  $AR^{NswirlS}$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_z = 5$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ .

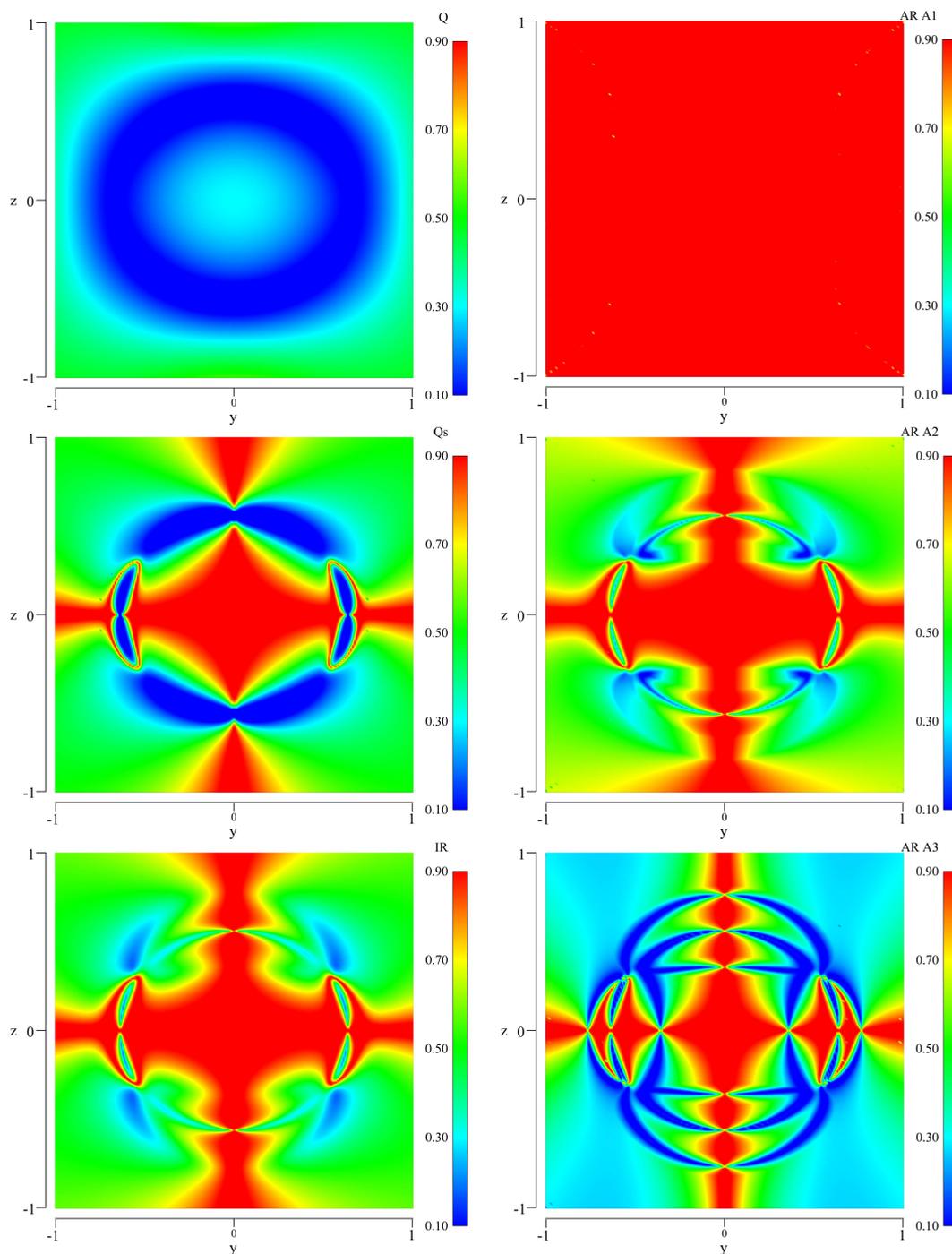


Fig. 4.69: Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_z = 5$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ .

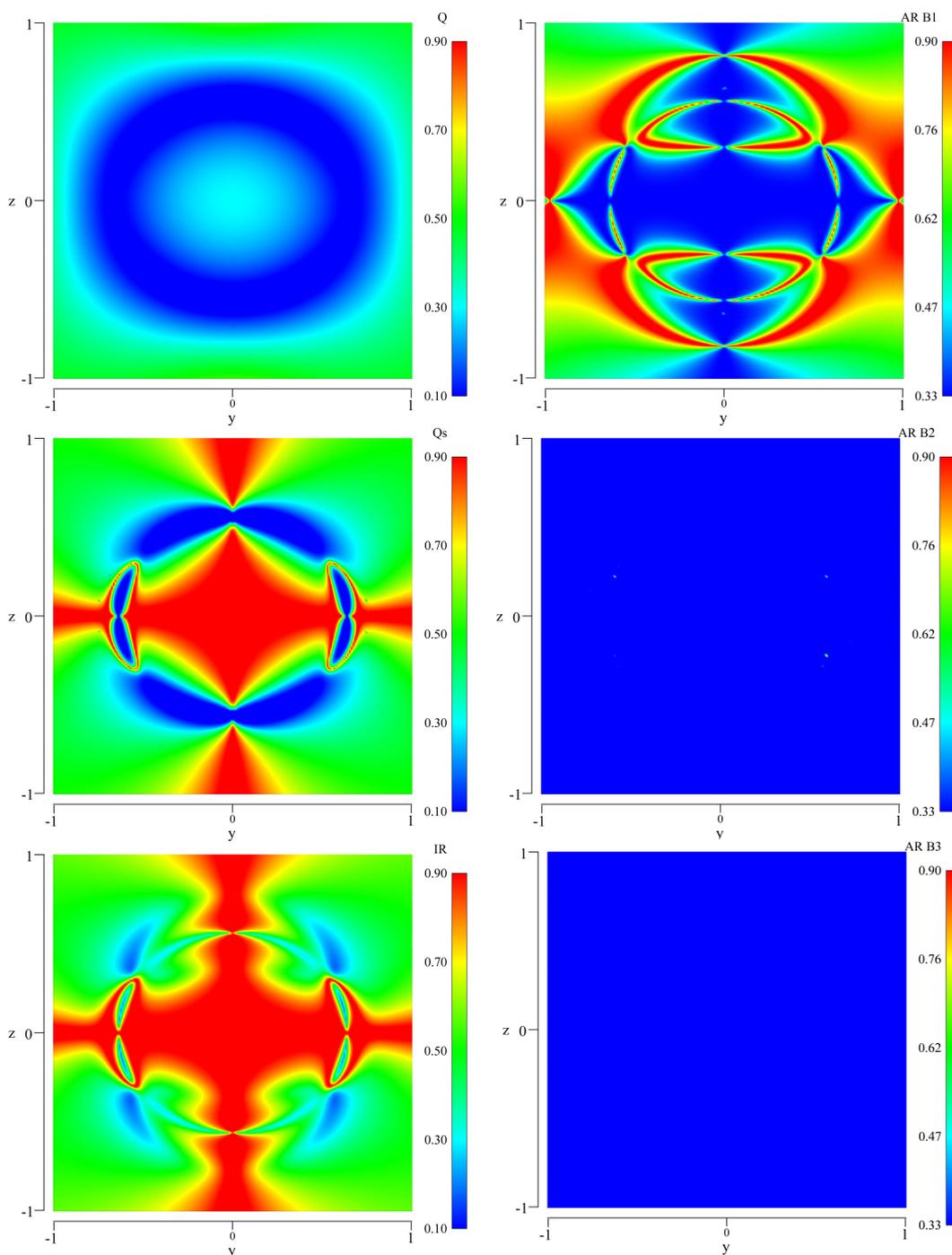


Fig. 4.70: Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_z = 5$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ .

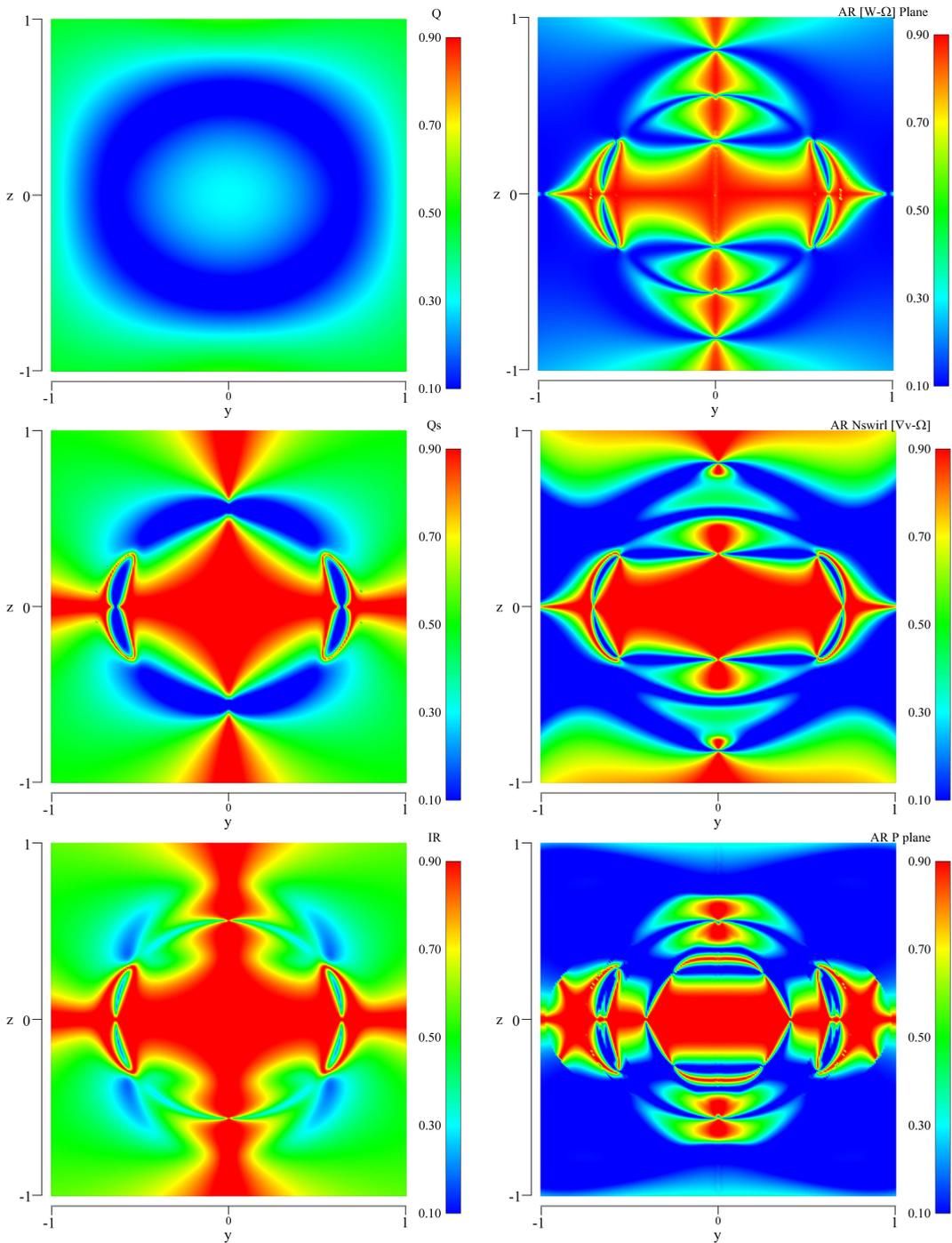


Fig. 4.71: Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{nswirls}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_z = 5$  e  $\omega_x = \omega_y = 0$ .

As Figs. 4.72-4.78 apresentam a mesma disposição de critérios e operadores dos casos anteriores, mas avaliados para o caso  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ . Como já afirmado anteriormente e concluído por Stone et al.[75], esse terceiro campo de velocidades apresenta linhas de corrente tipicamente caóticas e não mantêm a coerência encontrada nos casos anteriores. Portanto, torna-se interessante avaliar como os diferentes critérios vão identificar zonas vorticais nesse campo de velocidades, visto que é possível encontrar diferentes regimes de taxa de deformação e rotação de filamentos materiais diferentes ao longo do domínio. Em um primeira análise, observa-se que os critérios  $Q$ ,  $\Delta$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$  novamente comportamento semelhante, mas, nessa nova situação, o vórtice identificado por esses critérios apesar de novamente dispor seu centro no centro da gota esférica, não mantêm a simetria em um quarto como nos casos anteriores, mudando a direção de seus eixos. Os operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  apresentam uma certa semelhança com os critérios  $Q$ ,  $\Delta$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$  se forem dispostos limites máximos para avaliação de estruturas vorticais, mas a principio sobreavaliam a região vortical resultante. A versão objetiva do operador  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  apresenta relativa diferença com relação a sua contraparte objetiva, enquanto que com o operador  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  o mesmo não acontece. Com relação aos novos critérios apresentados no presente trabalho, o mesmo tipo de estrutura em grande escala observado por alguns dos critérios existentes também é observado em alguns operadores, apesar de pequenas diferenças na morfologia, mas um fato relevante é a diferença na orientação dessa estrutura vortical, mas precisamente no sentido do eixo de maior comprimento do vórtice elíptico observado por ambas as categorias de operadores. Outro fato de grande relevância é a semelhança entre os contornos de  $AR^{\omega-\Omega}$  e  $AR^{\mathbf{P}}$ , apesar de pequenas diferenças nos valores observados.

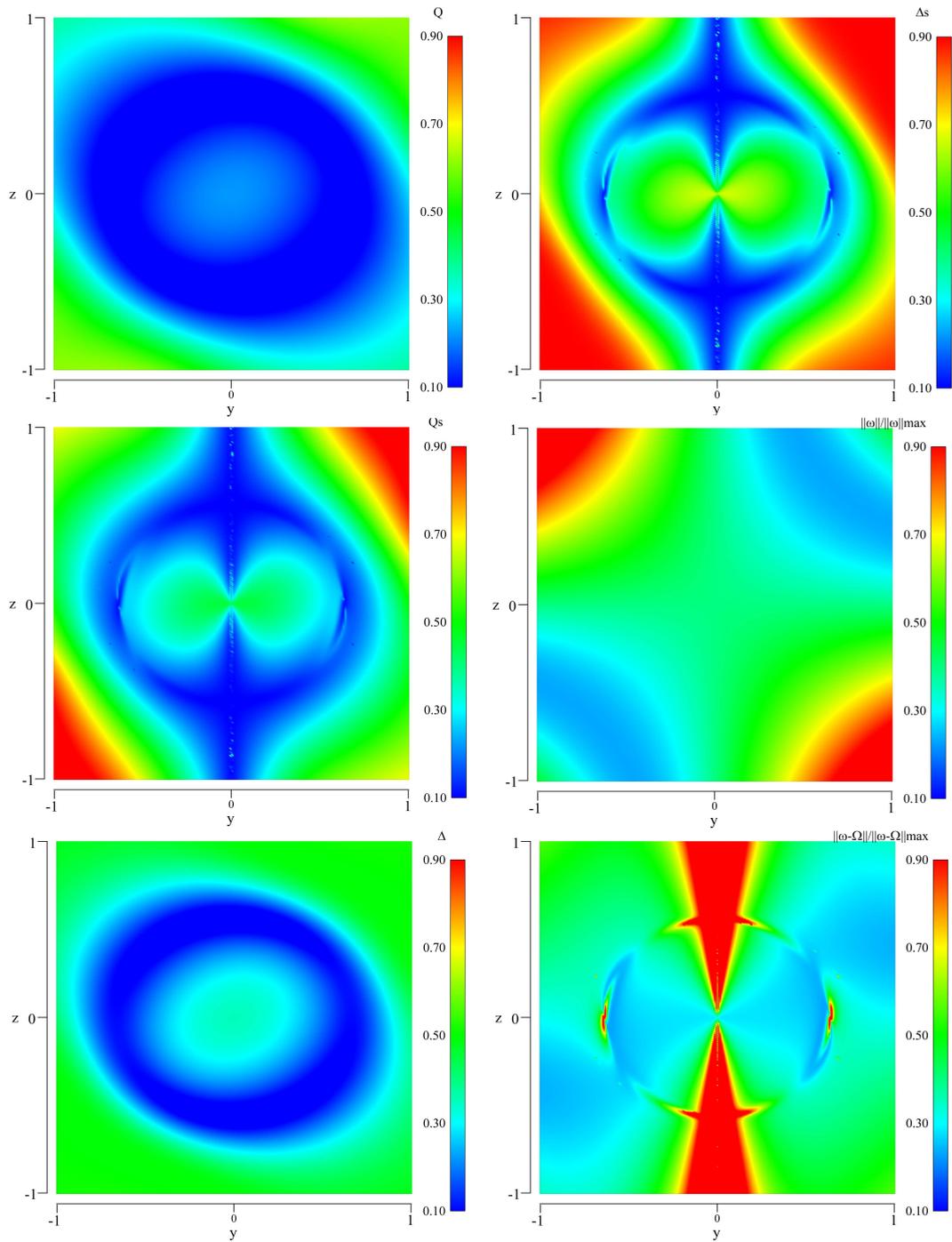


Fig. 4.72: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ .

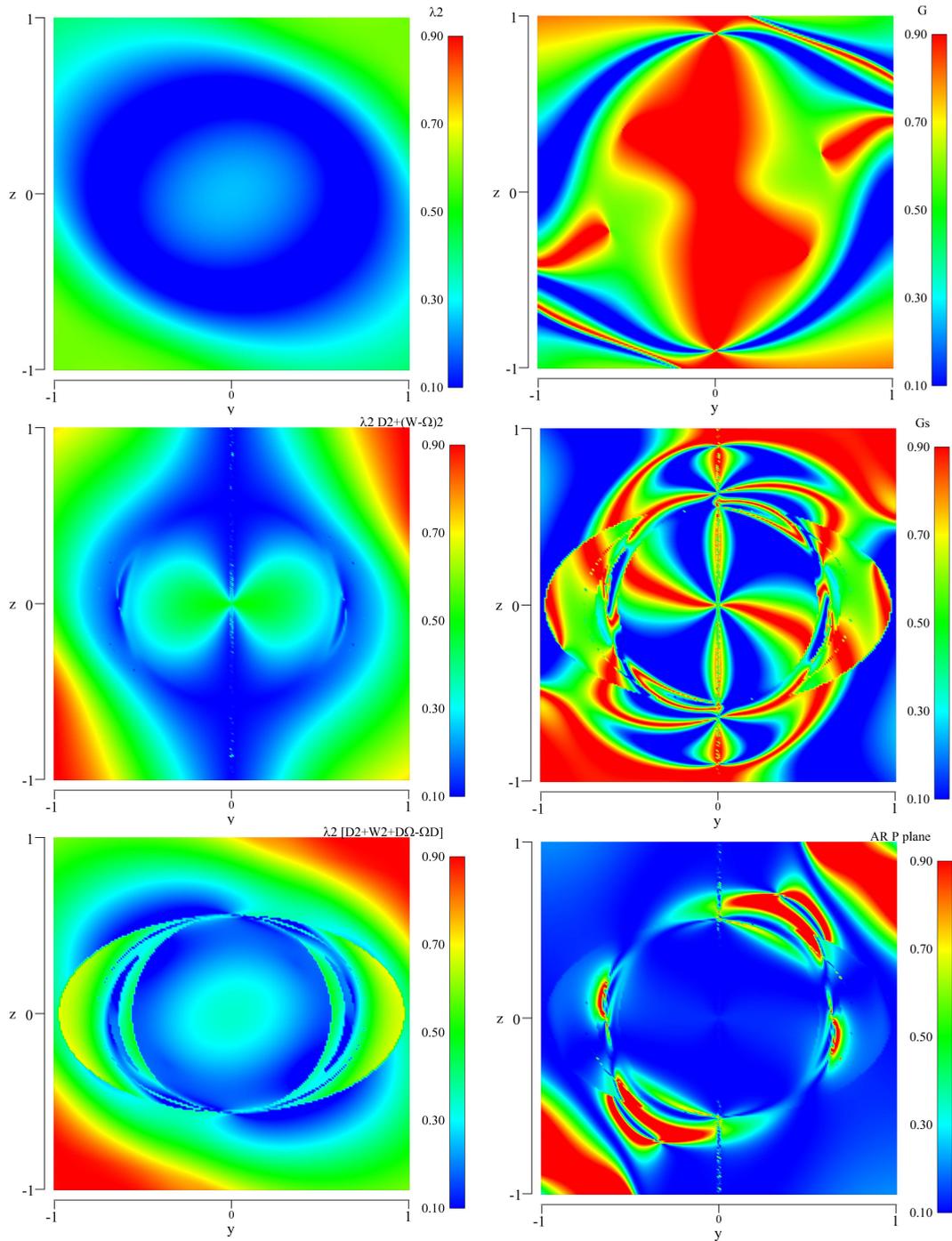


Fig. 4.73: Critérios  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\overline{\mathbf{W}}^2}$ ,  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2+\mathbf{D}\Omega-\Omega\mathbf{D}}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ .

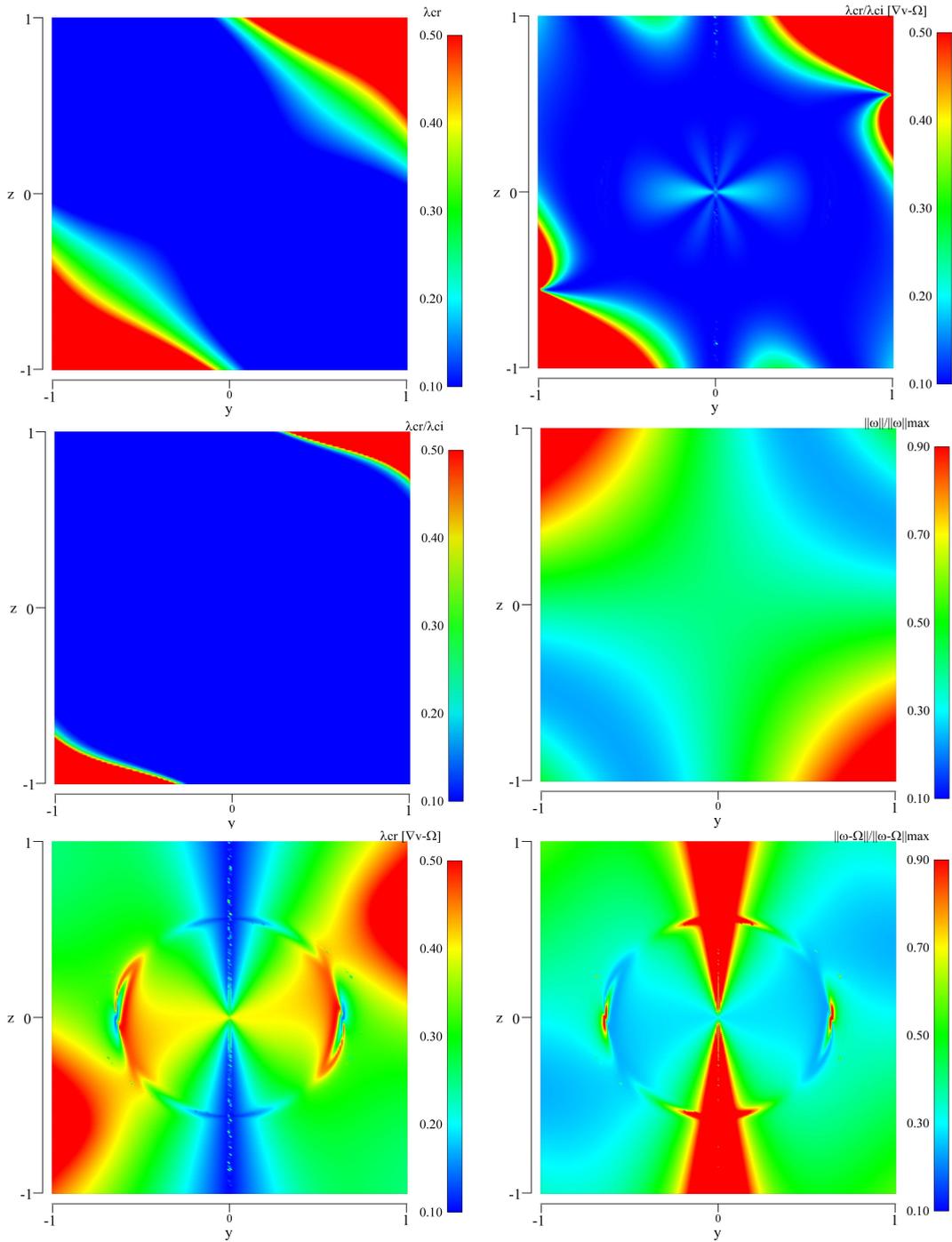


Fig. 4.74: Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla \mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla \mathbf{v}}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla \mathbf{v}}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla \mathbf{v}}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla \mathbf{v}}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ .

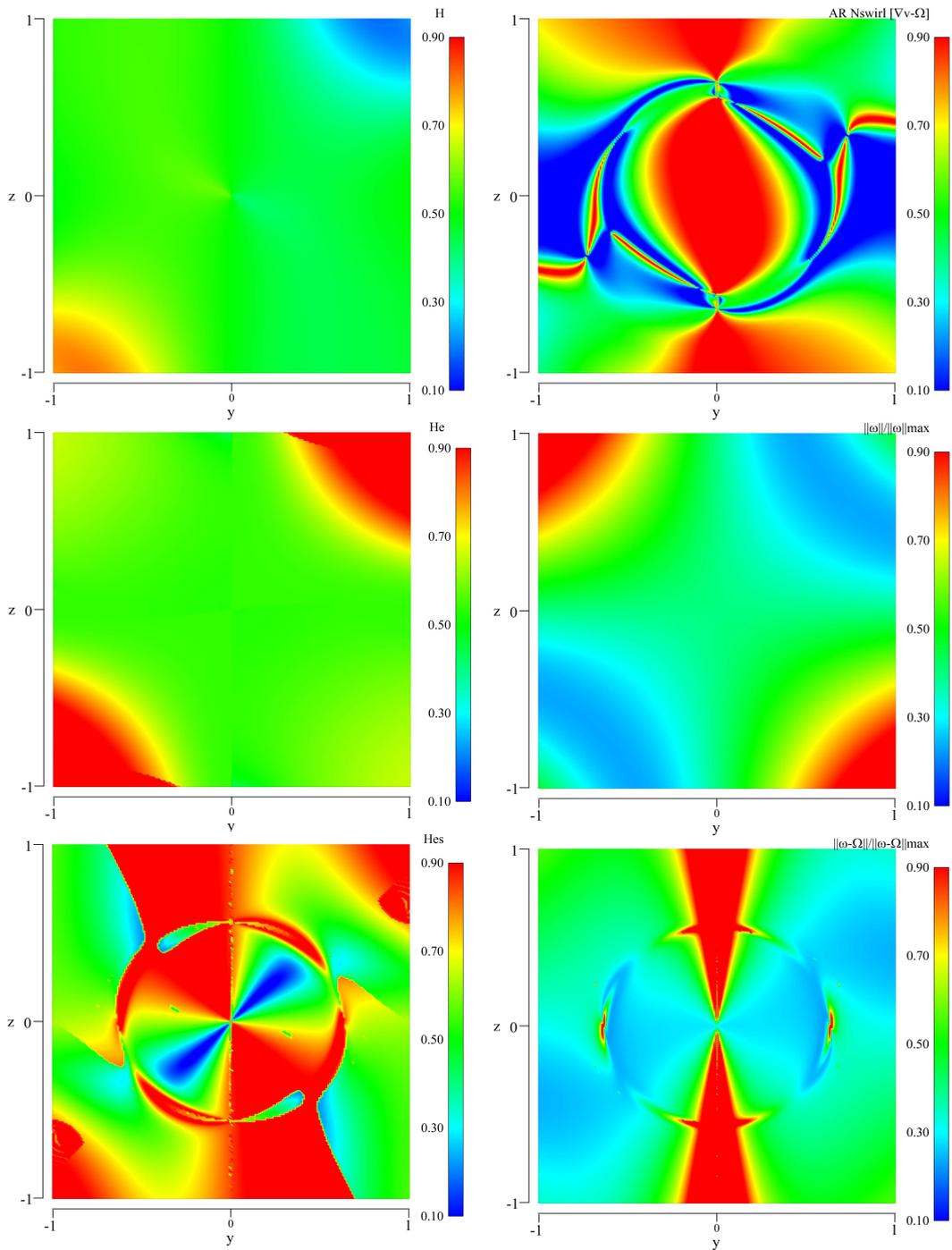


Fig. 4.75: Critérios  $H$ ,  $H_e$  e  $H_{es}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa e do operador  $AR^{NswirlS}$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ .

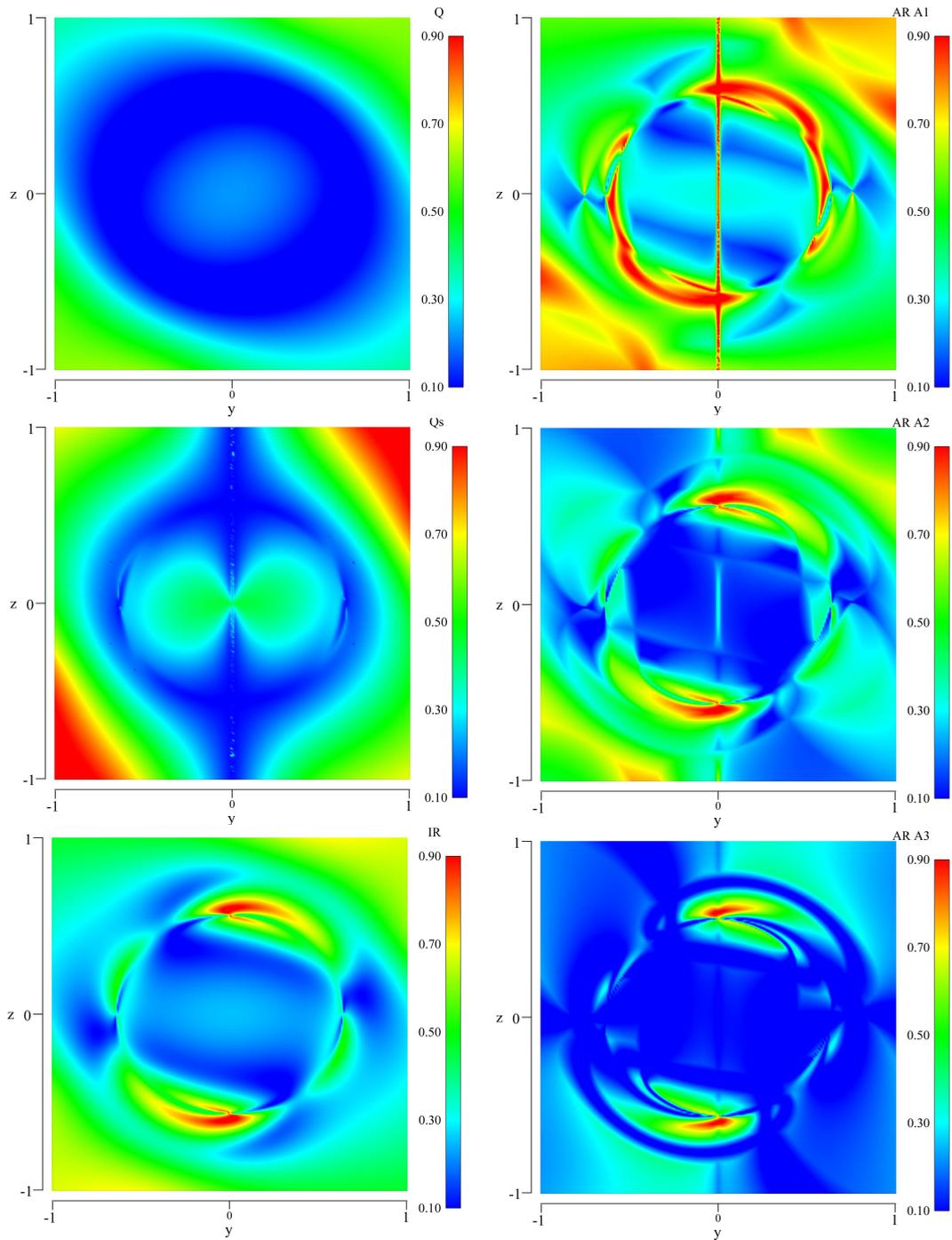


Fig. 4.76: Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ .

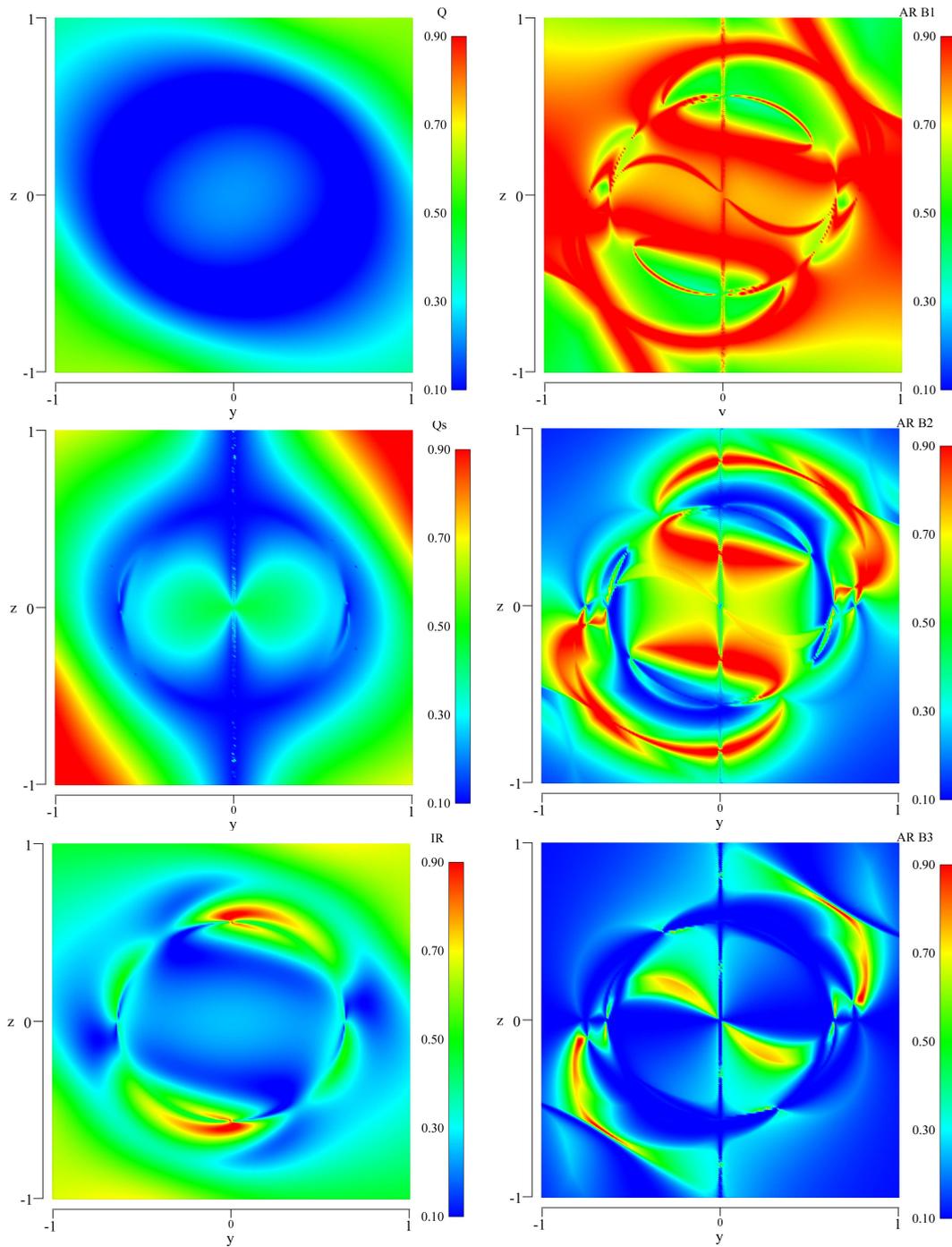


Fig. 4.77: Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ .

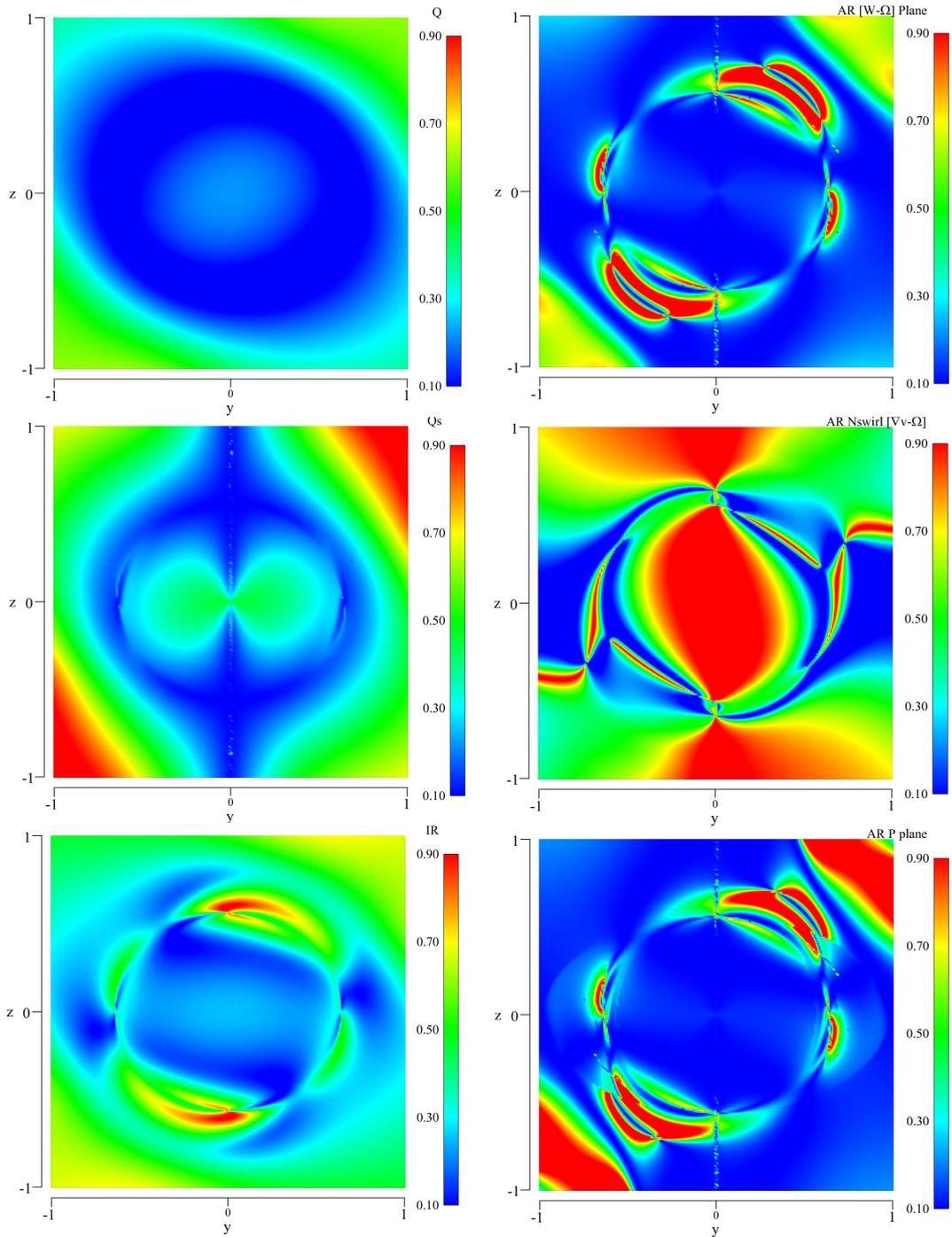


Fig. 4.78: Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{n_{swirls}}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de uma gota imersa em um fluido de Stokes com  $\omega_x = \omega_y = 5$  e  $\omega_z = 0$ .

#### 4.2.2 Escoamento ABC

Um dos escoamentos mais utilizados no estudo de trajetórias caóticas é o consagrado escoamento Arnold-Beltrami-Childress (ABC), cujo campo de veloci-

dades pode ser escrito como

$$u_x = A \operatorname{sen}(z) + C \cos(y) \quad (4.74)$$

$$u_y = B \operatorname{sen}(x) + A \cos(z) \quad (4.75)$$

$$u_z = C \operatorname{sen}(y) + B \cos(x) \quad (4.76)$$

O escoamento ABC foi estudado exaustivamente por diversos autores, mas o trabalho apresentado por Dombre et al. [62] constitui um dos mais completos sobre essa solução das equações de Euler. A família de escoamentos a qual esse campo de velocidades pertence foi inicialmente proposto por Arnold [60] quando este buscava uma solução tridimensional periódica para as equações de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla p \quad (4.77)$$

onde

$$p = p + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \quad (4.78)$$

Entretanto, nesse escoamento, não necessariamente para qualquer valor das constantes A, B e C o campo de velocidades apresenta linhas de corrente caóticas somente para valores dessas constantes de cujo campo de velocidades resultante seja Beltramiano, ou seja,

$$\boldsymbol{\omega} = \beta \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot \nabla \beta = 0 \quad (4.79)$$

Visto que o escoamento apresenta linhas de corrente caóticas,  $\beta$  deve ser constante em regiões vorticais, pela segunda relação em (4.79). Para simplificação do problema, grande parte dos autores trabalham com o fato de que  $\beta$  seja constante em todo o domínio. Assim, o escoamento é formado pela superposição de

ondas helicoidais, todas com o mesmo número de onda  $\beta$  e com periodicidade em  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq 2\pi$  e  $0 \leq z \leq 2\pi$ , sendo essas dimensões características do “cubo periódico” do escoamento.

No que diz respeito a simetria do escoamento ABC, este é invariante quanto às seguintes transformações

$$S_1: \quad x' = x, \quad y' = y - \pi, \quad z' = -z, \quad t' = -t \quad (4.80)$$

$$S_2: \quad x' = -x, \quad y' = y, \quad z' = \pi - z, \quad t' = -t \quad (4.81)$$

$$S_3: \quad x' = \pi - x, \quad y' = -y, \quad z' = z, \quad t' = -t \quad (4.82)$$

Assim, cada uma das transformações apresentadas acima corresponde a uma simetria com relação a um determinado eixo ( $x, y$  e  $z$ , respectivamente). Combinando as transformações acima com propriedades de periodicidade temos que a fronteira do cubo fundamental que representa o escoamento ABC é dado por  $0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq 2\pi$  e  $0 \leq z \leq 2\pi$ . Avaliando também alterações nos coeficientes do escoamento, temos que este atende algumas propriedades:

→ O campo de velocidades é invariante quanto a transformação abaixo de forma a permitir que sejam estudados apenas os casos  $A \geq 0$  (e, conseqüentemente  $B \geq 0$  e  $C \geq 0$ ):

$$A' = -A, \quad z' = z + \pi. \quad (4.83)$$

→ O campo de velocidades é invariante quanto a transformação abaixo de forma a permitir que sejam estudados apenas os casos onde o coeficiente  $A$  é maior que os coeficientes  $B$  e  $C$ :

$$A' = B, \quad B' = C, \quad C' = A, \quad x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x. \quad (4.84)$$

→ O campo de velocidades é invariante quanto a transformação abaixo de forma a permitir que sejam estudados apenas os casos onde  $B \geq C$ :

$$B' = C, \quad C' = B, \quad x' = \frac{3\pi}{2} - y, \quad y' = \frac{3\pi}{2} - x, \quad z' = \frac{3\pi}{2}. \quad (4.85)$$

As três transformações acima podem ser escritas de maneira única

$$A \geq B \geq C \quad (4.86)$$

Um dos trabalhos mais importantes sobre o escoamento ABC, foi conduzido por Childress [61] e nesse estudo ele se ateve ao caso  $A = \sqrt{3}$ ,  $B = \sqrt{2}$  e  $C = 1$  e demonstrou que o mesmo apresentação linhas de correntes caóticas. Outro ponto importante se ser avaliado no escoamento ABC é quanto a presença de pontos de estagnação, regiões onde filamentos materiais tipicamente se encontram em um estado de deformação pura. Esses pontos de estagnação podem ser descritos igualando a zero cada uma das componentes da velocidade de tal forma que

$$-C\text{sen}(y) = B\text{cos}(x) = \pm \left[ \frac{1}{2}(B^2 + C^2 - A^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.87)$$

$$-A\text{sen}(z) = C\text{cos}(y) = \pm \left[ \frac{1}{2}(C^2 + A^2 - B^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.88)$$

$$-B\text{sen}(x) = A\text{cos}(z) = \pm \left[ \frac{1}{2}(A^2 + B^2 - C^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.89)$$

Visto que  $x$ ,  $y$  e  $z$  são reais, temos que o cubo fundamental do escoamento ABC apresenta 1 ponto de estagnação e o cubo periódico, conseqüentemente, oito pontos. Os estudos conduzidos por Dombre et al. [62] resultou na identificação de na identificação de regiões onde o escoamento é tipicamente unidimensional. Essas regiões são caracterizadas por topologias tubulares, paralelas aos eixos principais do sistema de coordenadas do problema. Seis vórtices colunares principais, com um par de vórtices paralelos a cada um dos eixos do cubo fundamental podem

ser identificados realizando uma análise no sistema dinâmico dado pelo campo de velocidade do escoamento

$$\frac{dx}{dt} = A\text{sen}(z) + C\cos(y) \quad (4.90)$$

$$\frac{dy}{dt} = B\text{sen}(x) + A\cos(z) \quad (4.91)$$

$$\frac{dz}{dt} = C\text{sen}(y) + B\cos(x) \quad (4.92)$$

Assumindo, por exemplo, que o escoamento é unidimensional na direção  $y$ , temos que, para maximizar o valor de  $\dot{y}$  na Eq. (4.91),  $x \simeq \frac{\pi}{2}$  e  $z \simeq 0$ . Integrando a equação para essa condição temos que

$$y \simeq (A + B)t \quad (4.93)$$

avaliando as Eqs. (4.90) e (4.92), temos que estas podem ser reescritas como

$$\frac{dx}{dt} \simeq C\cos(y) \quad (4.94)$$

$$\frac{dz}{dt} \simeq C\sin(y) \quad (4.95)$$

Avaliando a média temporal das Eqs. (4.94) e (4.95), temos que as duas são nulas e portanto, a condição  $x \simeq \frac{\pi}{2}$  e  $z \simeq 0$  mantêm-se constantes ao longo de uma linha de corrente. De maneira similar, nas outras cinco direções possíveis (avaliando tanto o sentido quanto a direção dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ ), chega-se a conclusão que um total de seis vórtices principais são obtidos no cubo periódico do escoamento ABC.

As Figs. 4.79-4.84 apresentam a mesma disposição de critérios e operadores do apresentado na seção anterior, mas avaliados para o escoamento ABC com  $A = \sqrt{3}$ ,  $B = \sqrt{2}$  e  $C = 1$ , obtidos para o cubo periódico com dimensões

$0 \leq x \leq 2\pi$ ,  $0 \leq y \leq 2\pi$  e  $0 \leq z \leq 2\pi$ . Visto que o escoamento é periódico, são avaliados somente os três planos principais em  $x = 2\pi$ ,  $y = 2\pi$  e  $z = 2\pi$ . Os critérios  $Q$ ,  $\Delta$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2}$  apresentam semelhanças na sua topologia, assim como suas versões objetivas. O critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2 + \mathbf{W}^2 + \mathbf{D}\Omega - \Omega\mathbf{D}}$  é a única versão objetiva que se mantém distante das versões objetivas  $Q_s$  e  $\Delta_s$ . O critério H, como previsto pela condição de escoamento Beltramiano, identifica o paralelismo da velocidade com a vorticidade ao longo de todo o domínio, enquanto que os operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  avaliam uma grande região que não possui autovalores imaginários para o gradiente de velocidades, assim como suas versões objetivas para o gradiente de velocidade objetivo  $(\nabla\mathbf{v} - \Omega)$ .

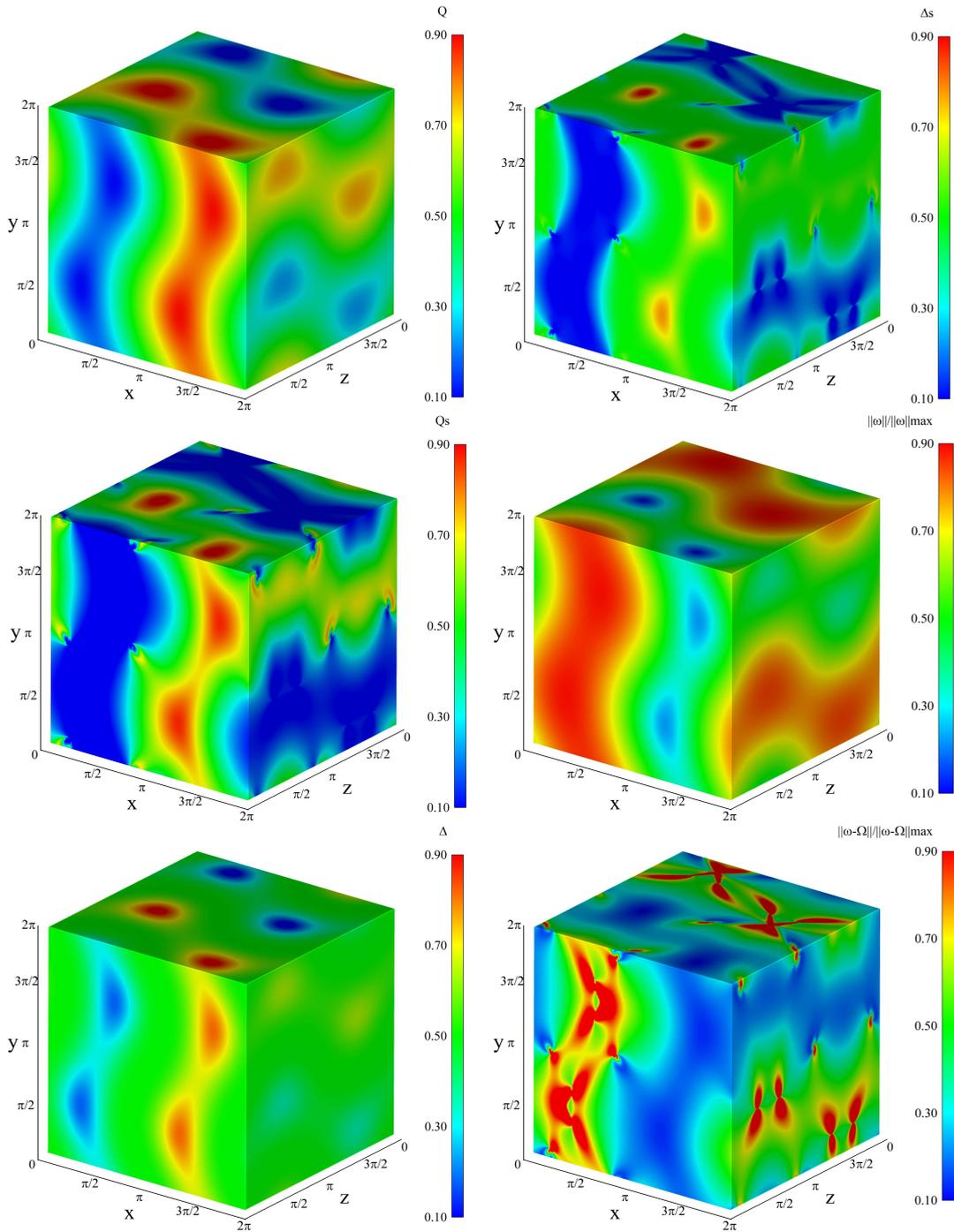


Fig. 4.79: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento ABC.

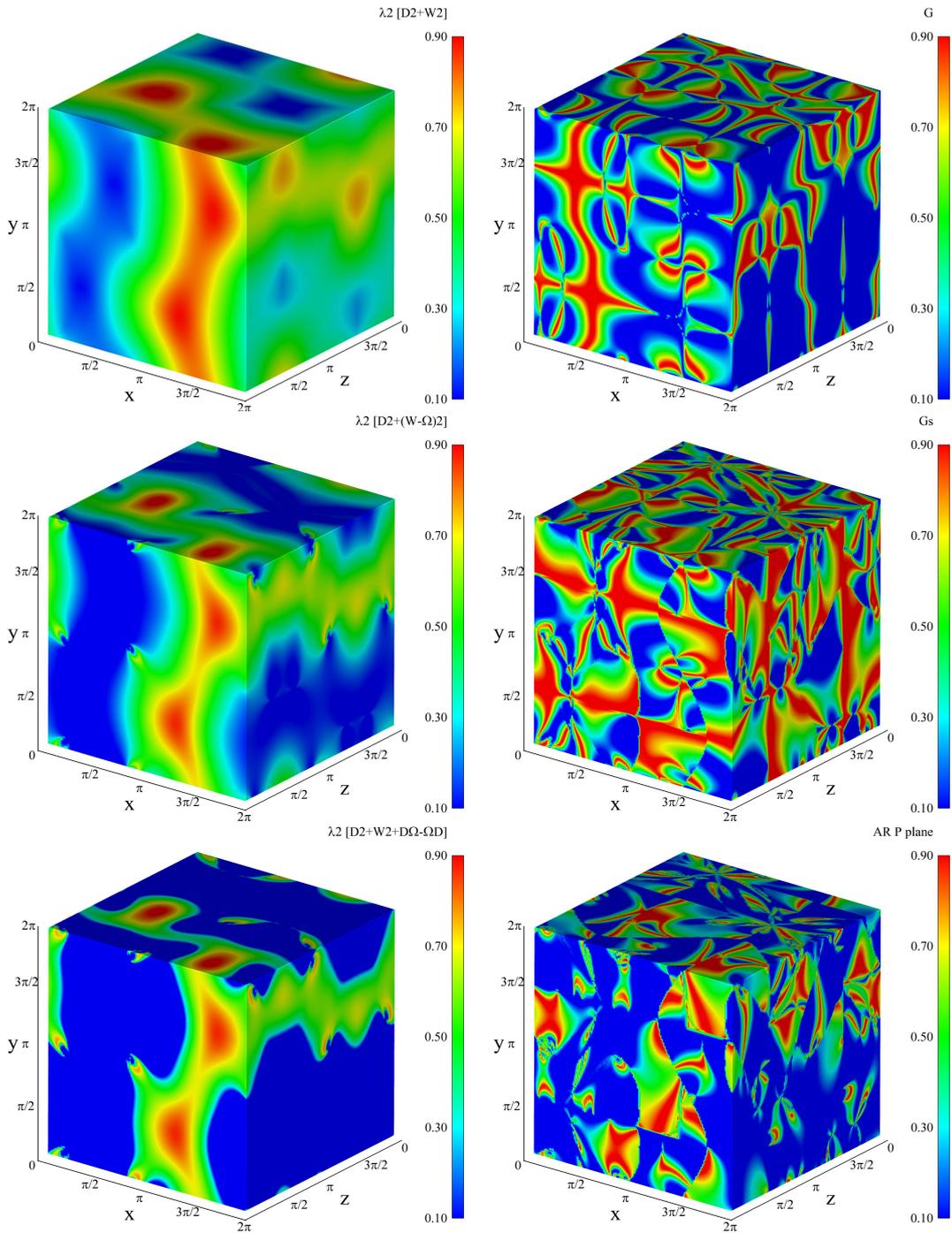


Fig. 4.80: Critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\bar{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  para o escoamento ABC.

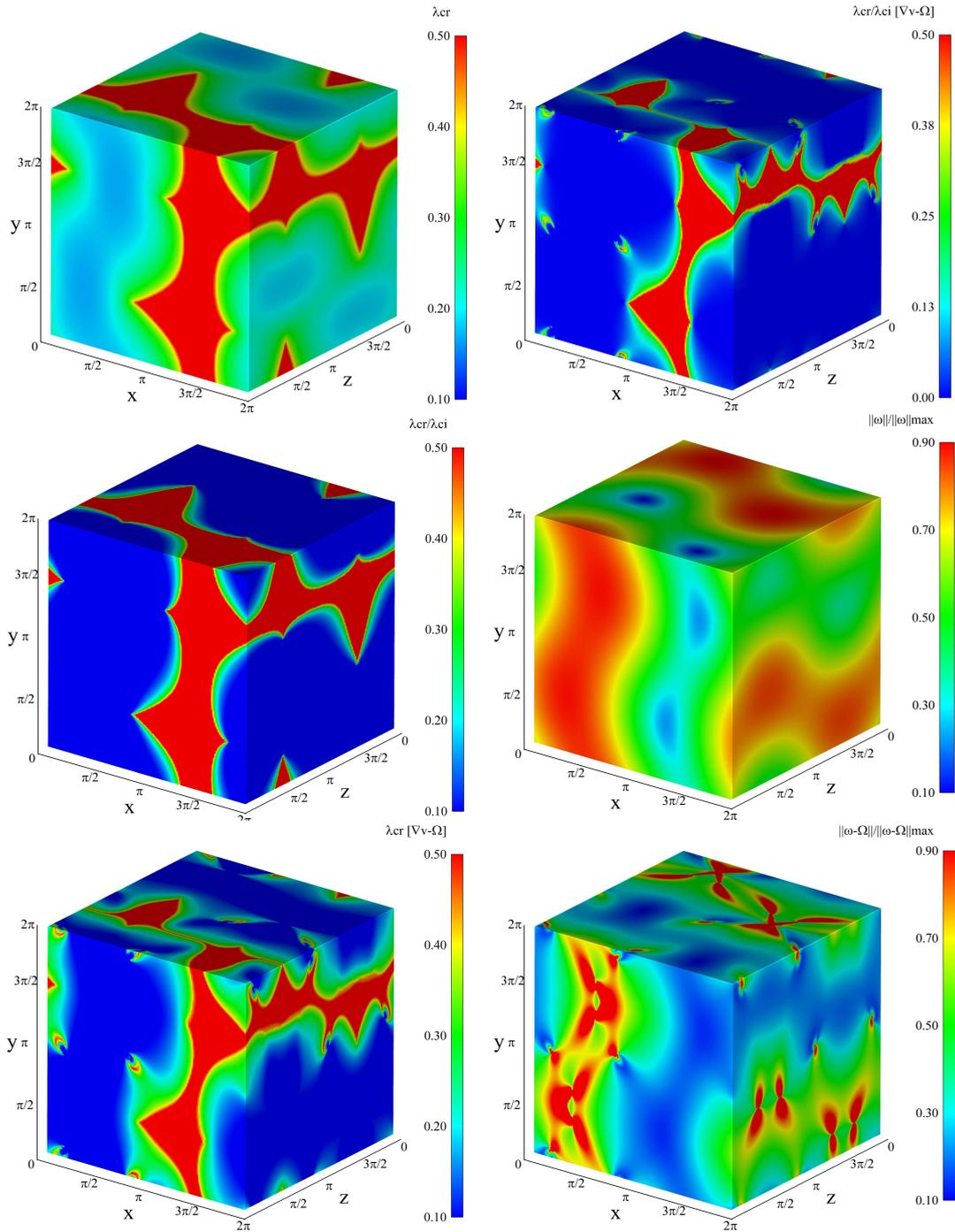


Fig. 4.81: Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla v}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento ABC.

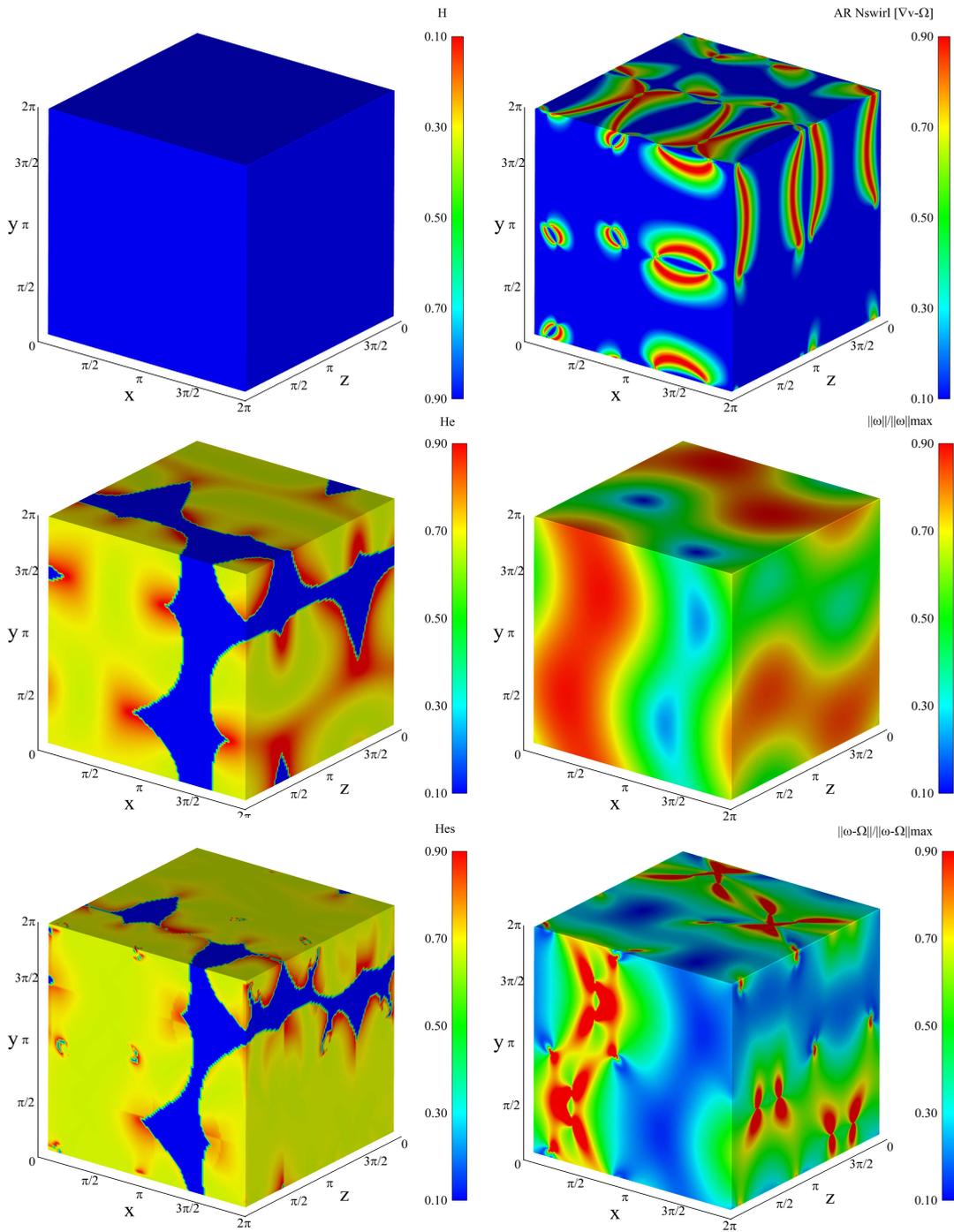


Fig. 4.82: Critérios  $H$ ,  $H_e$  e  $H_{es}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa e do operador  $AR^{nswirls}$  para o escoamento ABC.

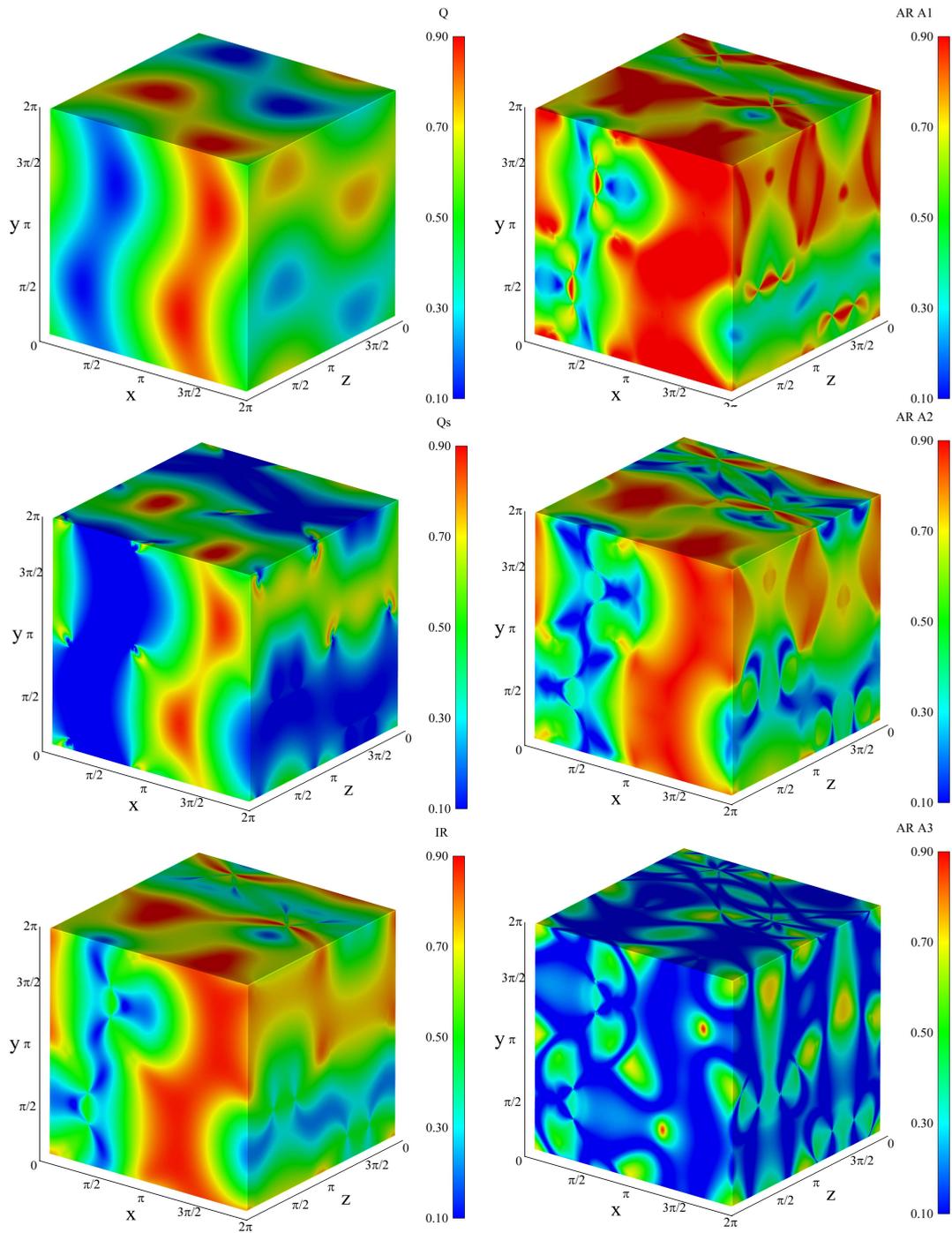


Fig. 4.83: Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento ABC.

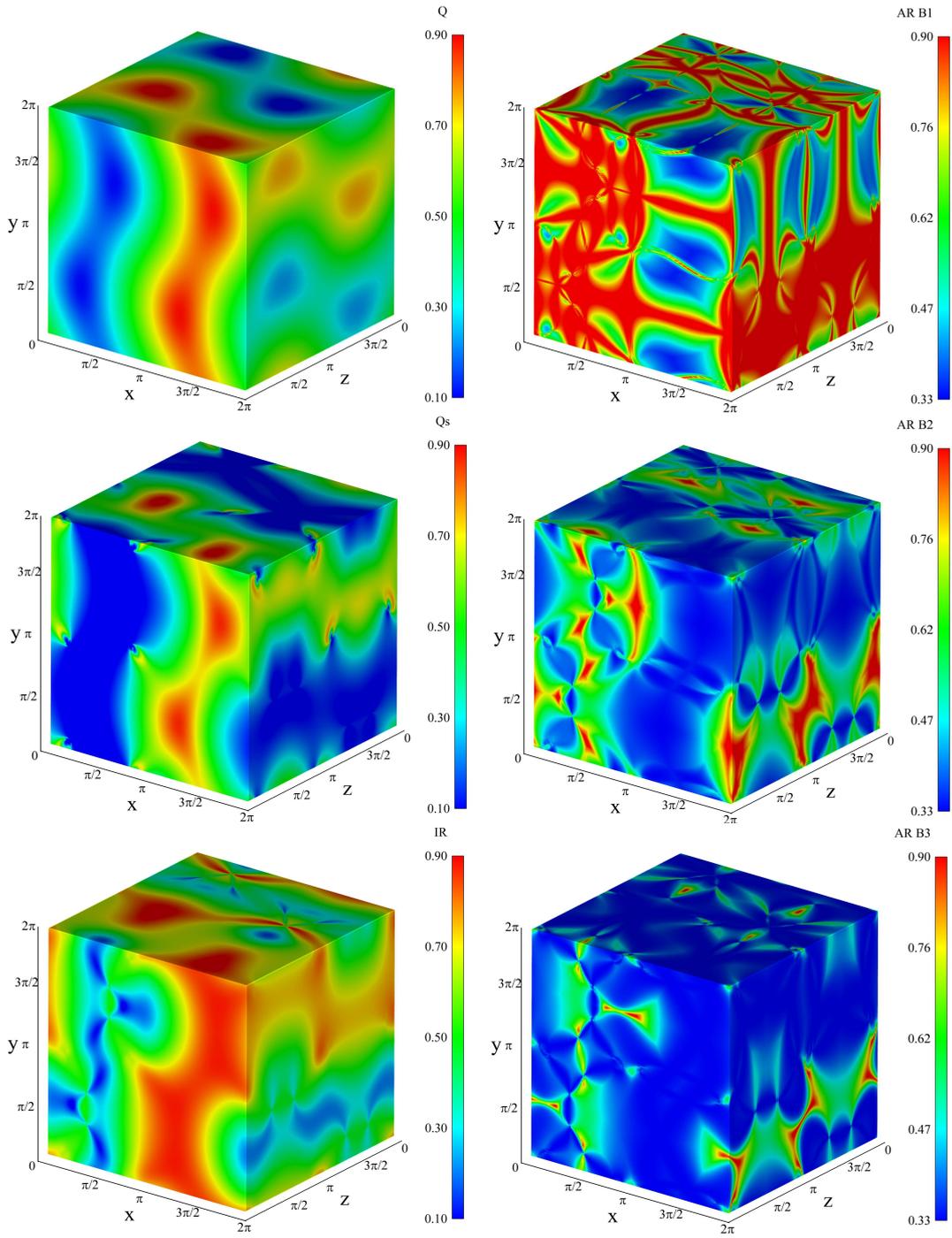


Fig. 4.84: Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento ABC.

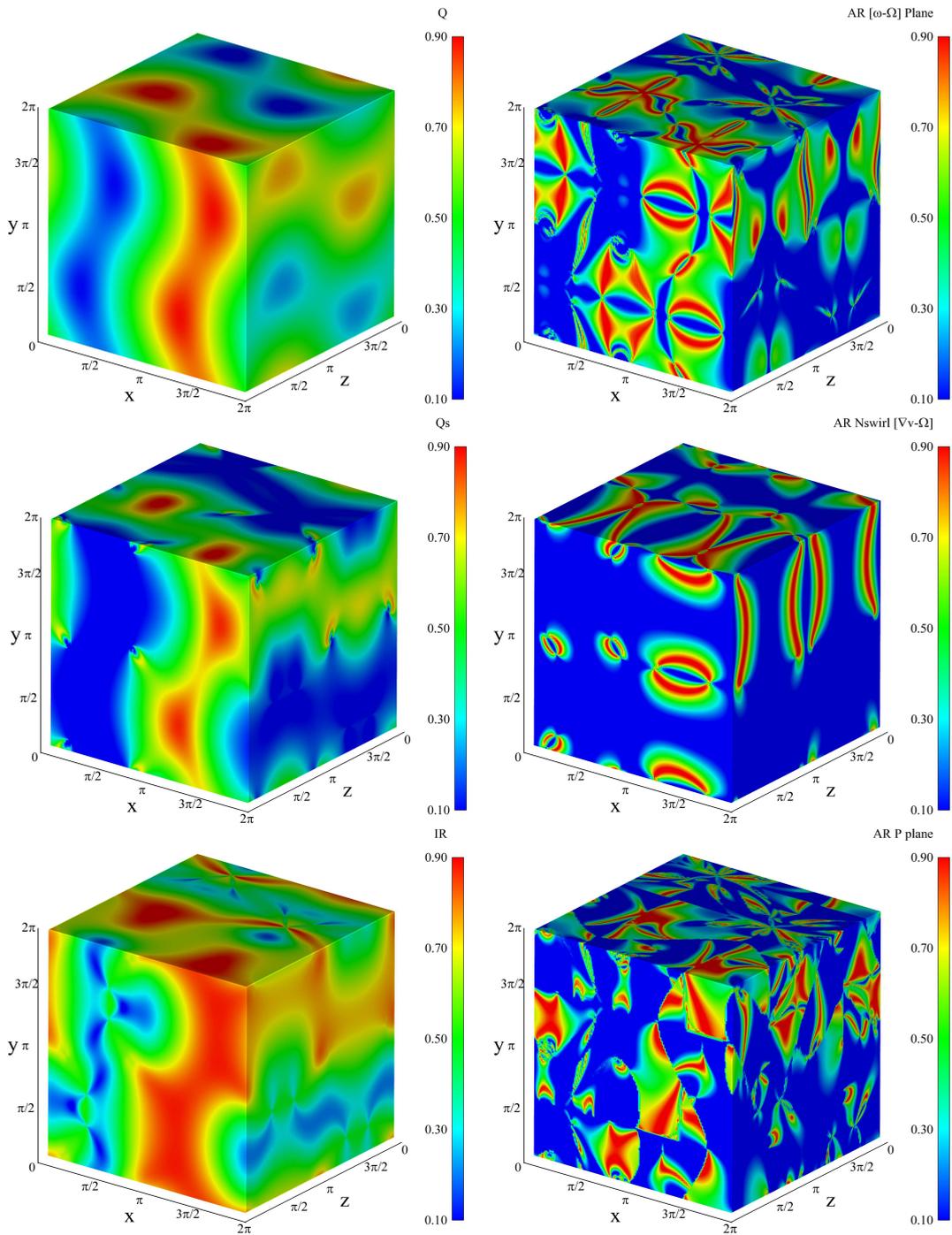


Fig. 4.85: Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{nswirls}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento ABC.

Avaliando os termos da equação de Euler com relação ao seu estado em fase ou fora de fase com o tensor  $A_1$ , como o objetivo de avaliar a influência desses termos na excitação ou amortecimento de estruturas vorticiais no escoamento, como já discutido no capítulo 3, temos que os parâmetros principais de avaliação dessas condições se encontram dispostos na Fig. 4.86. As imagens do lado esquerdo da

figura avaliam o quanto do tensor  $(\mathbf{D} - \mathbf{W})(\mathbf{D} + \mathbf{W})$  está em fase com tensor  $A_2$ , a parcela do tensor  $A_2$  representado por esse tensor e a parcela da parte do tensor  $A_2$  em fase com o tensor  $A_1$  que o tensor  $(\mathbf{D} - \mathbf{W})(\mathbf{D} + \mathbf{W})$  representa, respectivamente de cima para baixo. Do lado esquerdo da figura a mesma análise é realizada com relação à Hessiana da pressão  $\mathbf{P}$ . Pode-se observar pelas imagens da Fig. 4.86 que o tensor  $(\mathbf{D} - \mathbf{W})(\mathbf{D} + \mathbf{W})$  atua com grande parcela da parte fora de fase do tensor  $A_2$  na região vortical ao longo da direção  $y$  identificada pelos critérios  $IR$  e pelos operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $AR_{1,2,3}^B$ .

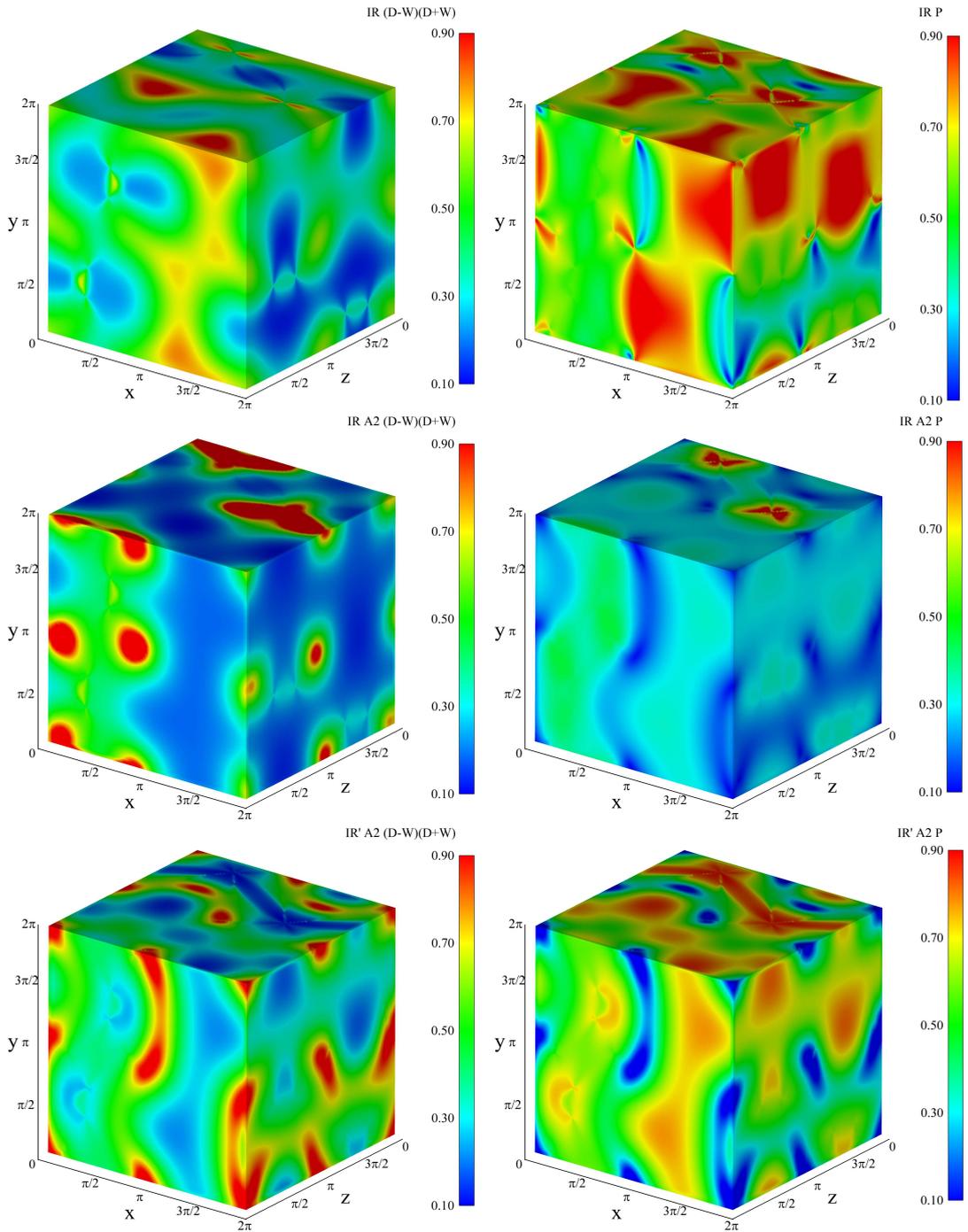


Fig. 4.86: Operadores  $IR_{(D-W)(D+W)}$ ,  $IR_P$ ,  $IR_{(D-W)(D+W)}^{A2}$ ,  $IR_P^{A2}$ ,  $IR_{(D-W)(D+W)}^{A2'}$  e  $IR_P^{A2'}$  para o escoamento ABC.

# Capítulo 5

## Turbulência e Estruturas Coerentes

A turbulência constitui um dos fenômenos mais complexos da mecânica clássica. Visto que trata-se de um sistema não-linear dinâmico de grande complexidade, um mesmo campo turbulento pode ser constituído de estruturas vorticiais com diversos tempos de rotação e tamanhos característicos, interagindo de maneira não linear uns com os outros. A geração, evolução e dissipação dessas estruturas vorticiais dominam o fenômeno da turbulência em si e, para que seja possível, o entendimento, prescrição e controle de escoamentos turbulentos, a dinâmica dessas estruturas deve ser plenamente conhecida.

Estudos clássicos de turbulência ajudaram no conhecimento da natureza estocástica da turbulência, fundamentados em análises estatísticas dos campos de variáveis de interesse em escoamento turbulentos. Entretanto, esse tipo de estudo não é capaz de determinar a correlação entre os dados estatísticos obtidos e a estrutura vortical em si, visto que a determinação da topologia do escoamento não é contemplado nesse tipo de estudo.

Técnicas de visualização de escoamentos, além de análises numéricas diretas ou mesmo modelos de turbulência que prevêem a solução de parte do espectro de energia, como o modelo de simulação das grandes escalas, são ferramentas importantes para o estudo da dinâmica de estruturas vorticiais em escoamentos turbulentos, também conhecidas como estruturas coerentes. No caso da visual-

ização de escoamentos, as técnicas que se baseiam na dispersão de traçadores, podem indicar o comportamento do escoamento e dinâmica dos vórtices por meio de uma abordagem lagrangiana e devem ser diferenciados de técnicas mais modernas como a velocimetria de imagem de partícula (PIV), assim como as soluções numéricas podem indicar campos eulerianos ou lagrangianos.

Iniciaremos este capítulo apresentando a relação entre vórtice e estruturas coerentes e discutiremos um pouco mais sobre o segundo no âmbito do escoamento turbulentos. O objetivo do presente capítulo é ressaltar a importância da dinâmica das estruturas vorticais no estudo da turbulência. Na segunda parte do capítulo serão apresentados o solver de dinâmica dos fluidos computacional utilizado nas simulações e o modelo de simulação das grandes escalas terá sua teoria descrita. Serão discutidos ainda no capítulo os escoamentos numéricos onde serão apresentados os critérios propostos e existentes, assim como as modificações aos critérios existentes, cujos resultados serão apresentados no capítulo 6.

## 5.1 Estruturas Coerentes e Vórtices

Observando o escoamento na passagem de uma grade, a uma distância relativamente grande da mesma, comprova-se o surgimento e evolução de estruturas sem qualquer organização, enquanto que na proximidade da malha, são encontradas estruturas vorticais maiores e que apresentam relativa organização. Algo semelhante acontece no escoamento em uma camada de mistura. Enquanto que as estruturas maiores apresentam maior organização, as estruturas menores apresentam movimento randômico, ainda que estas alimentem e constituam as maiores estruturas. Esse tipo de estrutura vortical organizada é conhecido como *estrutura coerente*. Sendo responsável por grande parte da transferência de energia turbulenta e domina o transporte de quantidades turbulentas. Sua topologia pode indicar o tipo de escoamento ao qual está submetido o fluido e, portanto, são de extrema importância no entendimento e modelagem da turbulência, assim como no controle de fenômenos correlatos como mistura, transferência de

calor, combustão, arrasto entre outros. A definição de estruturas coerentes no presente trabalho segue aquela indicada por Wu et al. [35]: Estruturas coerentes são grupos de estruturas vorticiais em escoamentos turbulentos que mantêm uma organização espacial e contêm concentrações relativamente grandes de energia turbulenta. Esse tipo de estrutura pode ser identificada no escoamento de maneira quasi-determinística, visto que são mais difíceis de predição quanto à sua posição espacial e temporal do que em tamanho e forma.

Alguns tópicos requerem atenção especial sobre o conceito de estruturas coerentes. Primeiro, este conceito é variável com o passar dos anos e com a experiência que foi obtida com a evolução no estudo da turbulência. Os primeiros estudos sobre o tema, relacionavam estruturas coerentes com as grandes escalas da turbulência, mas com o avanço do conhecimento sobre o fenômeno esse jargão foi perdendo força, visto que o tamanho não pode ser utilizado como um parâmetro de identificação desse tipo de estrutura e sim sua organização com respeito ao domínio do escoamento. Um exemplo desse fato se encontra nas estruturas coerentes que se formam próximas a regiões parietais e que mantêm coerência, ressaltado por um relativo grau de organização, apesar de apresentarem tamanhos relativamente pequenos se comparados com estruturas longe dessa zona. Entretanto a busca por organização na identificação de estruturas coerentes em um escoamento turbulento qualquer constitui um critério fortemente subjetivo e de difícil representação matemática.

A identificação de estruturas coerentes em escoamentos turbulentos constitui uma prática comum na apresentação e discussão de trabalhos numéricos e experimentais, pois a possibilidade de visualização da orientação dessas estruturas permite a evolução da anisotropia do escoamento, da heterogeneidade das escalas capturadas pelo experimento, além de sua descrição ao longo do domínio. O trabalho de Hussain [22] foi um dos primeiros a particularizar esse tipo de identificação a escoamentos turbulentos, descrevendo o módulo da vorticidade como parâmetro principal de descrição da topologia dessas estruturas. Outros critérios

foram utilizados na identificação de estruturas coerentes ao longo dos anos com diferentes resultados e inclusive é consideravelmente comum a presença de resultados de turbulência isotrópica em trabalhos que apresentem novos critérios. Alguns trabalhos mais antigos consideravam também os componentes das flutuações turbulentas como um critério de identificação de estruturas coerentes. Como já discutido anteriormente, os critérios de identificação de vórtices existentes atualmente apresentam diferentes problemas e portanto, não existe um critério fechado que identifique plenamente estruturas coerentes em um escoamento turbulento. Entretanto, o uso de parâmetros de identificação de vórtices para a identificação de estruturas coerentes (destacam-se nesse caso a vorticidade e os critérios  $Q$ ,  $\Delta$  e  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ) torna-se cada vez mais comum em trabalhos sobre o assunto, e a isosuperfície é uma ferramenta importante no estabelecimento da topologia dessa estrutura.

Outro tópico importante que merece atenção sobre estruturas coerentes é o fato de seu aparecimento no escoamento não ser previsível, com a exceção dos casos onde a turbulência encontra-se desenvolvida e esse tipo de estrutura é evidenciada no escoamento turbulento com relativo grau de organização, o que constitui um comportamento quasi-determinístico. Estruturas coerentes não podem ser confundidas com um trem de vórtices em um escoamento laminar: sua correlação não-linear com as menores escalas, que apresentam comportamento randômico existe e sempre irá na direção contrária ao determinismo. Estudos recentes sobre o acoplamento entre as escalas coerentes e as escalas randômicas em um escoamento turbulento mostram que uma estrutura coerente compacta pouco provavelmente é formada por uma única estrutura vortical. Devido a interação entre a estrutura vortical e a turbulência em volta da mesma, formam-se estruturas secundárias, orientadas azimutalmente, formando uma zona de turbulência intermitente formada por uma ou mais estruturas coerentes, onde a vorticidade é relativamente alta, cercada por uma região de escoamento irrotacional [32].

A escalabilidade das estruturas coerentes é um problema ainda sem uma

solução fechada, assim como a própria escalabilidade da turbulência. É comum a utilização do conceito de viscosidade turbulenta para simular o efeito difusivo da turbulência, com relação ao escoamento médio temporal. Similarmente ao caminho médio livre e a velocidade média em movimento molecular, a viscosidade turbulenta contém uma escala de velocidade e outra de comprimento. Entretanto, as estruturas coerentes apresentam diferentes tamanhos e velocidades de rotação diferentes em um mesmo escoamento. Pode-se observar em um escoamento turbulento transiente uma sucessão de quadros de campos de velocidade e dois processos se destacam: a formação e crescimento de estruturas coerentes devido a instabilidade ou ao surgimento de um grau de organização e um segundo processo de formação de estruturas coerentes gradativamente menores, formando uma cascata de estruturas, devido a interação entre as escalas coerentes e as escalas randômicas.

Devido a sua natureza não-linear, a turbulência é um fenômeno físico que apresente múltiplas escalas. A famosa lei de escalas de Kolmogorov [77] revelou que a turbulência consiste em um *continuum* de escalas que vão desde as maiores escalas, determinadas pela geometria do escoamento até as menores escalas ou escalas de dissipação de Kolmogorov. As maiores escalas geralmente são escalas coerentes, apesar do fato já apresentado anteriormente do movimento vortical não estar ligado a dimensão da estrutura vortical. As menores escalas contemplam estruturas resultantes da cascata da turbulência ou mesmo das escalas randômicas. A concepção clássica de separação de escalas como uma possibilidade hipotética, onde as escalas menores seriam estatisticamente isotrópicas em qualquer escoamento turbulento cisalhante e o acoplamento com as estruturas geometricamente maiores consequentemente seria fraca.

A *Lei Universal de Escalabilidade* [78] revela também a existência de uma multiplicidade de estruturas em escoamentos turbulentos, onde os movimentos coerentes correspondem a estruturas mais intermitentes e existe uma similaridade na topologia das estruturas que foram a cascata de estruturas em um escoamento

de camada de mistura, por exemplo. Conceitos como o de viscosidade turbulenta ou comprimento de mistura refletem, portanto, efeitos médios estatísticos em todas as escalas, o que impossibilita a identificação e distinção de estruturas coerentes devido a “filtragem” de escalas quando modelos numéricos baseados nessa hipótese são utilizados.

Algumas escalas ganham destaque no estudo da turbulência, por significarem marcos no estudo desse complexo sistema dinâmico não-linear. Destacam-se as escalas de Kolmogorov, as microescalas de Taylor, a escalas de comprimento integral, a escala de comprimento viscosa, entre outras. A escala de Kolmogorov, ou escala dissipativa,  $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ , onde  $\nu$  e  $\epsilon$  representam a viscosidade cinemática e a taxa dissipação escalar, respectivamente, representa a menor escala possível de ser encontrada em um escoamento turbulento e que encontra-se na iminência de se dissipa pelos efeitos viscosos. A microescala de Taylor,  $\lambda$ , representa o tamanho médio estatístico, das pequenas estruturas que permeiam um escoamento turbulento isotrópico. A escala integral de comprimento,  $L$  representa o tamanho característico, obtido estatisticamente, relacionada a maior estrutura coerente definida pela integração da correlação. Por fim, a escala de comprimento viscosa,  $\nu/\mu_t$ , é o comprimento característico da região predominantemente viscosa em um escoamento turbulento, próxima a região parietal.

Outros estudos propuseram diferentes escalas características em escoamentos turbulentos, relacionadas às propriedades do material, à geometria do domínio, às condições do escoamento e que apresentam diferentes tamanhos e formas. Entretanto, o caráter desse tipo de estrutura é meramente estatístico e não se pode concluir que estruturas maiores ou menores que aquelas representadas matematicamente não podem ser evidenciadas, visto que esse tipo de estudo reflete apenas comprimentos das estruturas que apresentam, na média, maior probabilidade de aparecimento em um dado escoamento turbulento. Além disso esse tipo de estudo auxilia na busca por estruturas, por estabelecer um limite máximo (escala integral) e mínimo (escala de dissipação) de comprimentos e tempos característicos

no domínio.

Diferentes tipos de escalas surgem em um escoamento que apresente uma camada cisalhante. Existem escalas globais relacionadas com a camada como um todo e escalas locais excitadas pela movimentação ou interação dessas camadas globais. Em escoamentos cisalhantes complexos, pode existir uma infinidade maior de estruturas, principalmente nas zonas de transição e nas regiões geometricamente mais detalhadas. Escalas globais, escalas locais em diferentes zonas cisalhantes, escalas de transição entre zonas cisalhantes, escalas médias locais para cada zona cisalhante são algumas possibilidades nesse tipo de escoamento turbulento. Em geral, cada escala é relacionada com seu próprio mecanismo de estabilidade e de produção de estruturas coerentes, o que constitui um desafio a identificação, visualização e classificação desse tipo de estrutura por um critério matemático exato.

### 5.1.1 Estruturas Coerentes e Ondas

No estudo da turbulência, o conceito de vórtices está diretamente relacionado com o estudo de ondas. Dois pontos importantes devem ser considerados nessa relação: dois tipos de ondas são passíveis de serem encontrados em um escoamento. Um primeiro grupo é formado pelas ondas cuja energia se propaga na direção longitudinal, provocadas no movimento de expansão do escoamento. O segundo subconjunto, conhecido como ondas transversais ou ondas de vorticidade, é tal que a energia é propagada por tensões de cisalhamento.

A vorticidade pode ser, portanto, transportada pela movimentação de estruturas vorticiais ou por ondas de vorticidade. A primeira é diretamente relacionada a transporte de massa, enquanto a onda de vorticidade trata de uma transferência de quantidade de movimento angular. A vorticidade distribuída em um escoamento cisalhante pode ser propagada e acumulada por alguns mecanismos geradores de instabilidades (Wu et al.[35], p. 524). Enquanto essas ondas forem geradas por instabilidades ocorrerá, de maneira geral, concentração de vortici-

dade. Quando uma única estrutura vortical se movimenta no domínio ocorrerá uma transição de um estado de vorticidade contínua (ou mesmo nula, se o escoamento for irrotacional) para um estado de vorticidade concentrada.

Em um escoamento turbulento, o crescimento de ondas de instabilidade e movimentação de estruturas vorticais ocorre em quase todo o domínio e em todo o tempo de análise, assim como formação de cascatas de estruturas que também é um fenômeno de transporte de vorticidade. Portanto, nesse tipo de escoamento, as ondas de vorticidade coexistem com transporte de vorticidade por meio de movimentação de estruturas vorticais, o que ressalta a importância da identificação de vórtices, visto que a separação desses efeitos, sem o conhecimento prévio da localização desse tipo de estrutura é mais complexa. Uma consequência do transporte de vorticidade, e que justifica o caráter não-linear do escoamento, é que a movimentação das estruturas vorticais existentes provoca a formação de regiões de alto grau de cisalhamento, abrindo espaço para a formação de novas ondas de instabilidades que provocarão a formação de novas estruturas vorticais. Além disso, as próprias estruturas vorticais formadas em um escoamento turbulento podem ser dispositivos de transporte de ondas [32].

Outro ponto de grande importância na relação entre estruturas coerentes e ondas e que ganha relevância dentro do contexto do presente trabalho é a questão do observador e sua influência nessa relação. Suponha um trem de vórtices colunares longitudinais, movendo-se por interação com um escoamento uniforme bidimensional. Avaliando o fenômeno em um seção transversal, para um observador se movendo a velocidade constante, igual ao módulo da velocidade do escoamento uniforme, temos que o mesmo evidencia que o campo de vorticidade é permanente, assim como o escoamento uniforme. Para um observador estático disposto logo à frente desse trem de vórtices, durante a passagem desse trem de ondas pode evidenciar sinais periódicos de velocidade induzidos por esses vórtices e a frequência desse sinal é dado pela velocidade do escoamento uniforme e pelo diâmetro desse vórtice colunar.

Um fenômeno semelhante pode ocorrer com estruturas que caminhem em escoamento mais complexos. Um exemplo é no caso de intermitência na fronteira de uma camada limite turbulenta ou mesmo na zona de esteira em um escoamento ao redor de um cilindro, onde pode se observar também a intermitência não só com o componente da velocidade no plano transversal a esse escoamento como também do componente normal, fato evidenciado pela forte mudança de direção do vetor vorticidade nessa região. Um observador que apresente aceleração frente ao observador estacionário nesse caso e que avalie necessariamente a vorticidade, poderá observar uma grande faixa de vorticidade elevada, sem diferenciar individualmente os vórtices formadores desse trem. Esse fenômeno é bastante observado pelos critérios identificadores de vórtices aplicadores em escoamentos turbulentos de evidenciar somente grandes estruturas onde na verdade existe uma cascata de estruturas coerentes. Desse fato vem o motivo desse tipo de escoamento apresentar tanta dificuldade na identificação das estruturas coerentes existentes ao longo de seu domínio.

### 5.1.2 Dois Processos Fundamentais em Turbulência

Seja em camadas de cisalhamento livre ou em escoamentos cisalhantes parietais, a formação e desenvolvimento de estruturas vorticais em escoamentos turbulentos acontece principalmente por dois processos. O primeiro se inicia a partir de um processo laminar local ou a partir da geração de randômica de turbulência. Nessa situação, perturbações encontram-se em crescimento e iniciam o processo de formação de estruturas vorticais com comprimento característico relativamente maior. O segundo processo constitui uma evolução estrutural no sentido inverso, também conhecido como cascata turbulenta. Estruturas relativamente grandes vão se tornando cada vez menores devido às interações vorticais e gradualmente vão transferindo energia para as escalas randômicas para que, com a evolução da cascata, seja então dissipada por meio de outros mecanismos, como transferência de calor ou acústica.

### 5.1.2.1 Produção Coerente

Este processo de geração e manutenção da turbulência em um escoamento é tal que mesmo um escoamento inicialmente turbulento não consegue se manter sem a sua existência, por exemplo no caso de um escoamento na passagem por uma grade, cujas estruturas vorticais na sua esteira se dissipam após alguns comprimentos característicos. Esse processo é também responsável pela formação do caráter anisotrópico do escoamento e pela produção de estruturas coerentes com diferentes tamanhos e orientações em um escoamento turbulento. Esse processo transfere energia da zona média para a zona coerente, através da formação de instabilidades e das escalas randômicas para as escalas coerentes, processo conhecido como transferência intermodal negativa.

O mecanismo de estabilidade domina a produção de estruturas coerentes. Em um escoamento de camada de mistura ocorrem instabilidades de Kelvin-Helmholtz e a formação de vórtices longitudinais, além de instabilidades sub-harmônicas e o processo de emparelhamento entre outros. Em um escoamento de camada limite ocorre a formação de instabilidade de Tollmien–Schlichting, a instabilidade de inflexão local, além da formação de estruturas em grampo de cabelo e etc. Esses tipos de instabilidades tem seu processo de formação geralmente provenientes de um passado laminar ou localmente laminar com vorticidade média distribuída e desenvolvidas em vórtices organizados. Entretanto existem casos em que essas instabilidade advêm de um passado turbulento, por exemplo, em um campo cisalhante médio onde encontram-se disseminadas pequenas estruturas coerentes.

A teoria de estabilidade linear vem apresentando relativa aceitação, mesmo que, em um escoamento dito laminar, possa ser evidenciado movimento randômico molecular, pois os comprimentos característicos desse movimento são muito pequenos quando comparados com os comprimentos de onda das ondas de instabilidade e, portanto, pode se estabelecer a independência desse último movimento com o movimento molecular. Essa independência garante a validade de todas as

equações que regem a mecânica do contínuo, incluindo a teoria de estabilidade hidrodinâmica. A influência das moléculas que constituem o material nessas equações se restringe a viscosidade molecular que, para materiais newtonianos, trata-se de um parâmetro escalar estatístico médio-temporal que não contabiliza a influência do movimento randômico molecular. Em um escoamento turbulento, se os comprimento de onda das ondas de instabilidade forem muito maiores que os comprimentos característicos das escalas de maior relevância no domínio, e se essas estruturas se orientam isotropicamente então a situação é semelhante ao caso laminar. As ondas de instabilidade coerente podem ser consideradas independentes dos detalhes do movimento transiente das menores escalas turbulentas. Em particular, é possível afirmar que o campo de velocidade médio de uma camada de mistura sofre a influência de uma instabilidade invíscidas. Portanto, o mecanismo de instabilidade, segundo a lei de estabilidade hidrodinâmica é independente da movimentação molecular e, particularizando para um escoamento turbulento, independente da movimentação das menores escalas. Assim, nem a viscosidade molecular, nem a viscosidade turbulenta afetam o mecanismo de instabilidade invíscidas.

A análise de instabilidade linear se mostrou eficaz na predição as frequências de maior amplitude e as taxas de amplificação das maiores estruturas vorticais obtidas no escoamento de uma camada de mistura excitada externamente nos trabalhos de Oster e Wygnanski [79] e Monkewitz e Huerre [80]. Entretanto, a aplicação da teoria de instabilidade em turbulência é limitada. Se as escalas das estruturas coerentes de interesse são próximas às escalas de maior aparecimento no domínio, as ondas de instabilidade não são mais independentes do mecanismo de formação da turbulência no escoamento e a similaridade com escoamentos laminares perde sentido. Mesmo em escoamentos laminares, a adição de polímeros ao escoamento pode causar uma grande influência no mecanismo de instabilidade devido ao crescimento da relevância do movimento molecular, que têm influência direta sobre a viscosidade molecular, que agora depende de parâmetros reológicos

locais e não pode mais ser representada a partir de uma valor médio estatístico do material.

### 5.1.2.2 Cascata Turbulenta

Trata-se de um processo de geração de entropia, incluindo transferência de energia intermodal em cascata e por dissipação. O processo de cascata em turbulência envolve complexas operações interativas de deformação e movimento de estruturas vorticais [35]. Entretanto, a tendência de cascadeamento em um escoamento turbulento pode ser explicada a partir da Fig. 5.1. Suponha que um escoamento turbulento encontra-se preenchido por diversas estruturas vorticais. Se um filamento de vórtice orientado com o eixo  $x$  encontra-se estirado por ação de estruturas vorticais no seu entorno, este tenderá a diminuir seu diâmetro e a girar com velocidades cada vez maiores, o que induz um aumento de velocidade local nas direções  $y$  e  $z$ . Esse fato aumenta o gradiente de velocidades e causa estiramento dos vórtices na periferia nessas direções. Conseqüentemente, esses vórtices na periferia tendem a diminuir de tamanho e a girar com maior velocidade angular. Este processo tenderá a continuar e a diminuir os diâmetros dos vórtices em uma determinada região. Assim, a energia turbulenta irá gradualmente sendo transferida para escalas cada vez menores.

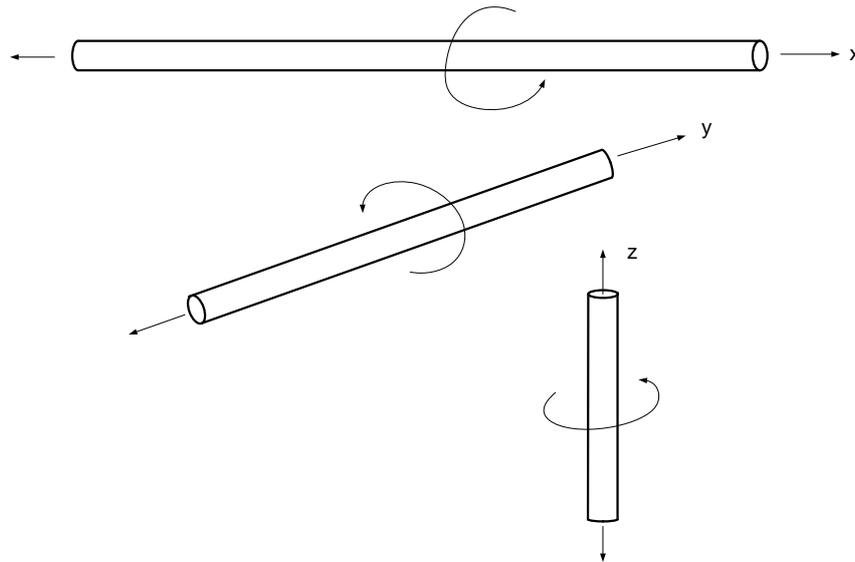


Fig. 5.1: Diagrama esquemático do processo de cascata turbulenta. Baseado em [19]

É possível notar que tal processo ocorre, em um primeiro momento, em todas as direções de tal forma que o processo de cascata, após alguns passos em um escoamento turbulento, tenderá a homogeneizar as estruturas vorticiais, fato que ressalta o caráter isotrópico do processo. De fato, esse processo ocorre em todos os tipos de escoamentos cisalhantes e o produto final do mesmo, as escalas randômicas, são praticamente as mesmas.

Em um escoamento cisalhante real, as maiores escalas podem ser relacionadas com a produção de estruturas coerentes. Portanto, existe, freqüentemente, um intervalo de escalas que se encontra no chamado *intervalo inercial*, onde nenhuma energia é adicionada pelo escoamento médio e nem retirada por dissipação viscosa, de tal forma que o fluxo de energia em cada número de onda é constante e a cascata de energia é dita conservativa [81]. Se, em um determinado escoamento turbulento, não houver influência significativa do processo de produção coerente, tanto o espectro de Kolmogorov quanto a *lei de escalabilidade de She* [78] podem descrever a cascata turbulenta com relativa precisão.

A cascata turbulenta não é capaz de continuar o processo indefinidamente. O processo de estiramento, afilamento e aumento da rotação dos vórtices causa o

aumento da taxa de dissipação devido ao efeito da viscosidade molecular. Escalas que tenderem a diminuir seu tamanho para valores abaixo da escala dissipativa ou escala de Kolmogorov serão completamente dissipadas e sua energia transferida para movimento molecular, energia térmica, não podendo ser mantida em nenhum campo turbulento.

A escala dissipativa pode ser obtida diretamente a partir de análise dimensional. Observações em experimentos indicam que a escala dissipativa  $\eta$  depende da taxa de dissipação  $\epsilon$  e da viscosidade cinemática  $\nu$ . Então é possível escrever, em termos dimensionais (representados por [ ]),  $[\eta] = [\nu]^m[\epsilon]^n$ , onde  $[\nu] = L^2T^{-1}$ ;  $[\eta] = L$ ;  $[\epsilon] = L^2T^{-3}$ . Essa análise resulta em  $m = 3/4$  e  $n = -1/4$  e, portanto,

$$[\eta] = [\nu]^{3/4}[\epsilon]^{-1/4}, \quad \eta = k (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \quad (5.1)$$

resultando na escala de Kolmogorov, para  $k = 1$ . Para um determinado valor de  $\epsilon$ , valores pequenos de  $\nu$  tendem a diminuir a escala de dissipação, resultando no fato de que vórtices menores podem sobreviver sem serem completamente dissipados no domínio para valores maiores de número de Reynolds. Por exemplo, em regimes de altos valores de número de Reynolds em escoamentos de camada limite, a ordem de  $\eta$  pode ser tão pequena quanto dezenas de microns e as escalas de tempo correspondentes na ordem de microsegundos. Esse é um dos motivos da simulação numérica direta ainda se encontrar restrita a simulações a baixos números de Reynolds.

## 5.2 Modelagem da Turbulência

No estudo da turbulência, assim como em outros campos da ciência, um dos grandes objetivos dos trabalhos existentes é obter soluções analíticas para os campos turbulentos, e, em um sentido mais geral, o fechamento de uma teoria quantitativa a cerca do tema. Entretanto, como também no caso do estudo da turbulência quando não existem ferramentas matemáticas suficientes para a

obtenção de tal solução, a descrição do fenômeno a partir de modelos obtidos por meio de hipóteses simplificadoras torna-se uma opção interessante. A grande dificuldade de obtenção de uma solução analítica em um escoamento turbulento encontra-se justamente nas manifestações do fenômeno e na complexidade do sistema de equações que regem o problema real. No caso de um escoamento de um fluido Newtoniano com propriedades constantes, a solução completa das equações de Navier-Stokes é necessária, visto que a simplificação das mesmas com hipótese da presença de simetrias e/ou periodicidades falha ao descrever o fenômenos, principalmente se for levado em consideração o caráter randômico das menores estruturas vorticiais que permeiam o escoamento. Outro termo que encontra grande dificuldade em ser representado é o gradiente de pressão que, quando expressado em termos da velocidade, é tanto não-linear quanto não-local.

Ao longo dos anos, diversos modelos para descrição da turbulência e fenômenos correlatos foram propostos. Na abordagem numérica direta o número de graus de liberdade necessário para a descrição de todo o espectro de energia, que engloba desde as maiores escalas até de dissipação de Kolmogorov é da ordem de  $Re_l^{\frac{9}{4}}$  para escoamento tridimensionais, como visto anteriormente nesse capítulo. Em soluções bidimensionais, esse valor chega a ordem de  $Re_l^2$ . A evolução da capacidade de processamento dos computadores nas últimas décadas possibilitou o gradativo aumento do número de Reynolds dos problemas analisados com a abordagem direta, mas ainda é desafio sua aplicação em escoamentos industriais.

As abordagens mais utilizadas na modelagem da turbulência são os modelos baseados nas chamadas *Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations*, visto que eles envolvem a solução das equações de Navier-Stokes para determinar o campo médio temporal  $\bar{\mathbf{v}}$ , onde  $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$ . As equações instantâneas são desmembradas de acordo com a relação anterior e a presença dos termos de média transiente do produto das flutuações,  $v'_i$ , chamados de tensor das tensões de Reynolds, constitui um problema de fechamento dessas equações. Para resolver esse problema algumas abordagens são utilizadas: aquelas mais simples, agrupam o tensor de

Reynolds com o termo difusivo da equação de N-S, incluindo um termo de viscosidade turbulenta a viscosidade cinemática previamente existente e que depende do material e suas condições. Existem ainda modelos que representam a viscosidade turbulenta a partir de duas ou mais variáveis de campo que são determinadas por equações de transporte próprias, como os consagrados modelos  $k - \epsilon$  e  $k - \omega$ . Finalmente, existem modelos que utilizam uma equação de transporte para cada um dos termos do tensor de Reynolds, constituindo um modelo que requer um esforço computacional maior para ser resolvido, mas que obtêm relativo grau de precisão, principalmente em escoamentos fortemente anisotrópicos se comparados com os modelos baseados em viscosidade turbulenta.

Os modelos baseados no tensor de Reynolds não conseguem descrever corretamente a distribuição de estruturas coerentes no domínio, pois essas estruturas giram em tempos característicos diferentes e um filtro temporal que avalie a média pode não evidenciar essas estruturas se seu tempo de vida for pequeno no domínio. Visto que grande parte dos cientistas e engenheiros estão interessados na descrição do comportamento das grandes escalas no escoamento, devido a sua maior participação na transferência de momentum e demais quantidades igualmente afetadas pela turbulência, a abordagem numérica direta pode ser substituída pelo modelo de simulação das grandes escalas (LES - *Large Eddy Simulation*), uma abordagem consagrada na descrição da evolução das escalas coerentes do escoamento maiores que o tamanho característico da discretização espacial (malha numérica), e que vem sendo cada vez mais utilizada em uma grande parcela dos trabalhos que se propõe a introduzir novos critérios de identificação de estruturas coerentes ou mesmo estudar os critérios existentes. Seu custo computacional é relativamente alto se comparada com os modelos RANS, mas consideravelmente baixo se comparado com a abordagem DNS e o espectro de escalas resolvidas pelo modelo é suficiente para identificação da heterogeneidade de estruturas coerentes e da anisotropia do escoamento em uma gama cada vez maior de escoamento, além de alguns poucos casos de interesse direto da indústria. Visto que nesse modelo

o filtro realizado é espacial, filtrando as menores escalas, alguns fenômenos de formação e orientação de estruturas coerentes podem ser descritos sem maiores problemas, como o processo de cascadeamento turbulento.

No presente trabalho será abordado somente a simulação das grandes escalas, visto que trata-se do modelo utilizado em alguns dos resultados numéricos que serão introduzidos nesse capítulo, mas cujos resultados da implementação de alguns dos critérios estudados encontram-se dispostos no capítulo 6.

### 5.2.1 Simulação das Grandes Escalas

No modelo de simulação das grandes escalas, as variáveis de campo resolvidas a partir das equações de transporte envolvidas no escoamento podem ser desmembradas em dois termos de grande relevância ao modelo de acordo com a relação

$$f = \bar{f} + f' \quad (5.2)$$

A parte  $\bar{f}$  corresponde à parcela da função  $f$  correspondente às escalas de turbulência maiores que o tamanho de malha do problema numérico. Supondo a existência de uma malha formada por elementos cúbicos uniformes de tamanho  $\bar{\Delta}x$ , a operação de filtragem da função  $f$  que obtêm  $\bar{f}$  é descrita a partir da relação

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{y}, t) \bar{G}_{\bar{\Delta}x}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \bar{G}_{\bar{\Delta}x}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (5.3)$$

Onde  $\bar{G}_{\bar{\Delta}x}$  é a função de filtragem. A parcela  $f'$  da Eq. (5.2) corresponde às escalas de  $f$  cujo comprimento característico é menor do que  $\bar{\Delta}x$ . Esse tipo de função é comumente conhecido como campo de escala sub-malha. É importante ressaltar que, diferente dos modelos baseados na hipótese de Reynolds, onde os campos instantâneos são separados em uma parte relacionada à média temporal e uma segunda relacionada às flutuações transientes em torno da primeira parte,

no modelo de simulação das grandes escalas, essa separação é realizada espacialmente. Uma consequência desse fato é que a abordagem de simulação das grandes escalas permite a captura de efeitos de alta frequência mais facilmente que os modelos RANS. Diversas funções de filtragem foram propostas ao longo dos anos, mas três ganham relativo destaque pela extensiva utilização em diversos trabalhos: o filtro de passo baixo, o filtro caixa e o filtro Gaussiano. Suas equações constitutivas se encontram dispostas nas Eqs. (5.4)-(5.6), respectivamente.

$$\bar{G}_{\bar{\Delta}x}(x) := \sum_{j=1}^d \frac{\sin \frac{2\pi x_j}{\bar{\Delta}x}}{\pi x_j} \quad (5.4)$$

$$\bar{G}_{\bar{\Delta}x}(x) := \begin{cases} \frac{1}{\bar{\Delta}x^3} & \text{if } \|x_j\| \leq \frac{\bar{\Delta}x}{2} \quad \forall 1 \leq j \leq d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\bar{G}_{\bar{\Delta}x}(x) := \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{3/2} \frac{1}{\bar{\Delta}x^3} \exp\left(\frac{-\gamma\|\mathbf{x}\|^2}{\bar{\Delta}x^2}\right) \quad (5.6)$$

Nas Eqs. (5.4)-(5.6),  $\gamma$  representa o parâmetro de forma e  $d$  a dimensão do domínio em  $\mathbb{R}^d$ . Considerando as equações de Navier-Stokes sem a presença do termo referente à força gravitacional, em notação indicial

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right\} \quad (5.7)$$

Aplicando o filtro (5.4), podemos reescrever a Eq. (5.7)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + B_{ij} \right\} \quad (5.8)$$

onde  $B_{ij}$  é o tensor de escala submalha e pode ser escrito de acordo com a relação

$$B_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{u_i u_j} \quad (5.9)$$

Expandindo a segunda parte do lado direito da Eq. (5.9) chegamos a relação

$$B_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - (\overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \bar{u}_j}) - \overline{u'_i u'_j} \quad (5.10)$$

Na Eq. (5.10), o segundo termo do lado direito da equação representa o *tensor de Léonard*, enquanto que o termo entre parênteses representa o *tensor cruzado* e o último termo representa o *tensor de Reynolds de escalas submalha*. O tensor de Léonard pode ser obtido explicitamente a partir dos campos filtrados, enquanto que, nos outros termos esse fato não é possível. O tensor  $B_{ij}$ , diferente do tensor de Reynolds não possui somente termos do tipo  $\overline{u'_i u'_j}$ , visto que no modelo LES a filtragem não é idempotente, ou seja,  $\bar{\bar{f}} \neq \bar{f}$ . No modelo LES, as equações de Navier-Stokes são resolvidas para o campo filtrado e o termo referente às escalas submalha é desconhecido *a priori*. O desafio da modelagem das escalas submalha é representar essas escalas como funções dos termos referentes aos campos filtrados, somado a necessidade de termos que permitam a transferência de energia cinética das escalas submalha para as escalas filtradas. Esse tipo de problema é comumente conhecido como um problema de homogenização, onde as equações que regem um determinado meio são conhecidas em um nível microscópico e são buscadas leis de evolução em um nível macroscópico [74]. Nesse caso, os níveis micro e macroscópico referem-se, naturalmente, a menor escala possível de se aplicar a equação de Navier-Stokes e aos campos filtrados, respectivamente.

Uma abordagem bastante utilizada na modelagem de escalas submalha é aplicação da *hipótese de Boussinesq* e representar o tensor de escalas submalha como uma função da viscosidade turbulenta,  $\nu_t$ , de acordo com a relação

$$B_{ij} = 2\nu_t \bar{D}_{ij} + \frac{1}{3} B_{ll} \delta_{ij} \quad (5.11)$$

Onde  $\bar{D}_{ij}$  é o tensor taxa de deformação dos campos filtrados,  $B_{ll}$  é o traço do tensor de escalas submalha e  $\delta_{ij}$  é a função delta de Kronecker. A equação de momentum (5.7) pode ser reescrita então na forma

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \{(\nu + \nu_t) \bar{D}_{ij}\} \quad (5.12)$$

Onde  $\bar{P} = \bar{p} - (1/3)\rho B_{ll}$  é a pressão modificada que será determinada a partir da equação da continuidade em um solver de CFD, a partir do divergente da Eq. (5.12). Essa abordagem permite que a pressão sofra influência da variação espacial da viscosidade turbulenta  $\nu_t$ . A equação da energia em termos da temperatura, sem a presença de efeitos de radiação pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (T u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (5.13)$$

Onde  $\kappa$  representa a difusividade molecular. Aplicando o filtro  $\bar{G}_{\Delta x}$  na equação anterior, chega-se a forma

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{T} \bar{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \kappa \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \bar{T} \bar{u}_j - \overline{T u_j} \right) \quad (5.14)$$

Para a equação de energia, a hipótese de Boussinesq pode ser representada na forma

$$\bar{T} \bar{u}_j - \overline{T u_j} = \kappa_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad (5.15)$$

Onde  $\kappa_t$  representa a diffusividade turbulenta. A Eq. (5.14) pode ser então finalmente reescrita na forma

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{T} \bar{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\kappa + \kappa_t) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) \quad (5.16)$$

As Eqs. (5.12) e (5.16) podem ser generalizadas para a equação de Navier-Stokes através da aproximação de Boussinesq para um fluido de densidade estratificada seguindo alguns passos: adicionando um termo referente à gravidade,  $(\rho/\rho_0 \mathbf{g})$ ,  $p$  sendo a pressão estática e  $\rho$  a densidade total que satisfaz a Eq. (5.16), trocando  $T$  por  $\rho$ . Aplicando o filtro  $\bar{G}_{\Delta x}$ , e introduzindo os coeficientes turbulentos, chega-se a as equações generalizadas do modelo de simulação das grandes

escalas com a hipótese de Boussinesq com o termo  $(\bar{\rho}/\rho_0\mathbf{g})$  na Eq. (5.12).

Para problemas compressíveis, é comum a aplicação da hipótese de que as menores escalas são incompressíveis e, portanto, as equações de Navier-Stokes para um fluido compressível, filtradas pela função  $\bar{G}_{\bar{\Delta}x}$  tem seu termos de viscosidade molecular,  $\mu = \rho\nu$ , trocada por  $\mu + \bar{\rho}\nu_t$ . A condutividade molecular  $\rho c_p \kappa = c_p \mu P_r^{-1}$  é trocada por  $c_p(\mu P_r^{-1} + \bar{\rho}\nu_t P_r^t)$ , onde  $P_r$  representa o número de Prandtl molecular e  $P_r^t$ , o número de Prandtl turbulento

$$P_r^t = \frac{\nu_t}{\kappa_t} \quad (5.17)$$

O problema nessa etapa de solução é determinação da viscosidade turbulenta  $\nu_t$ . O modelo mais utilizado para a representação dessa viscosidade turbulenta foi proposta por Smagorinsky [82]. No trabalho em questão, o objetivo era propor um modelo de duas camadas quasi-geostrófico para representar movimentos atmosféricos de grande escala. Smagorinsky introduziu um modelo de viscosidade turbulenta supostamente capaz de representar turbulência tridimensional que segue uma cascata turbulenta de Kolmogorov como uma potência  $k^{-5/3}$  nas escalas submalha.

No modelo de Smagorinsky, assume-se uma hipótese de comprimento de mistura, na qual a viscosidade turbulenta é proporcional ao comprimento característico da escala submalha  $\bar{\Delta}x$ , e a uma velocidade característica turbulenta  $v_{\bar{\Delta}x} = \bar{\Delta}x\|\bar{\mathbf{D}}\|$ . Portanto, o modelo pode ser escrito na forma

$$\nu_t = (C_s \bar{\Delta}x)^2 \|\bar{\mathbf{D}}\| \quad (5.18)$$

Em 1987, Lilly chegou a seguinte relação para a constante de Smagorinsky,  $C_s$

$$C_s \approx \frac{1}{\pi} \left( \frac{3C_K}{2} \right)^{-3/4} \quad (5.19)$$

Onde  $C_K = 1.4$  representa a constante de Kolmogorov e portanto,  $C_s \approx 0.18$ .

A constante de Smagorinsky, entretanto, é comumente utilizada com o valor 0.1, visto que diversos trabalhos já demonstraram que esse valor se comporta relativamente bem na simulação de turbulência isotrópica, escoamentos em canais e jatos livres. É comum o uso de uma função de parede próxima às regiões parietais para diminuir a difusão e representar com maior acurácia a sub-camada viscosa com maior precisão.

Germano et al.[83] propuseram um outro modelo submalha que utiliza um segundo filtro, chamado de filtro teste  $\bar{G}_{\tilde{\Delta}x}$ , definido pela relação

$$\tilde{f}(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{y}, t) \bar{G}_{\tilde{\Delta}x}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int f(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) \bar{G}_{\tilde{\Delta}x}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (5.20)$$

Segundo os autores, o filtro  $\bar{G}_{\tilde{\Delta}x}$  é maior que o filtro  $\bar{G}_{\Delta x}$ , ou seja, o tamanho da malha dado por  $\tilde{\Delta}x$  é maior que  $\Delta x$ . Além disso, podemos afirmar que  $\bar{G} = \tilde{G}\bar{G}$ . Impondo o segundo filtro na Eq. (5.8), temos que

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left( \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + \beta_{ij} \right\} \quad (5.21)$$

Onde o tensor de escala submalha após a passagem dos dois filtros é dado por

$$\beta_{ij} = \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \widetilde{u_i u_j} \quad (5.22)$$

Portanto, podemos definir o tensor  $\mathfrak{L}_{ij}$  dado pela relação

$$\mathfrak{L}_{ij} = \tilde{B}_{ij} - \beta_{ij} = \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \widetilde{u_i u_j} \quad (5.23)$$

A Eq. (5.23) pode ser utilizada para obter um modelo de representação das tensões provenientes das escalas submalha com maior precisão, obtendo, por exemplo o valor do coeficiente de Smagorinsky mais apropriado para um estado instantâneo do escoamento. Utilizando a mesma função de fechamento do mod-

elo de Smagorinsky, podemos definir os tensores  $M_{ij}$  e  $m_{ij}$ , que representam a parte anisotrópica dos tensores  $B_{ij}$  e  $\beta_{ij}$ , respectivamente, como sendo

$$B_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}B_{ll} \approx M_{ij} = 2C\bar{\Delta}x^2\|\bar{\mathbf{D}}\|\bar{D}_{ij} \quad (5.24)$$

$$\beta_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\beta_{ll} \approx m_{ij} = 2C\tilde{\Delta}x^2\|\tilde{\mathbf{D}}\|\tilde{D}_{ij} \quad (5.25)$$

Substituindo as Eqs. (5.24) e (5.25) em (5.23), temos que

$$\mathfrak{L}_{ij}\bar{D}_{ij} = 2C \left( \tilde{\Delta}x^2\|\tilde{\mathbf{D}}\|\tilde{D}_{ij}\bar{D}_{ij} - \bar{\Delta}x^2\|\widetilde{\bar{\mathbf{D}}}\|\widetilde{\bar{D}_{ij}\bar{D}_{ij}} \right) \quad (5.26)$$

Para escoamentos em canais planos, Germano et al. [83] definiram a função  $C$ , também conhecidas como coeficiente de LES dinâmico, uma função apenas de  $y$  e  $t$ , evitando assim que a função multiplicada a esta na Eq. (5.26) assumia valores negativos, divergindo esse coeficiente. Para obter o valor de  $C$  sendo essa função somente da dimensão ao longo da altura do canal e do tempo, avaliam o mesmo como uma média em um plano paralelo a parede (descrito por  $\langle \rangle$ ). Assim, o coeficiente  $C$  pode ser escrito como

$$C(y, t) = \frac{1}{2} \frac{\langle \mathfrak{L}_{mn}\bar{S}_{mn} \rangle}{\tilde{\Delta}x^2\langle \|\tilde{\mathbf{D}}\|\tilde{D}_{pq}\bar{D}_{pq} \rangle - \bar{\Delta}x^2\langle \|\widetilde{\bar{\mathbf{D}}}\|\widetilde{\bar{D}_{rs}\bar{D}_{rs}} \rangle} \quad (5.27)$$

O tensor  $M_{ij}$  pode ser então reescrito como

$$M_{ij} = - \frac{\langle \mathfrak{L}_{mn}\bar{S}_{mn} \rangle}{(\tilde{\Delta}x/\bar{\Delta}x)^2\langle \|\tilde{\mathbf{D}}\|\tilde{D}_{pq}\bar{D}_{pq} \rangle - \langle \|\widetilde{\bar{\mathbf{D}}}\|\widetilde{\bar{D}_{rs}\bar{D}_{rs}} \rangle} \|\bar{\mathbf{D}}\|\bar{D}_{ij} \quad (5.28)$$

Lilly [84] propôs uma modificação no modelo descrito por Germano et al. [83] avaliando diretamente o tensor  $\mathfrak{L}_{ij}$ . Os elementos de  $\mathfrak{L}_{ij}$  são os componentes resolvidos do tensor das tensões associado às escalas do movimento que se encontram entre o filtro  $\bar{G}_{\bar{\Delta}x}$  e o filtro  $\tilde{G}_{\tilde{\Delta}x}$ , chamado de janela do filtro  $\tilde{G}_{\tilde{\Delta}x}$ . As tensões das escalas na janela do filtro  $\tilde{G}_{\tilde{\Delta}x}$  pode ser obtida a partir do tensor  $\mathfrak{L}$  subtraindo os termos da diagonal principal (termos isotrópicos), chegando a

relação

$$\mathfrak{L}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\mathfrak{L}_{ij} \approx 2CO_{ij} \quad (5.29)$$

Onde  $O_{ij}$  é dado por

$$O_{ij} = \bar{\Delta}x^2 \|\widetilde{\mathbf{D}}\| \bar{D}_{ij} - \tilde{\Delta}x^2 \|\tilde{\mathbf{D}}\| \tilde{D}_{ij} \quad (5.30)$$

A busca consiste então em valores de  $C$  que resolvam a Eq. (5.29) para, posteriormente, aplicar esses valores em (5.24). Uma vez que a Eq. (5.29) representa 5 funções independentes e somente um incógnita, nenhum valor de  $C$  pode ser escolhido como correto, em um primeiro momento. O erro relativo entre os valores obtidos pode ser minimizado aplicando uma abordagem de mínimos quadrados. Definindo,  $S$  como o quadrado do erro em (5.29), ou seja,

$$S = \left( \mathfrak{L}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\mathfrak{L}_{ij} - 2CO_{ij} \right)^2 \quad (5.31)$$

Avaliando o caso  $\partial S/\partial C = 0$ ,  $C$  pode ser representado como

$$C = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{L}_{ij}O_{ij}}{O_{ij}^2} \quad (5.32)$$

Esse valor representa um mínimo de  $S$ , visto que  $\partial^2 S/\partial C^2 = 0$ . O coeficiente  $C$  obtido no modelo de Germano et al. pode ser reescrito como função do tensor  $O_{ij}$  como

$$C = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{L}_{ij}\bar{D}_{ij}}{O_{ij}\bar{D}_{ij}} \quad (5.33)$$

Assim, a formulação do novo coeficiente  $C$  proposto por Lilly [84] evita os problemas do modelo proposto por Germano et al. [83] que avalia os termos de  $C$  como médias em um plano paralelo às regiões parietais, o que torna sua definição subjetiva e complexa em algumas geometrias. Quando o coeficiente  $C$  proposto por Germano et al. é avaliado nas regiões parietais, o denominador da

Eq. (5.33) pode receber valores pequenos o suficiente para até mesmo igualar a zero o coeficiente. Na formulação proposta por Lilly, o coeficiente  $C$  só se anulará se todos as componentes das soluções desse coeficiente forem nulos. Isso somente ocorrerá se as tensões das escalas na janela  $\tilde{G}_{\tilde{\Delta}_x}$  forem nulas. Todos os novos softwares de dinâmica dos fluidos computacional que possuem o modelo LES dinâmico aplicam o modelo de Germano com a modificação proposta por Lilly.

### 5.2.2 Simulação Numérica

Para a solução das equações de momentum e continuidade, somada a modelagem da turbulência a partir do modelo de simulação das grandes escalas, foi utilizado o pacote de dinâmica dos fluidos computacional multi-propósito ANSYS CFX. A tomada de decisão para a utilização do pacote foi baseado, entre outros motivos, na presença do modelo LES em sua formulação dinâmica, baseado no modelo de Germano et al. [83] com a modificação proposta por Lilly [84]. Além disso, a eficiência de paralelização, comparada com outros pacotes, somada à experiência e familiaridade do autor foram decisivos na escolha da plataforma de simulação dos casos que serão apresentados no capítulo 6.

O método numérico de formação de volumes de controle no qual o pacote ANSYS CFX se baseia é o método de Volumes Finito Baseado em Elemento (EbFVm - *Element based Finite Volume method*) [85]. Neste método, o volume de controle é delimitado por planos formados pela ligação dos centróides de todos os elementos que formam a malha computacional com os centros de suas respectivas arestas, englobando esse vértice no seu interior. Assim, cada um dos vértices da malha está associada somente a um volume de controle e, portanto, a unidade que pode determinar o tempo computacional que um determinada malha demandará com relação a uma segunda, para um mesmo, problema será o número de vértices. A vantagem do método EbFVm, frente ao método de volumes finitos clássico (FVm - *Finite Volume method*) encontra-se na melhor discretização das equações

de transporte em sua forma integral, visto que, pelo fato dos volume de controle apresentarem um número de faces maior que os elementos utilizados no método de FVm, o número de pontos de integração totais é maior, com limites de 24 para uma malha formada por elementos hexaédricos e 60 para elementos tetraédricos [86].

O sistema de equações lineares formado a partir da solução integral das equações de transporte é resolvido de forma acoplada, ou seja, para os problemas descritos nesse capítulo e com resultados apresentados no capítulo 6, as equações de momentum nas direções cartesianas x, y e z, além da equação da continuidade para a correção da pressão, são resolvidas em uma mesma matriz. A solução da matriz é realizada de maneira implícita, utilizando o método de fatoração *Incomplete Lower Upper* (ILU), que acelera a convergência do método *Multigrid* Algébrico (AMG). O modelo AMG se destaca dos demais métodos *multigrid*, a discretização das equações não-lineares é realizada somente uma vez para a malha mais fina. O método forma um sistema de equações lineares para uma malha menos fina que a malha original, somando as equações da mesma. Após resolvido o sistema de equações para a malha mais grosseira, esta servirá de condição inicial para a solução em uma malha mais refinada até que se chegue a malha original. A malha menos fina é formada por dois ou mais elementos da malha original de tal maneira que o método se mantém conservativo.

Para a avaliação espacial das variáveis resolvidas e de seus respectivos gradientes, a técnica de descrição das variáveis armazenadas nos pontos nodais por meio de funções de forma trilineares, provenientes do método de elementos finitos é realizada. O esquema advectivo utilizado nos problemas descritos foi o método de diferenças centrais (CDS - *Central Difference Scheme*). Os esquemas de transferência dos termos advectivos para os pontos de integração no pacote CFX podem ser representados pela forma

$$\phi_{ip} = \phi_{up} + \beta \nabla \phi \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (5.34)$$

Onde,  $\phi_{ip}$  representa o valor da variável  $\phi$  no ponto de integração,  $\phi_{up}$  representa o valor da variável  $\phi$  no nó a montante do ponto de integração,  $\nabla\phi$  o gradiente da variável  $\phi$  e, finalmente,  $\Delta\mathbf{r}$ , representa o vetor que liga o ponto de integração ao nó a montante. O valor de  $\beta$  indica o tipo de esquema a ser utilizado. No esquema de diferenças centrais,  $\beta = 1$  e  $\nabla\phi$  é igual ao gradiente local do elemento, ou seja, o valor de  $\phi_{ip}$  é obtido a partir das funções de forma trilineares. O esquema, portanto, é de segunda ordem e pode apresentar problemas em malhas mal condicionadas. Entretanto, esse esquema se mostra eficaz na solução com o modelo LES e derivados.

A discretização dos termos temporais nas equações de transporte é realizada a partir do método de segunda ordem *Backward Euler* cuja formulação pode ser representada, para um passo uniforme  $\Delta t$  por

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho\phi) dV \approx V \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{3}{2}(\rho\phi) - 2(\rho\phi)^O + \frac{1}{2}(\rho\phi)^{OO} \right) \quad (5.35)$$

Onde o expoente  $O$  e  $OO$  representam, respectivamente, os valores de  $\rho\phi$  no passo de tempo anterior e à dois passo de tempo anteriores, respectivamente. O esquema *Backward Euler* de segunda ordem é robusto do ponto de vista da convergência, totalmente implícito, conservativo no tempo e não possui um limite para o valor de passo de tempo a ser utilizado. Entretanto, pode apresentar oscilações numéricas.

## 5.3 Exemplos de escoamentos Turbulentos

### 5.3.1 Escoamentos em Cavidades

Por se tratar de um problema relativamente simples de ser implementado, sem a presença de condições de contorno que tratam fluxos internos ou externos ao domínio e que merecem atenção especial quando simuladas conjuntamente com o modelo LES, o escoamento no interior de uma cavidade hexaédrica é bastante utilizada quando o fenômeno de formação de estruturas coerentes deseja ser ev-

idenciado, assim como a própria turbulência, seja após a implementação de um determinado modelo ou durante a etapa de testes por conta de uma modificação em um modelo existente. O escoamento em geometrias hexaédricas é basicamente formado por 5 paredes onde a condição de não deslizamento é aplicada, mas que se mantêm estacionárias e uma parede, igualmente simulada com a condição de não deslizamento, mas que translada com uma determinada velocidade. Essa translação pode ser aplicada em qualquer direção, mas, no capítulo 6 do presente trabalho, serão apresentados somente resultados contemplando a translação de uma face de forma paralela a uma de suas arestas e em uma direção que forma  $45^\circ$  com essa mesma aresta. A princípio, por se tratar de um cubo, a descrição pode ser tratada de forma genérica.

O trabalho pioneiro de Koseff e Street [87] se destaca por externar o caráter tridimensional do escoamento em uma cavidade, que vinha sendo simulado bidimensionalmente até então. Desde então diversos trabalhos se preocupavam em identificar as estruturas formadas no processo de desenvolvimento da turbulência no escoamento. A comparação entre domínios bidimensionais e tridimensionais também foi estudado nos trabalhos de Ku et al. [88] e Babu and Korpela [89]. Recentemente, os trabalhos de Migeon et al. [90] e Padilha et al. [91] estudaram, respectivamente, a propagação transiente de estruturas provenientes de correntes longitudinais no escoamento laminar em uma cavidade paralelepípedica com parede móvel para número de Reynolds iguais 1000 e a aplicação do modelo LES dinâmico no estudo do escoamento em cavidade com parede móvel paralela e diagonal (45 graus).

### 5.3.2 Turbulência Isotrópica Forçada

O estudo numérico do decaimento transiente de turbulência isotrópica, a partir da inicialização no domínio de um espectro de energia, foi estudado em um grande número de trabalhos para as mais diversas finalidades no estudo da turbulência. É comum sua utilização no estudo de novos critérios de identificação

de vórtices, pois, por se tratar de um escoamento isotrópico, a preocupação com questões relacionadas com a orientação das estruturas coerentes e o novo critério proposto não é abordado, em um primeiro momento. Entretanto, o decaimento livre da turbulência para baixos números de Reynolds baseados na micro-escala de Taylor,  $Re_\lambda$ , apresenta um tempo de amostragem para análises estatísticas baixo e o aumento do número de Reynolds significa aumentar a resolução da malha computacional e, conseqüentemente, o tempo computacional. Portanto, uma abordagem bastante utilizada é a inserção de energia no domínio, a partir de um termo adicional da equação de Navier-Stokes, sem descaracterizar a turbulência do escoamento, com o objetivo de se atingir o desenvolvimento da mesma e possibilitar um tempo maior de amostragem para análises estatísticas após atingido tal desenvolvimento.

Avaliando as equações de Navier-Stokes para um escoamento turbulento levando em consideração que a velocidade instantânea é igual a soma da média temporal com as flutuações transientes ( $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ ), temos que

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' - \nabla \cdot \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = -\frac{1}{\rho} \nabla p' + \nu \nabla^2 \mathbf{u}' \quad (5.36)$$

O terceiro termo da esquerda,  $\mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}$  aparece na equação de energia turbulenta como um termo de produção,  $\langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}' \rangle$  (tanto a barra superior quando os símbolos  $\langle \rangle$  representam a média temporal). Na Eq. (5.36) esse mesmo termo aparece como um termo de excitação proporcional a  $\mathbf{u}'$ . Isso sugere que para turbulência isotrópica homogênea é apropriado que essa excitação, em um escoamento permanente, seja realizada por um termo proporcional a velocidade [92]. É comum a inclusão desse termo na equação de Navier-Stokes em estudos numéricos de turbulência isotrópica forçada de acordo com

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + f \quad (5.37)$$

Para o caso de excitação linear com respeito a velocidade, temos que

$$\mathbf{f} = C\mathbf{u} \quad (5.38)$$

Assim, a equação da energia turbulenta então pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle}{\partial t} = -\epsilon + C \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle \quad (5.39)$$

Onde

$$\epsilon = -\nu \langle \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} \rangle \quad (5.40)$$

Na Eq. (5.40),  $\epsilon$  é a taxa média de dissipação e o último termo da Eq. (5.39) é chamado de termo de produção isotrópica turbulenta. Para escoamentos turbulentos permanentes, temos que

$$C = \frac{\epsilon}{3U^2} \quad (5.41)$$

Onde  $U^2 = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle / 3$  é a média quadrática de um componente da velocidade. Finalmente, o propósito da simulação de turbulência isotrópica forçada é resolver numericamente

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\epsilon}{3U^2} \mathbf{u} \quad (5.42)$$

A Eq. (5.42) tem a propriedade de que o estado de repouso é instável para ondas longas. Portanto, a solução da equação da energia não pode decair a zero, visto que a energia é transferida para ondas curtas, com o objetivo de dissipar energia.

# Capítulo 6

## Resultados Numéricos

No presente capítulo serão apresentados os resultados obtidos a partir da implementação dos critérios estudados nos capítulos anteriores em escoamentos obtidos a partir da solução numérica das equações de Navier-Stokes para escoamentos ditos turbulentos. As simulações foram realizadas no software comercial de dinâmica dos fluidos computacional ANSYS CFX em sua versão 12.0, como introduzido no capítulo anterior. Visto que a discretização espacial e temporal não é suficiente para descrever o comportamento das menores escalas coerentes presentes em alguns dos escoamentos estudados, torna-se necessário modelar a turbulência e seus fenômenos correlatos.

### 6.1 Escoamentos em Cavidades

Nessa seção serão apresentados os resultados referentes a simulação no pacote ANSYS CFX do escoamento em uma cavidade cúbica, com movimento de uma das paredes na fronteira do domínio. Foram analisados dois casos: o primeiro, chamado de *Caso 0 graus* corresponde a movimentação da parede y-positivo na direção z, enquanto que o *caso 45 graus* corresponde a mesma geometria, mas se movendo a velocidade constante tanto na direção x quanto na direção z, ambas no sentido positivo. A Fig. 6.1 apresenta os planos onde serão analisados os

critérios relacionados no capítulo 3 para ambos os casos estudados.

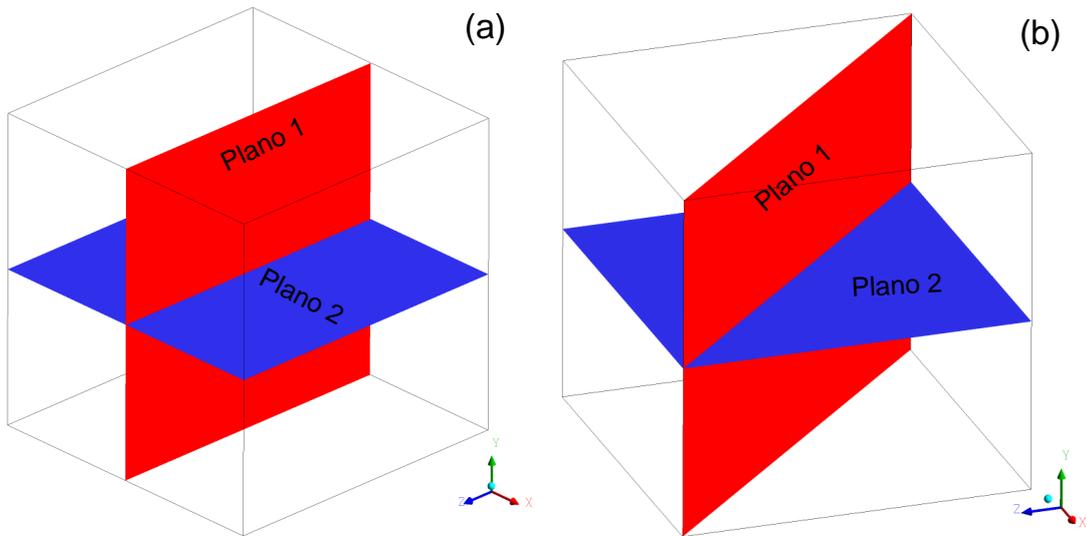


Fig. 6.1: Planos de avaliação dos critérios propostos no caso 0 graus (a) e no caso 45 graus (b).

A fronteira y-positivo se movimenta com velocidade constante,  $U$  e em todas as fronteiras do domínio são dispostas condições de contorno de não-deslizamento e impermeabilidade  $\mathbf{u}|_{fronteira} = 0$ . A malha apresenta um pequeno refino na região parietal, conforme mostra a figura. A malha apresenta resolução  $80 \times 80 \times 80$  elementos e foi refinada próxima a região parietal para capturar melhor os efeitos de camada limite, relevantes nesse tipo de escoamento. A turbulência no domínio foi simulado por meio do modelo LES dinâmico presente no pacote ANSYS CFX e que contempla o modelo descrito por Germano et al. [83], com a modificação proposta por Lilly [84]. A Fig. 6.2 apresenta os contornos do coeficiente do modelo LES dinâmico para números de Reynolds, baseados na velocidade da placa e na altura do domínio, iguais a 5000 e 10000.

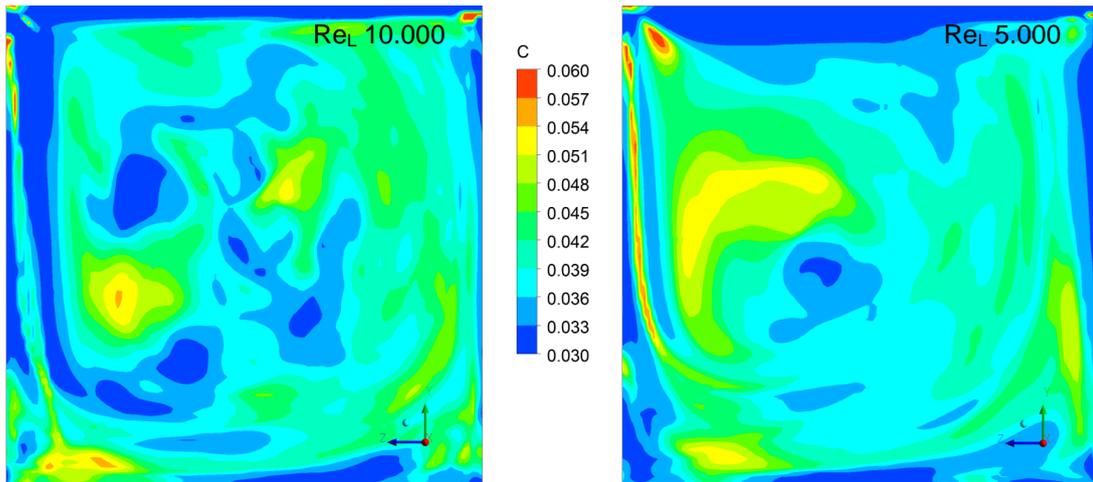


Fig. 6.2: Coeficiente do modelo LES dinâmico.

A discretização temporal se deu por meio do modelo Backward Euler de segunda ordem e a escolha do passo de tempo foi tal que se manteve o número de Courant igual a unidade, ao longo de toda a simulação. Amostras de resultados temporais foram obtidos após a avaliação da ausência de mudanças relevantes, com relação a um intervalo específico de tempo, em pontos de monitoramento da velocidade instantânea e dos termos do tensor de Reynolds.

### 6.1.1 Avaliação dos Critérios de Identificação de Vórtices - Caso 0 Graus

As Figs. 6.3-6.8 avaliam, no plano 1 (vista lateral) do presente caso, os critérios relacionados no capítulo 3 para o escoamento turbulento em uma cavidade, com o movimento da placa superior na direção z-positivo. As análises foram realizadas no último instante de tempo simulado. Observa-se nos novos critérios propostos e nas formulações objetivas a heterogeneidade das estruturas coerentes identificadas, com relação aos critérios existentes, principalmente os critérios  $Q$ ,  $\Delta$  e  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ . As formulações objetivas do critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$  se diferem, como é possível observar na Fig. 6.4 e uma investigação mais profunda a cerca do tema é fundamental. É possível notar também que a vorticidade apresenta valores altos próximo a parede, onde os efeitos cisalhantes são mais proeminentes, mesmo sem a existência de estruturas vorticais tão amplas na região parietal. Esse constitui

um dos motivos para o presente Trabalho não classificar a vorticidade como um critério classificador de vórtices.

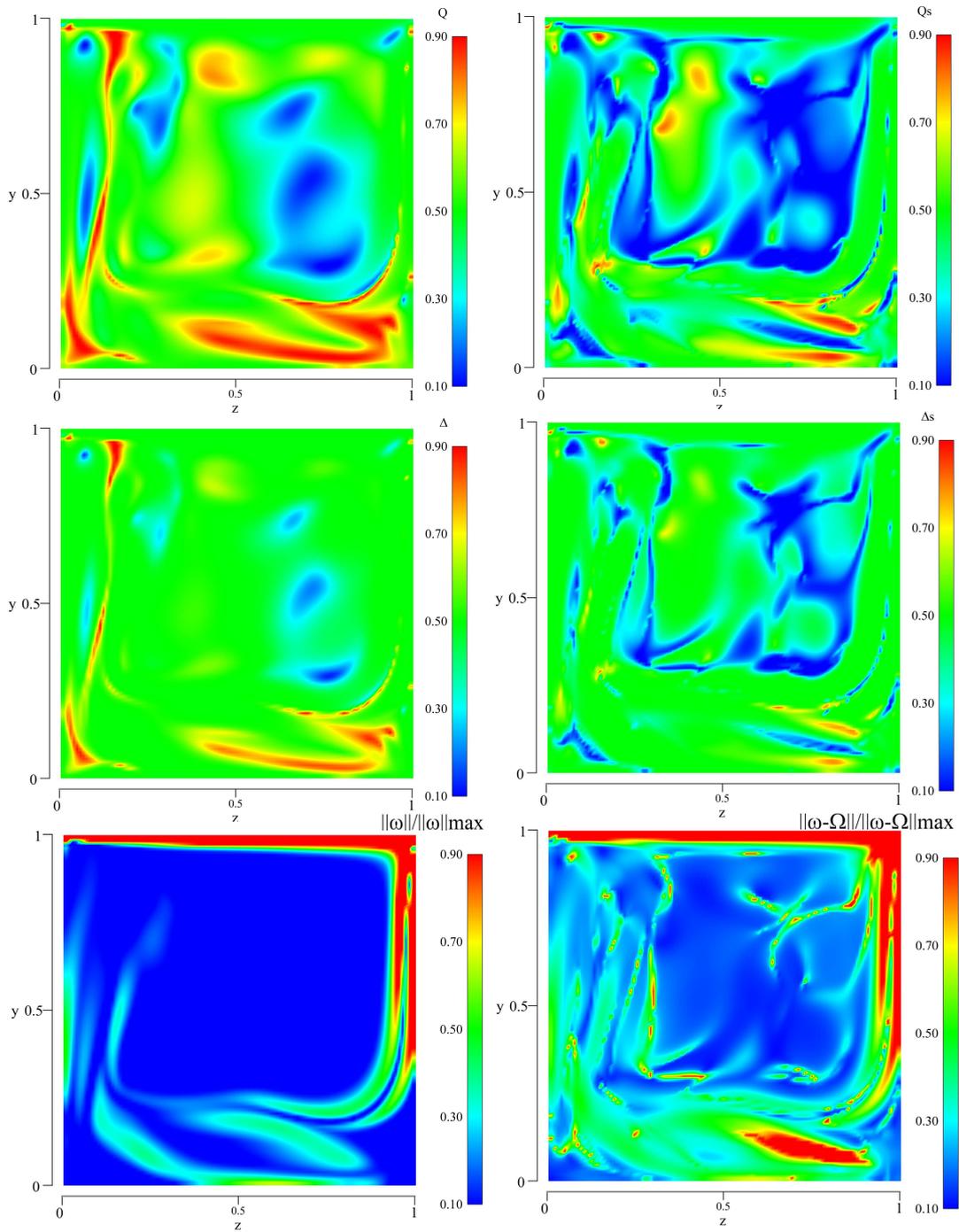


Fig. 6.3: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 1.

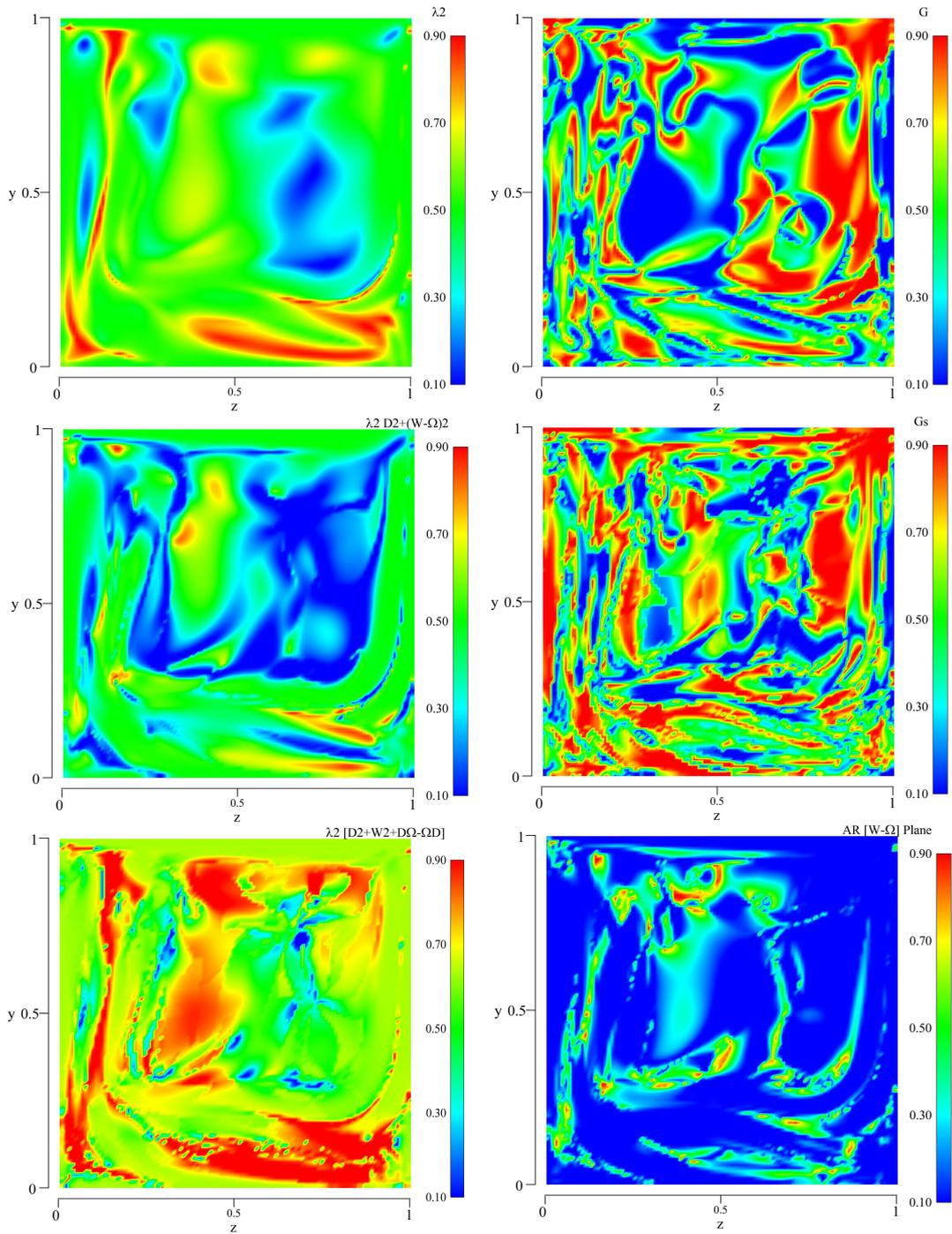


Fig. 6.4: Critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\overline{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 1.

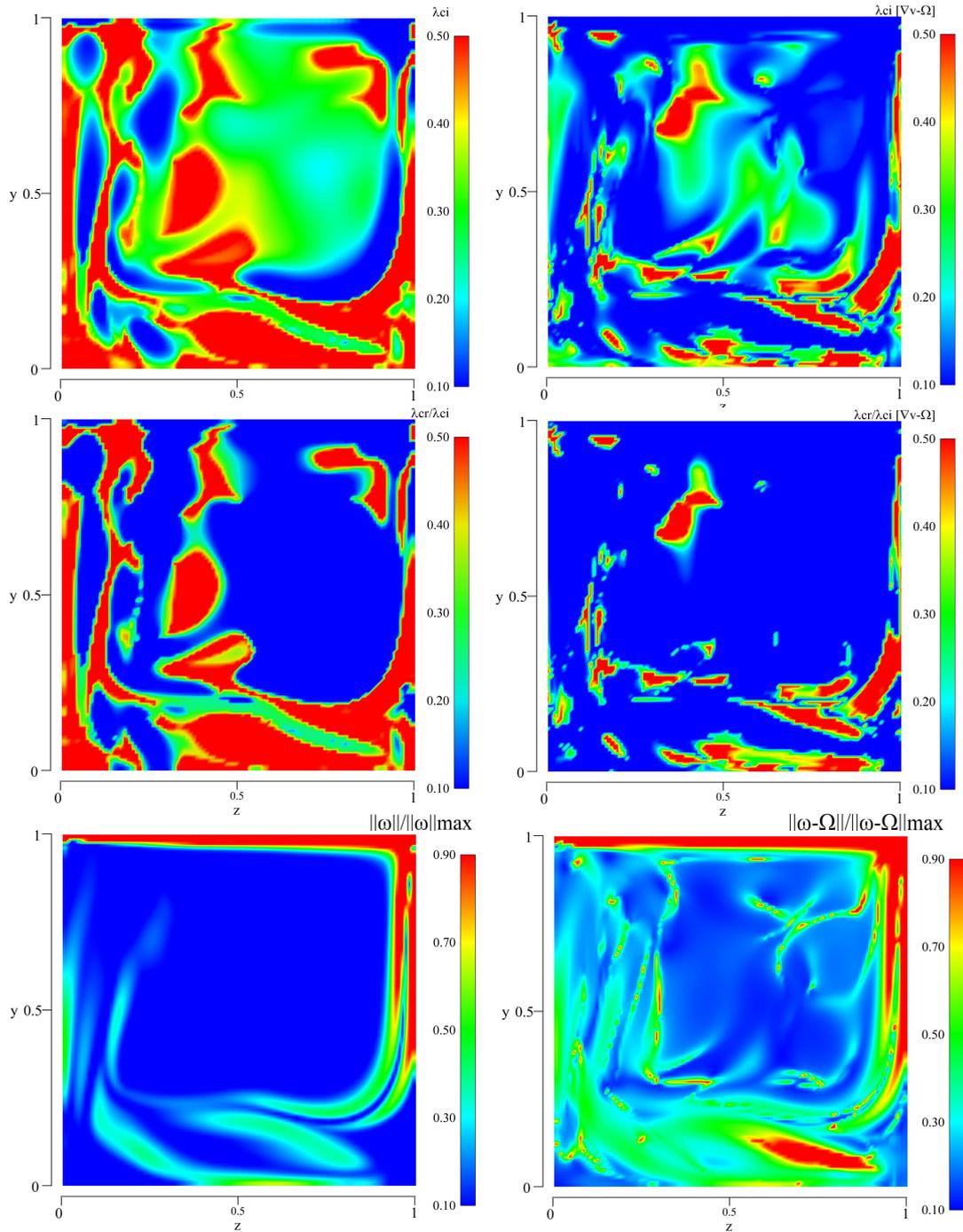


Fig. 6.5: Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla v}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 1.

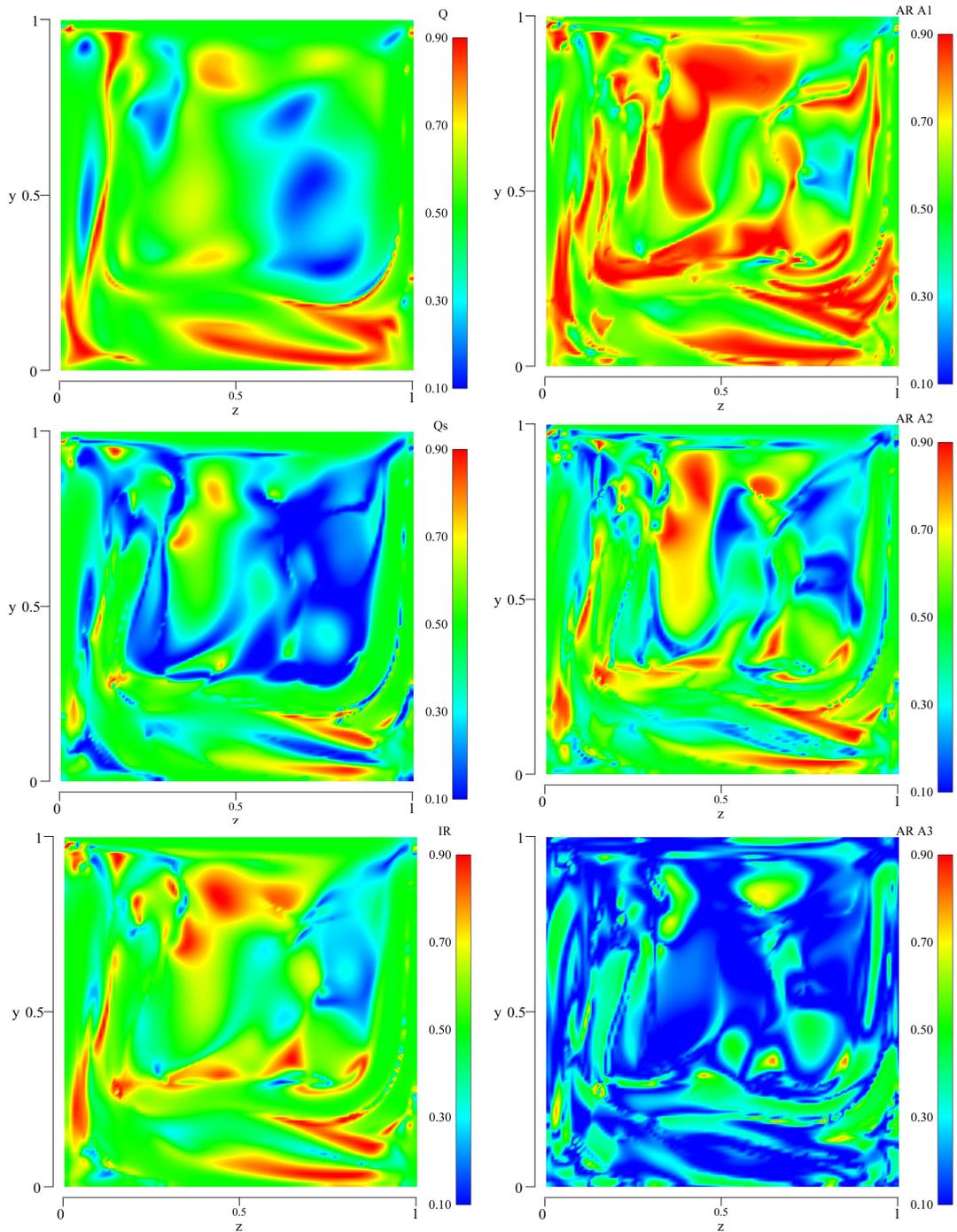


Fig. 6.6: Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 1.

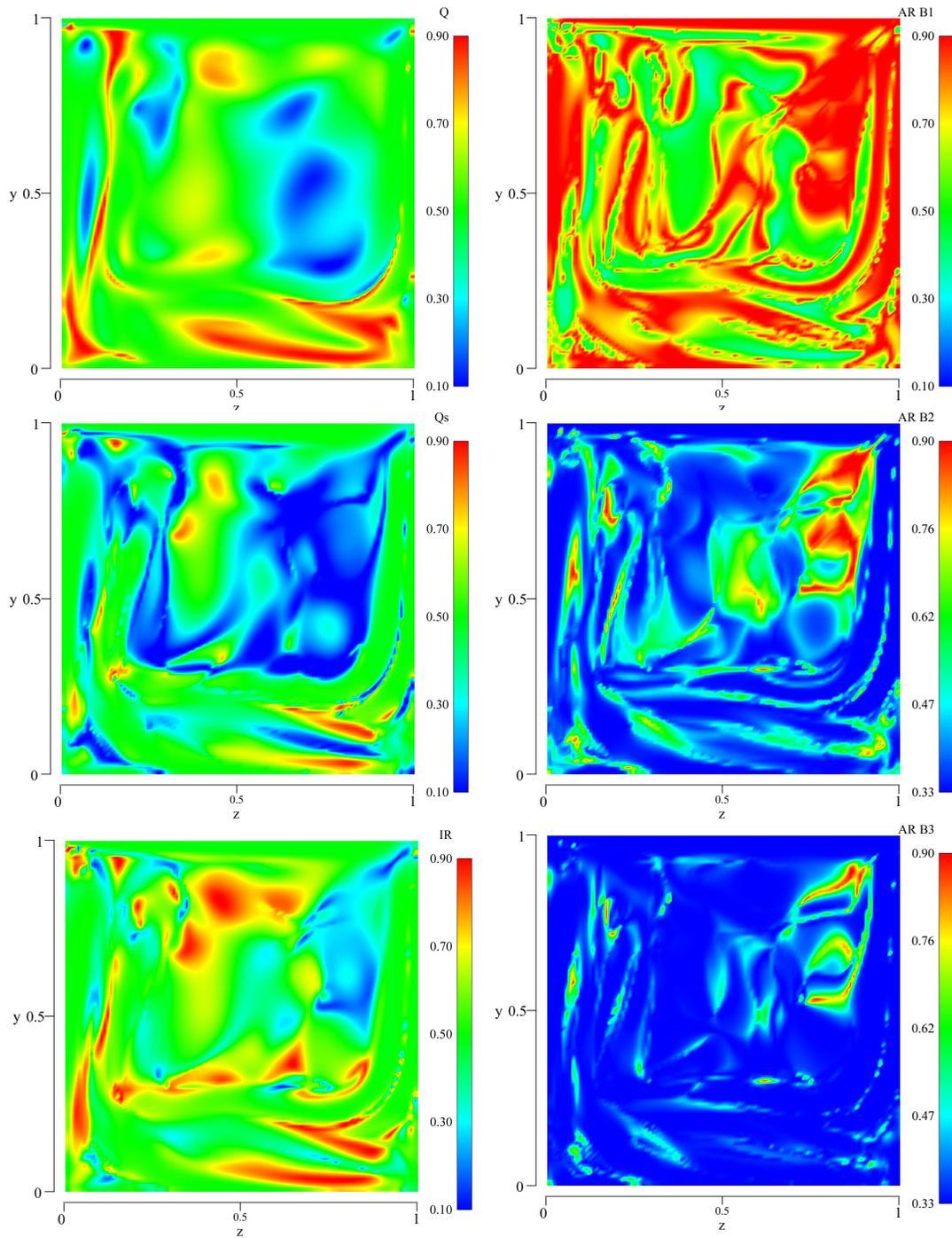


Fig. 6.7: Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 1.

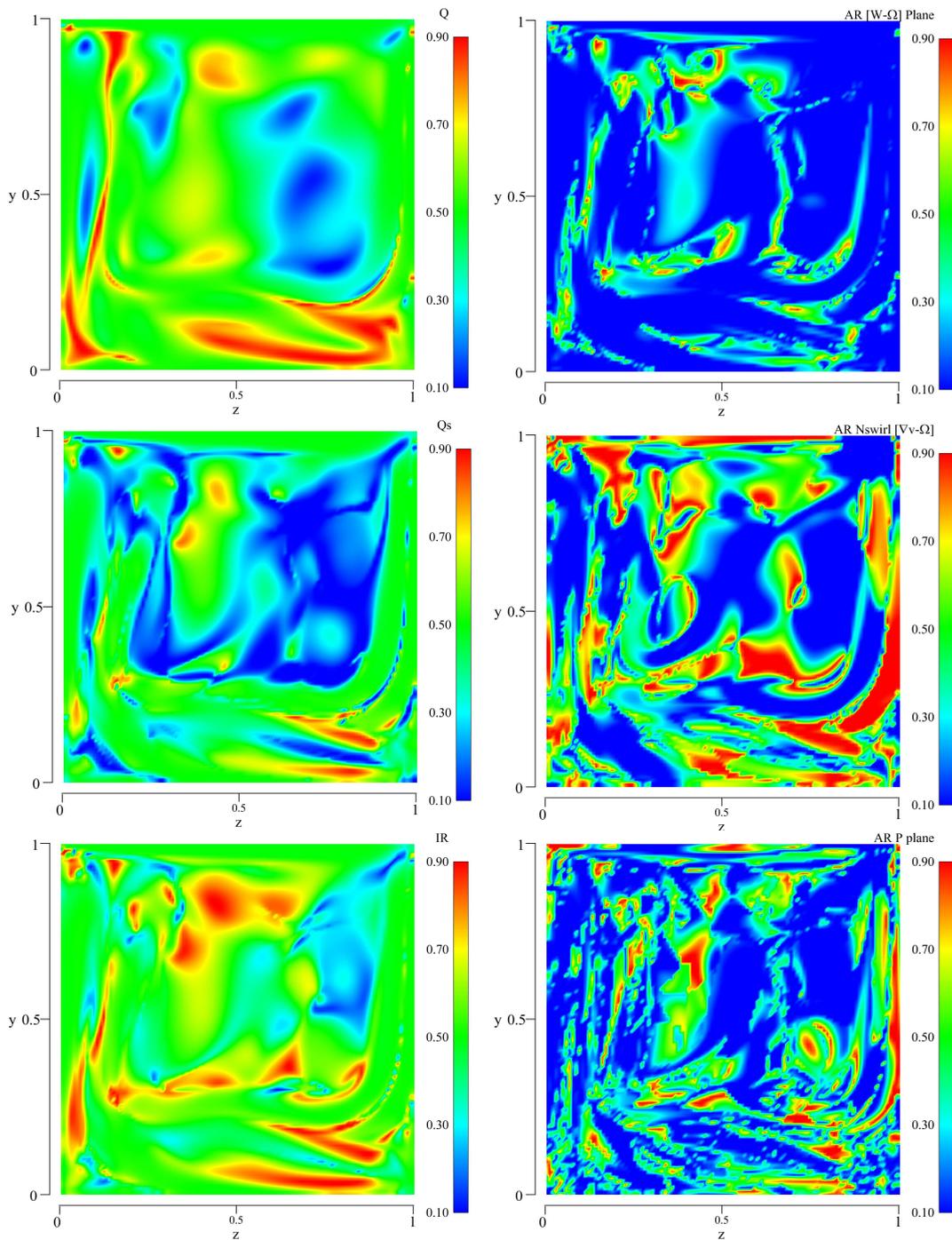


Fig. 6.8: Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{n_{swirls}}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 1.

As Figs. 6.9-6.14 avaliam, no plano 2 (vista de topo) do domínio do escoamento turbulento em uma cavidade, contemplando o caso 0 graus. As imagens mostram que todos quase todos os critérios avaliados identificam, de forma peculiar, uma mesma região vortical longitudinal em uma grande faixa do domínio. Outro fato que ressalta a importância dos critérios propostos no presente tra-

balho é o elevado grau de dobramento dessa estrutura vortical, se levarmos em consideração os critérios propostos, contra os critérios existentes, que avaliam tal estrutura de forma mais suave.

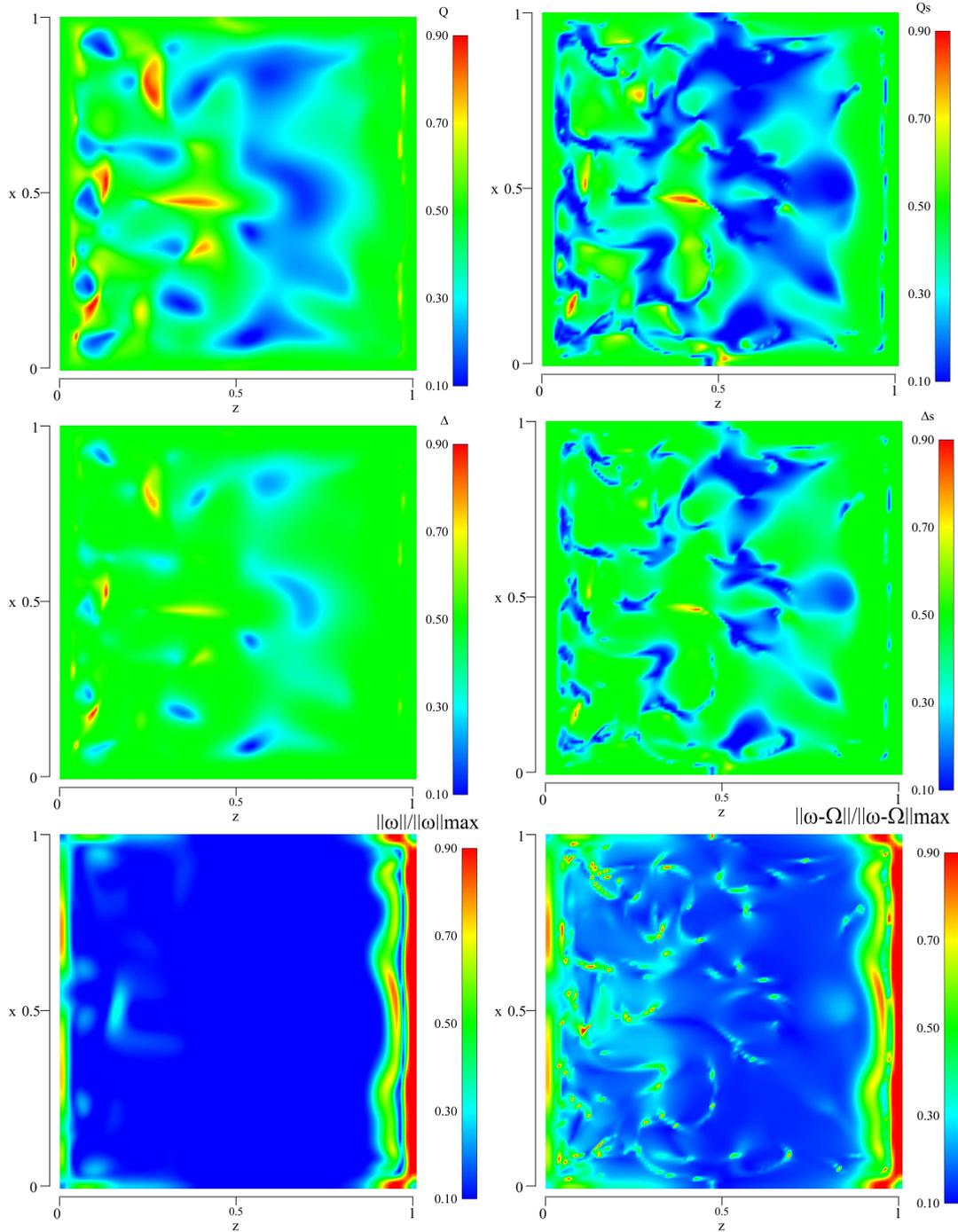


Fig. 6.9: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 2.

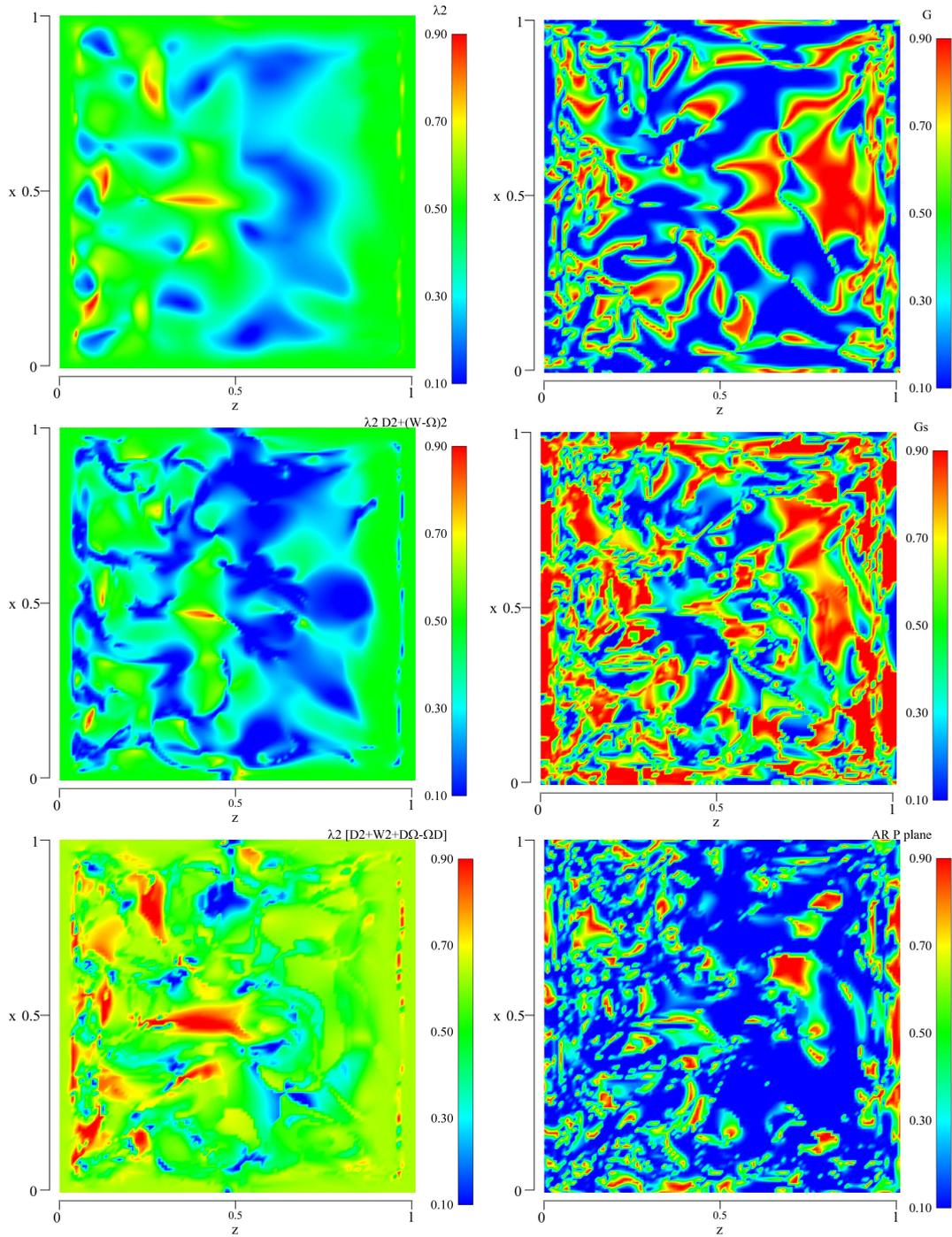


Fig. 6.10: Critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\overline{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 2.

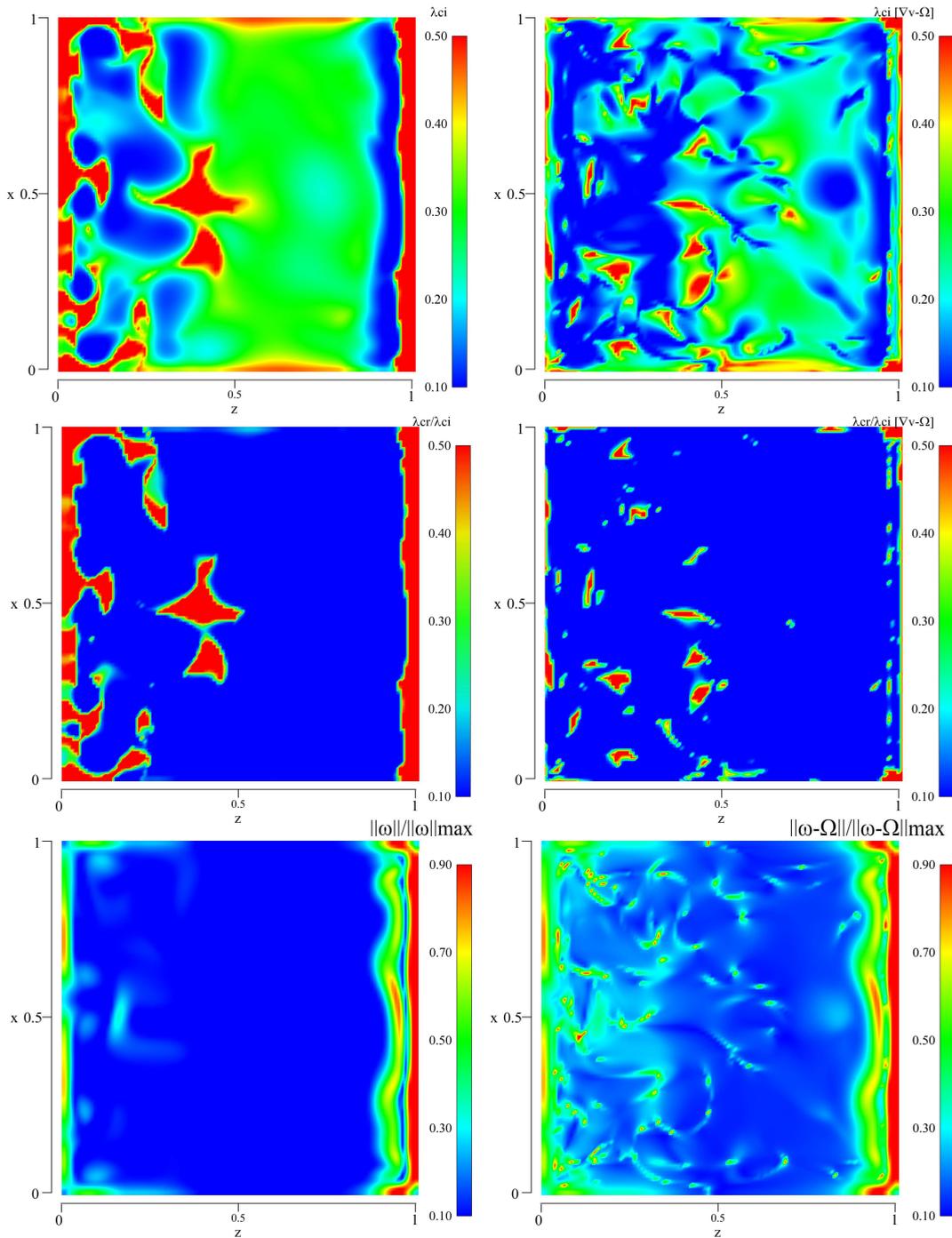


Fig. 6.11: Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla v}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 2.

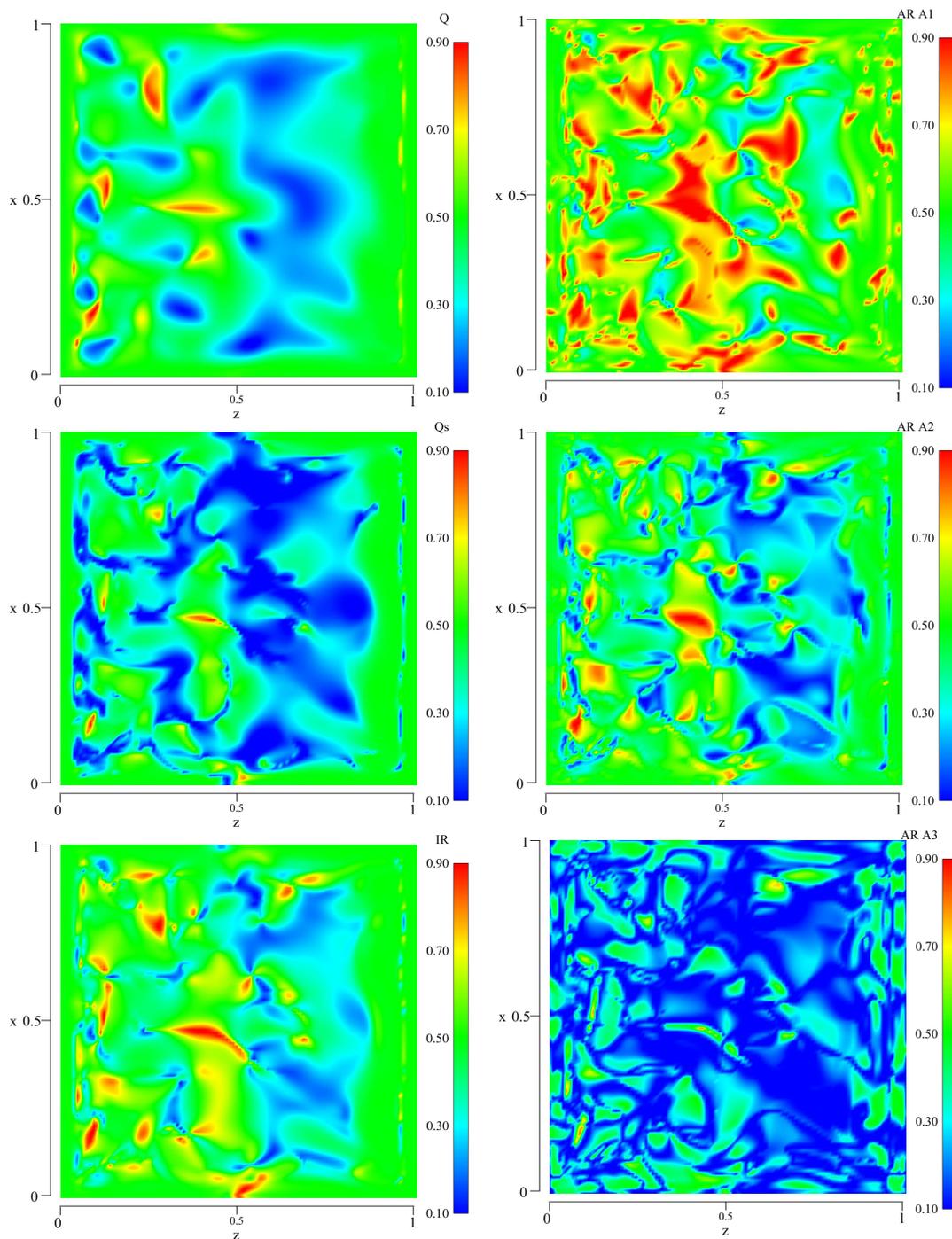


Fig. 6.12: Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 2.

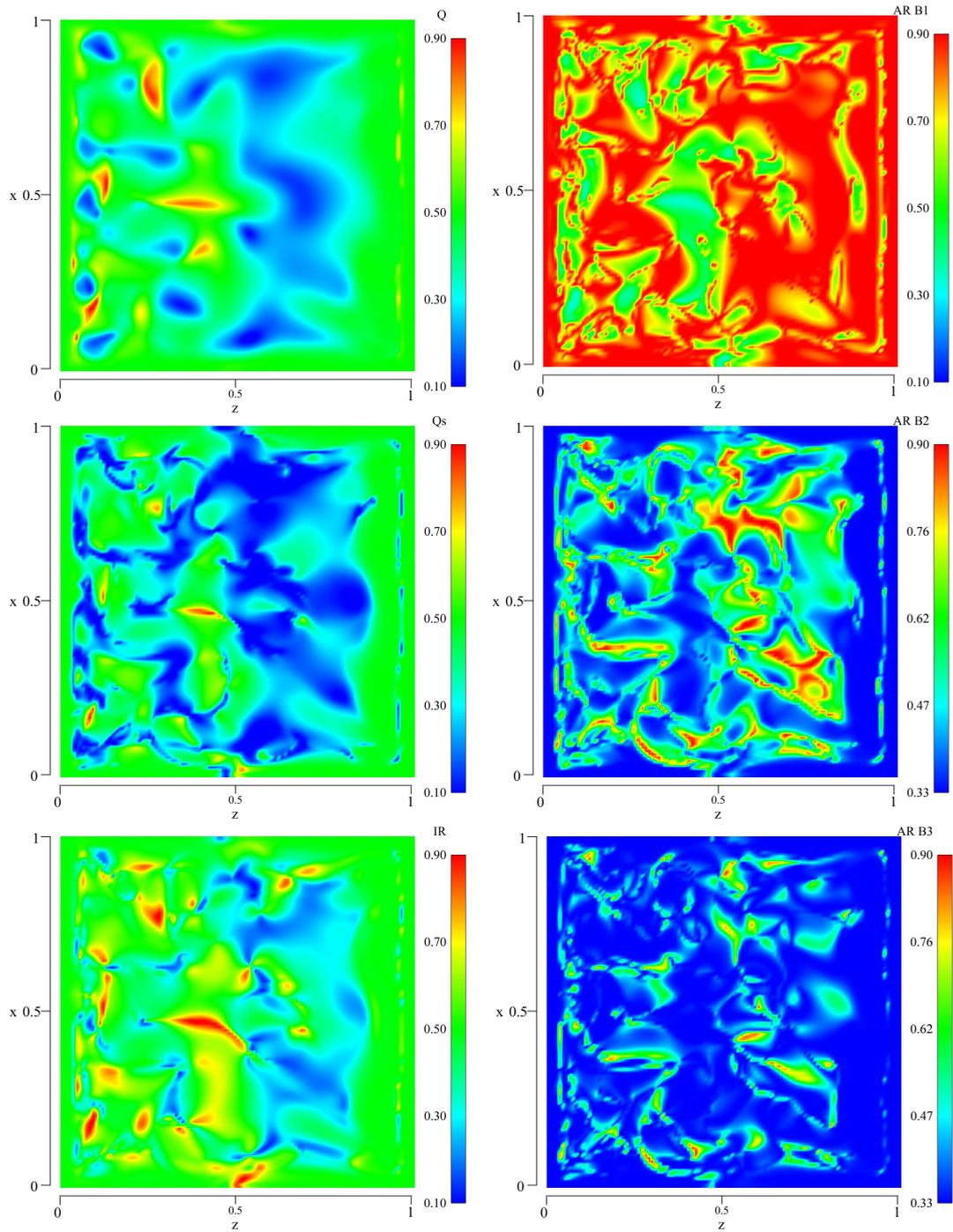


Fig. 6.13: Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 2.

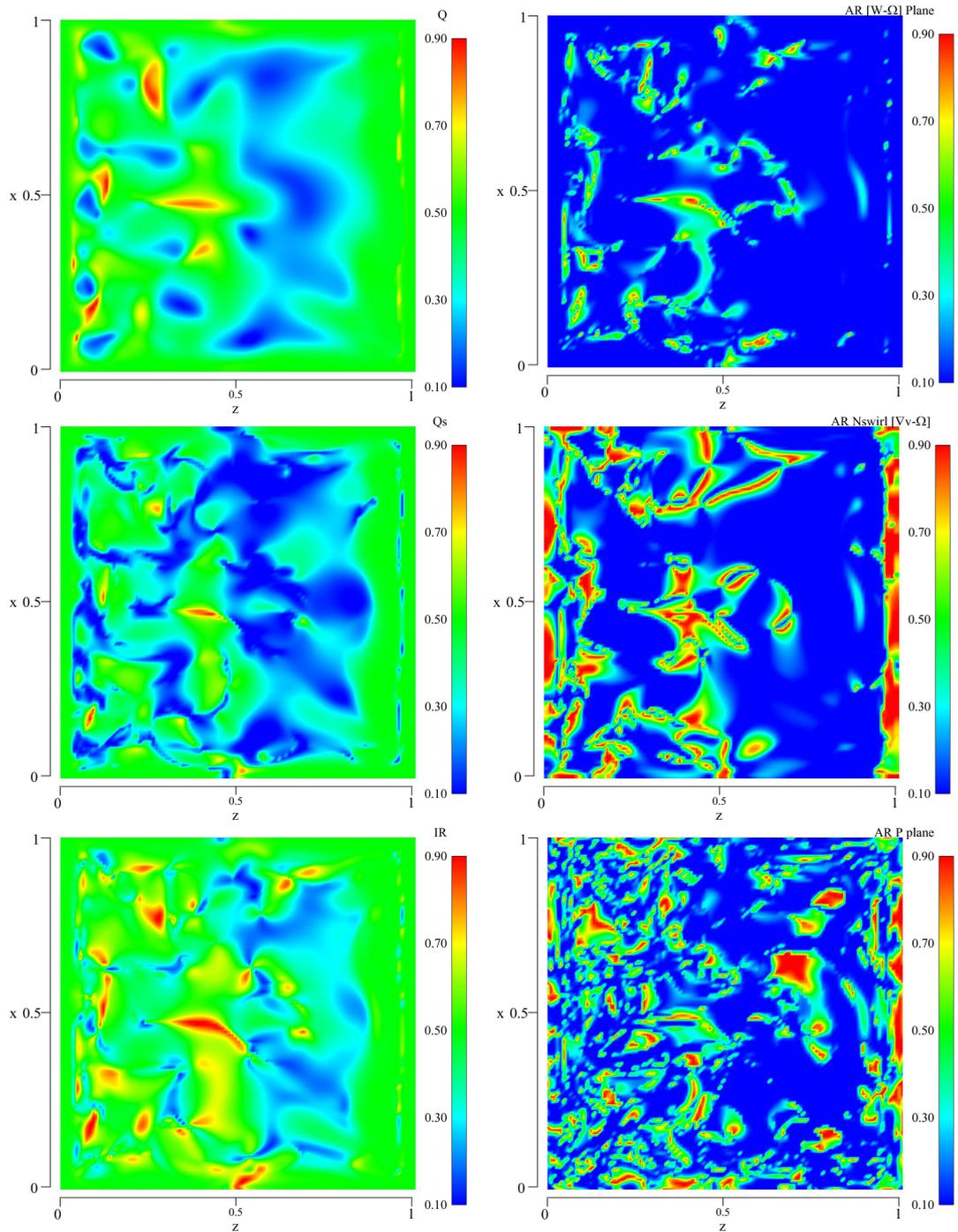


Fig. 6.14: Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{n_{swirls}}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus - no plano 2.

As Figs. 6.15-6.19 dispõem as isosuperfícies dos principais critérios avaliados. As superfícies se encontram coloridas pela magnitude do vetor posição, somente para realçar a topologia dessas estruturas. Observa-se a semelhança no grau de detalhe das estruturas avaliadas pelos critérios propostos, frente aos critérios existentes, que muitas vezes dispõem estruturas coerentes isoladas no escoamento.

Os novos operadores avaliam estruturas de forma mais conjunta e com maiores detalhes.

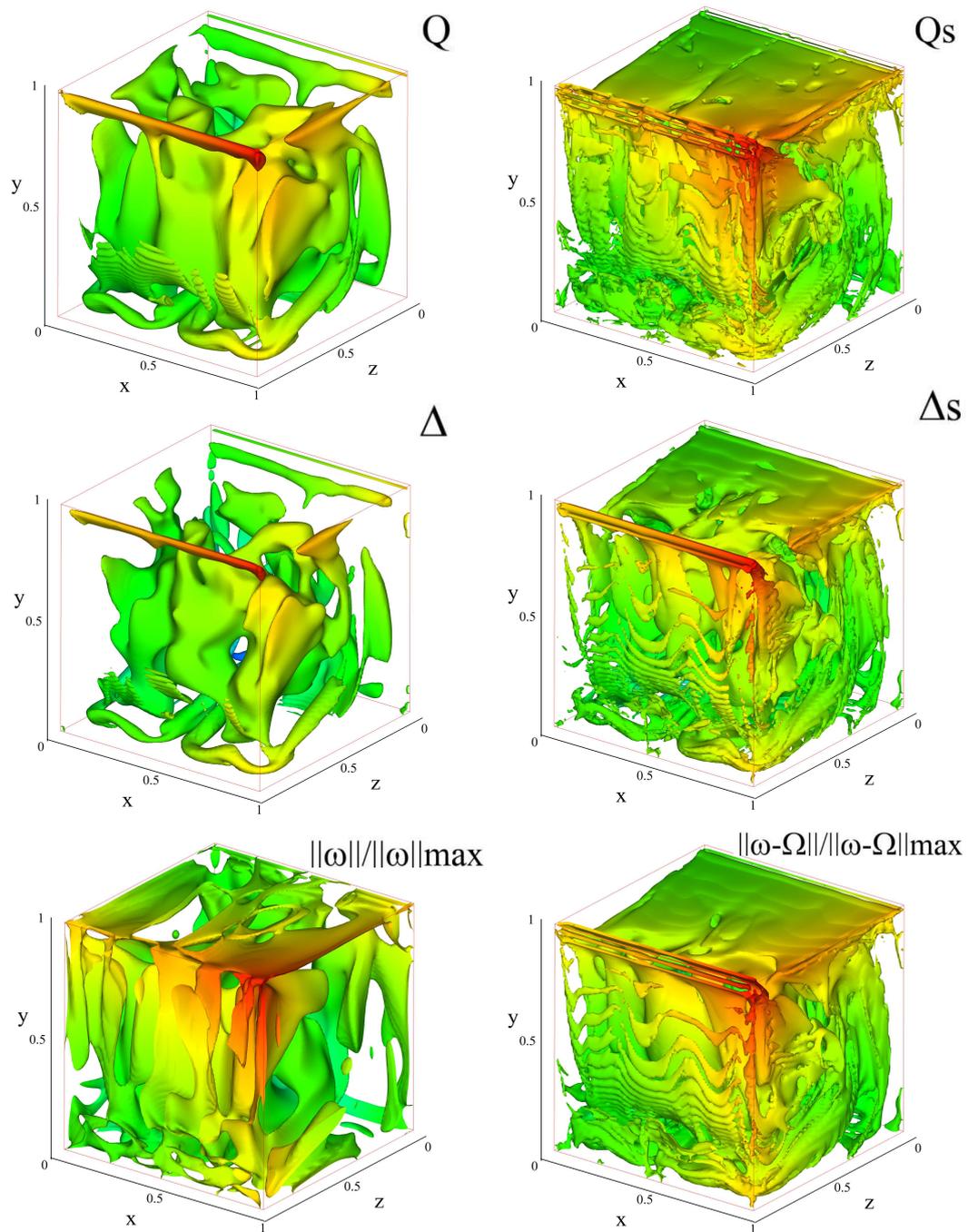


Fig. 6.15: Isosuperfícies dos critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus.

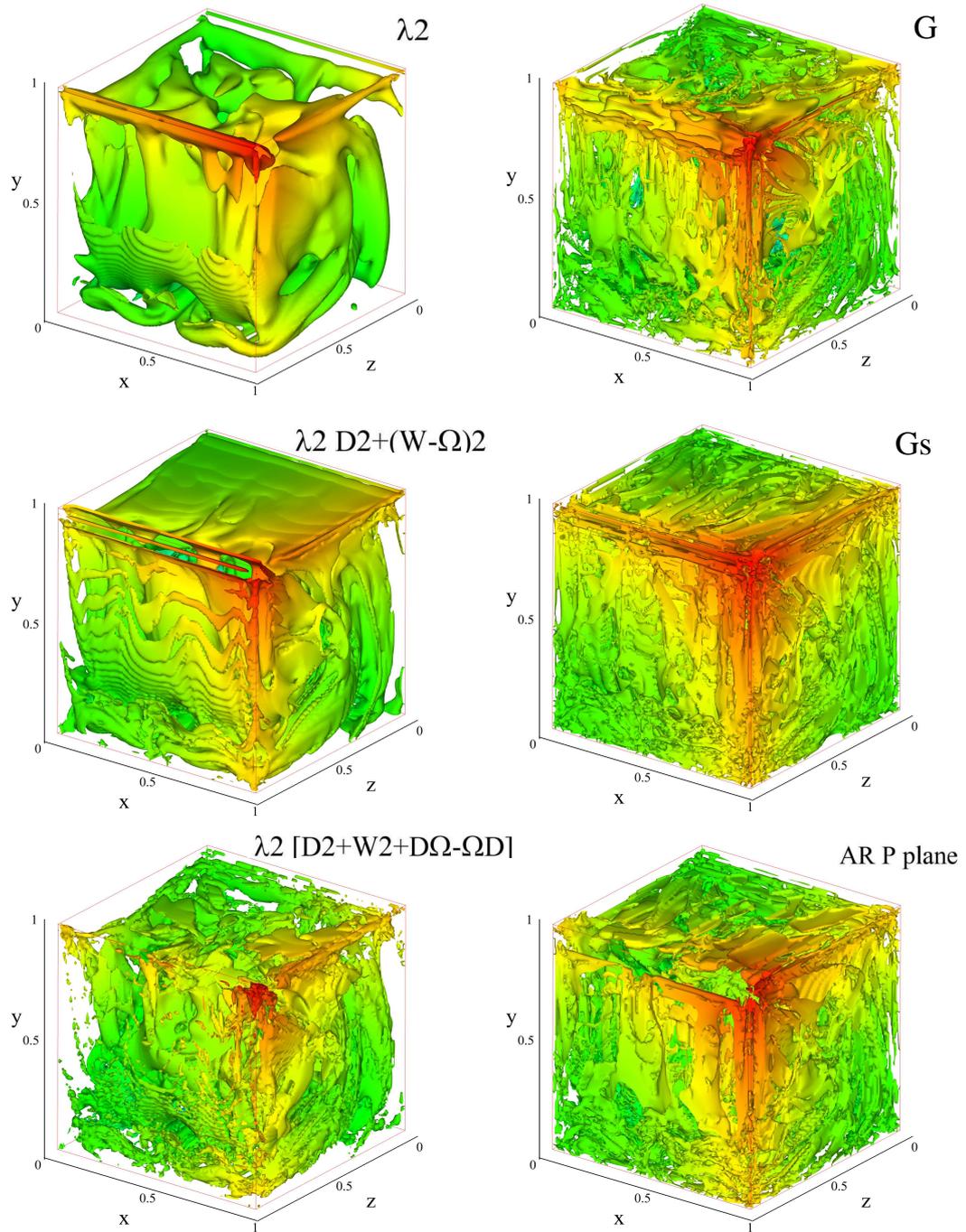


Fig. 6.16: Isosuperfícies dos critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\overline{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus.

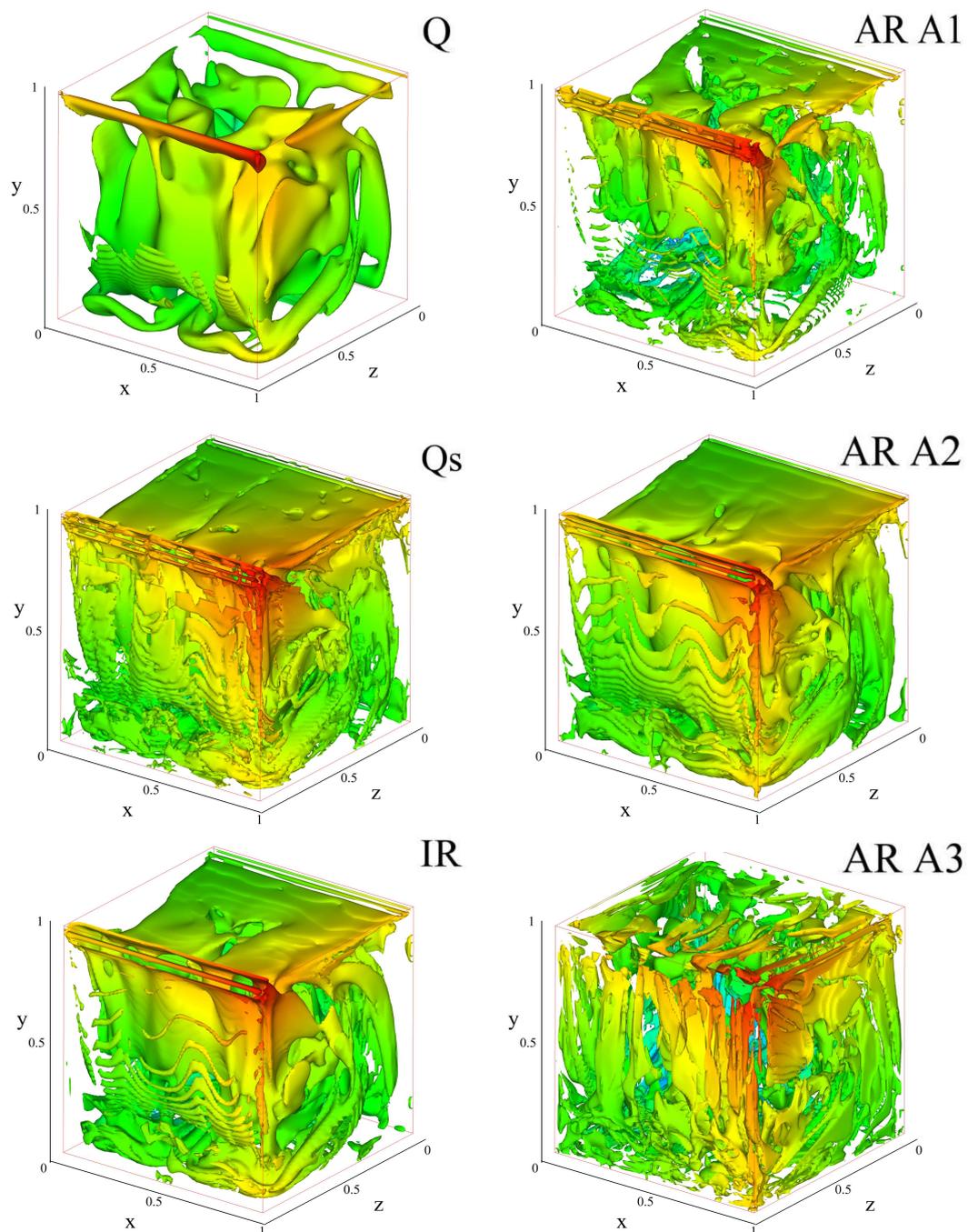


Fig. 6.17: Isosuperfícies dos operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus.

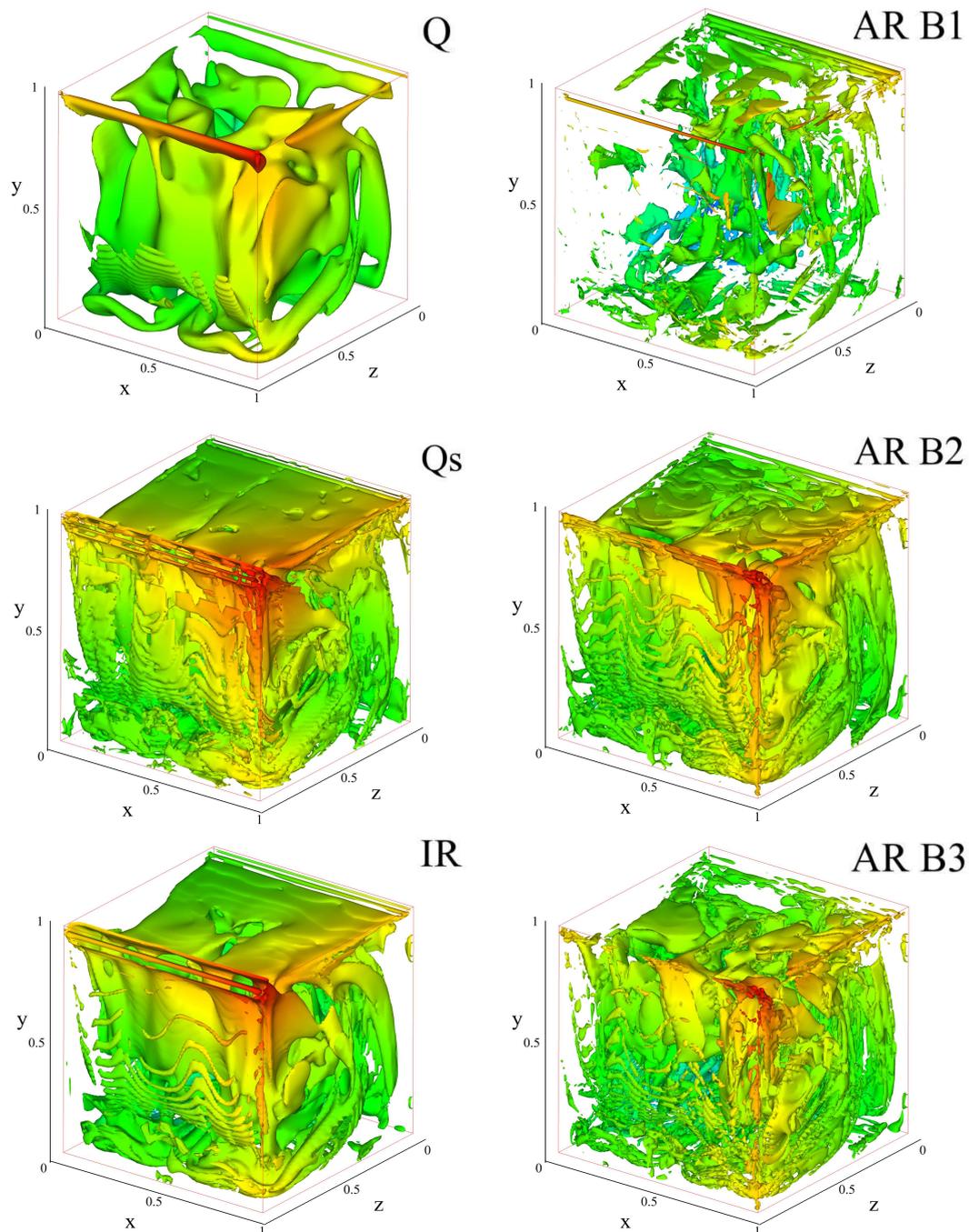


Fig. 6.18: Isosuperfícies dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus.

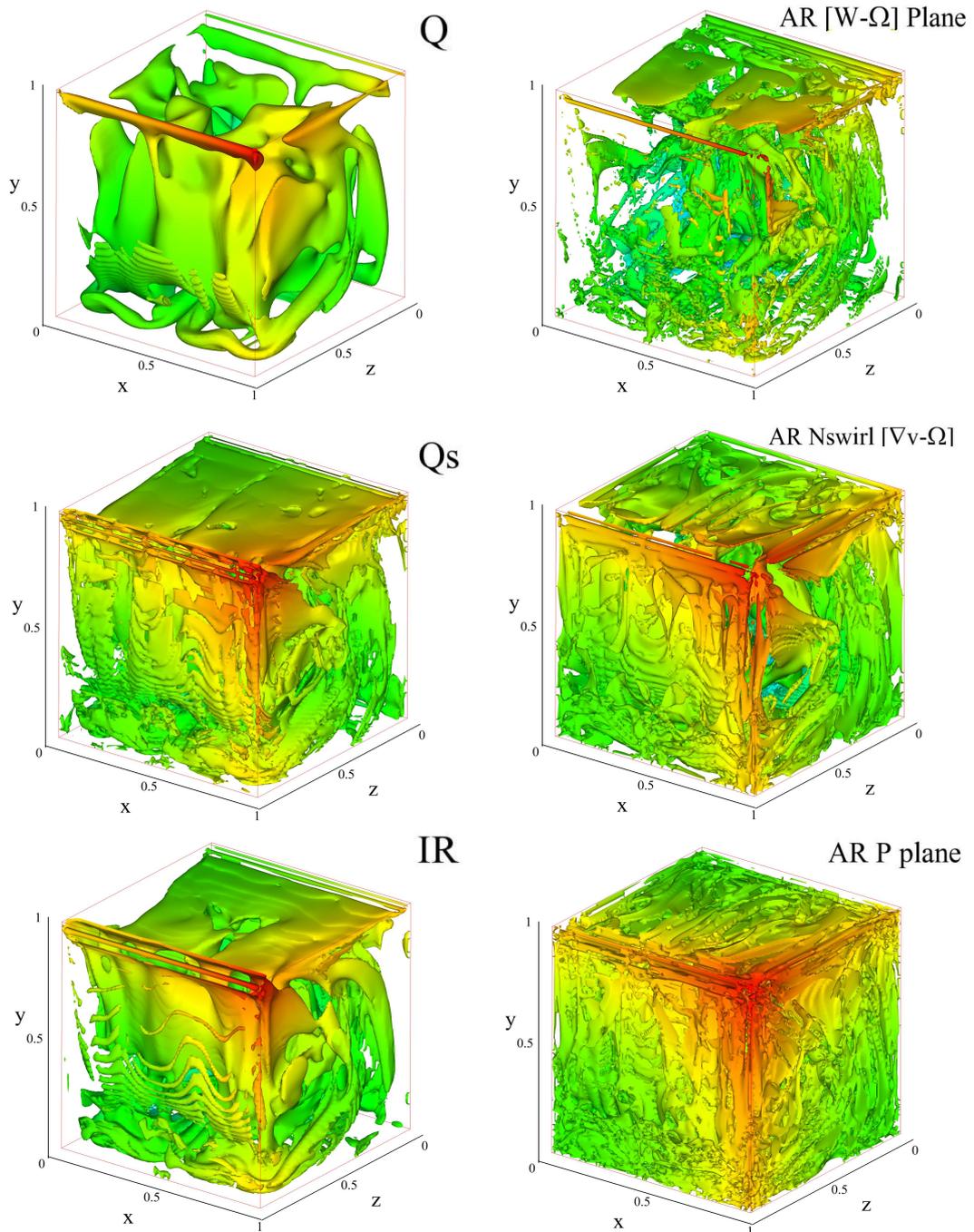


Fig. 6.19: Isosuperfícies dos operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{n_{swirls}}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 0 graus.

### 6.1.2 Avaliação dos Critérios de Identificação de Vórtices - Caso 45 Graus

O caso 45 graus contempla um tipo diferente de organização do escoamento na cavidade, assim como de suas estruturas coerentes por promover a quebra

das grandes estruturas longitudinais, como observado no caso anterior devido a mudança na direção do escoamento. As Figs. 6.20-6.25 apresentam os critérios de identificação de vórtices plotados com contornos no plano de análise 1, conforme a Fig. ???. É possível observar que comportamento semelhante dos critérios existentes e dos novos critérios com os critérios avaliados no caso cavidade 0 graus. Novamente, os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa aparecem com valores relativamente elevados na região da parede móvel, visto que os efeitos de cisalhamento são relativamente altos nessa e a tendência de divergência da vorticidade nessas regiões torna essa entidade um parâmetro não recomendável de avaliação de estruturas coerentes.

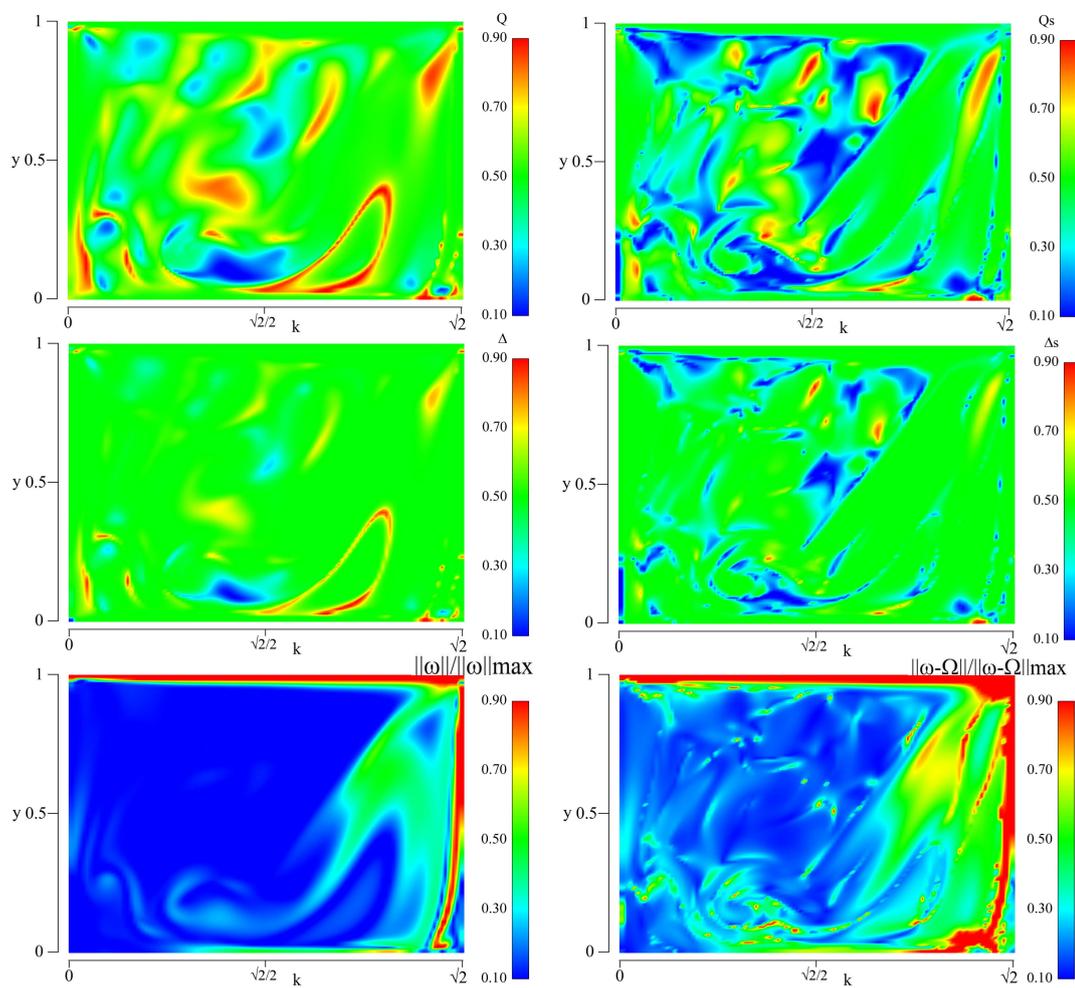


Fig. 6.20: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 1.

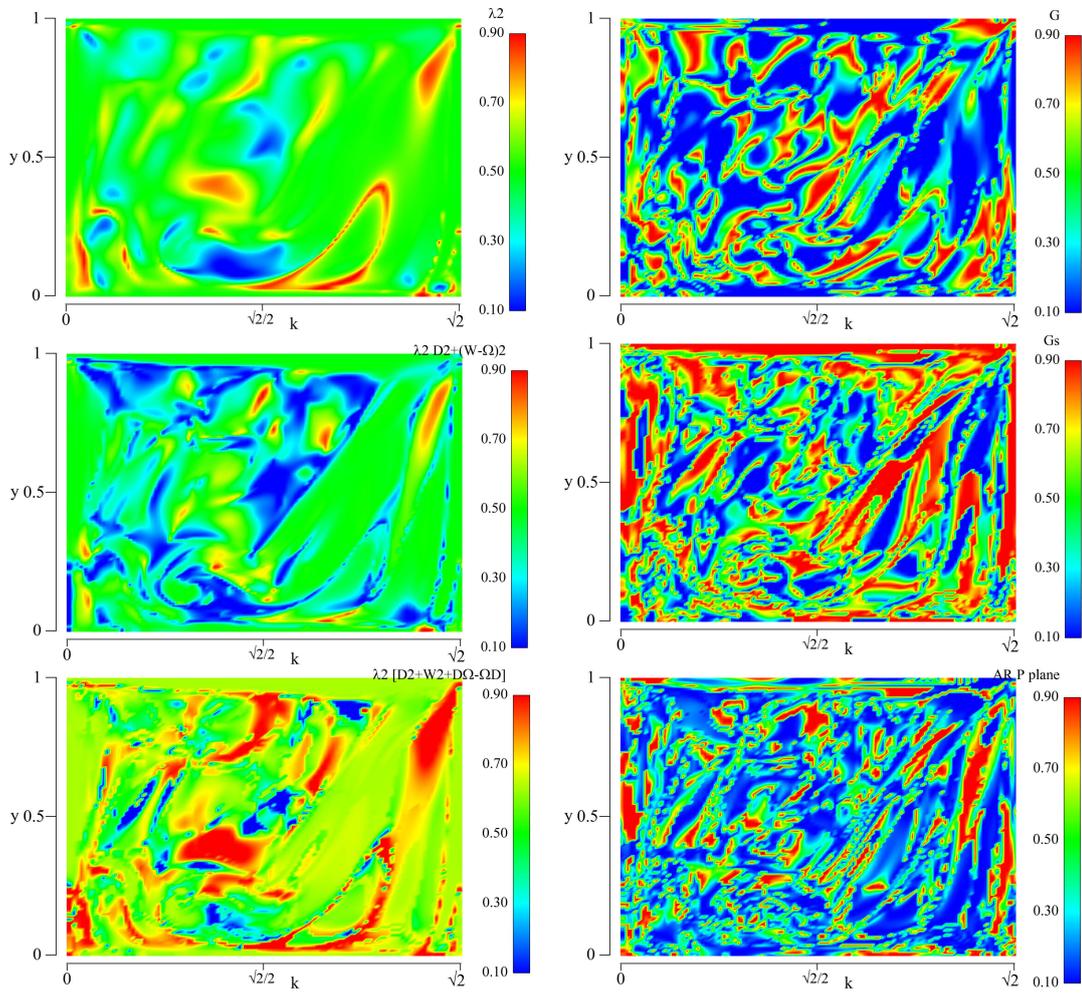


Fig. 6.21: Critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\overline{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 1.

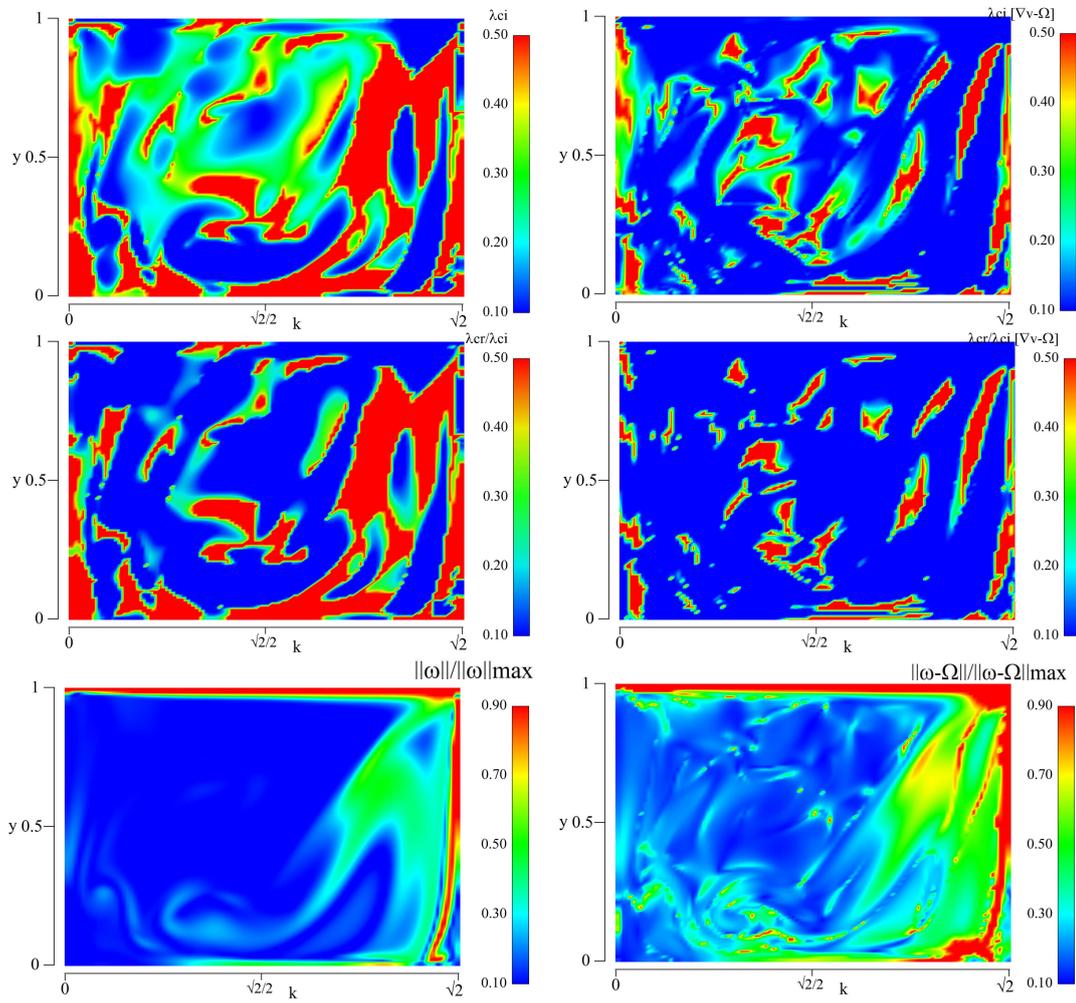


Fig. 6.22: Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla v}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 1.

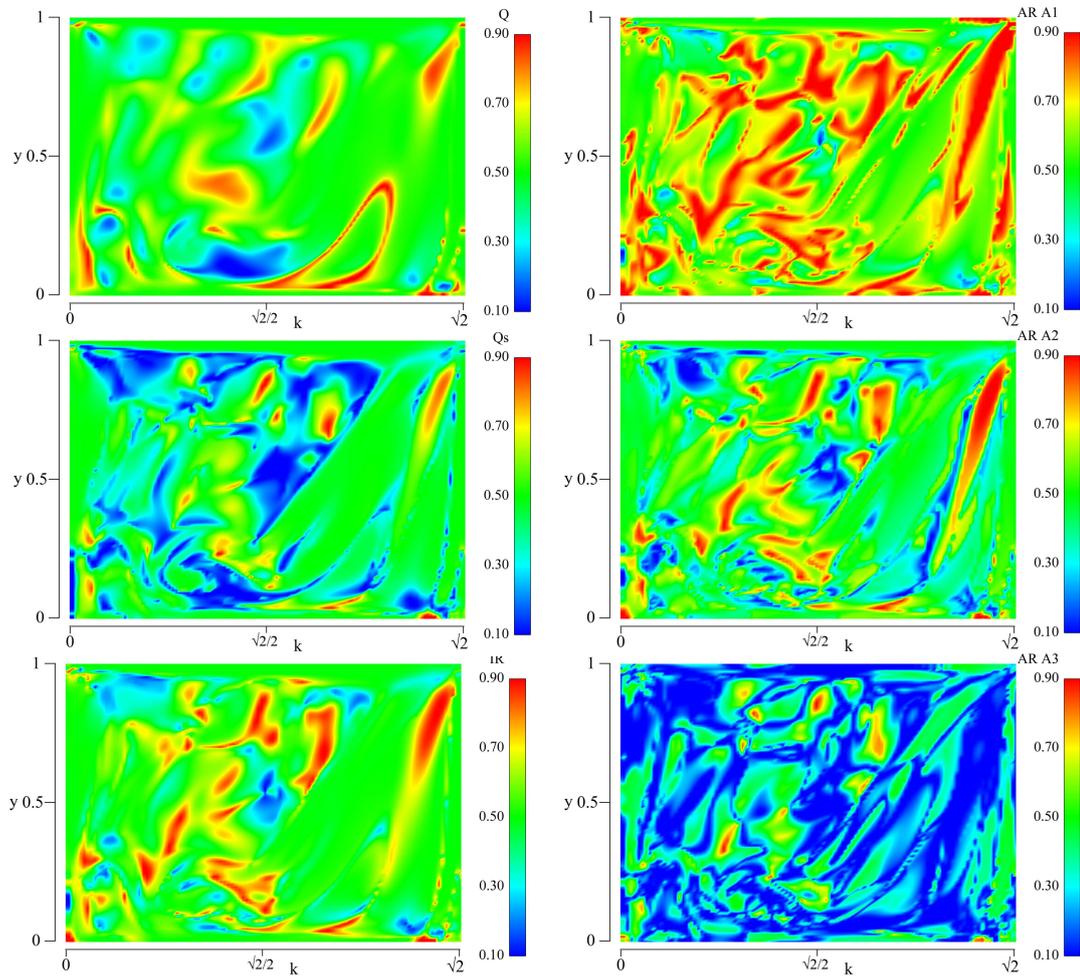


Fig. 6.23: Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 1.

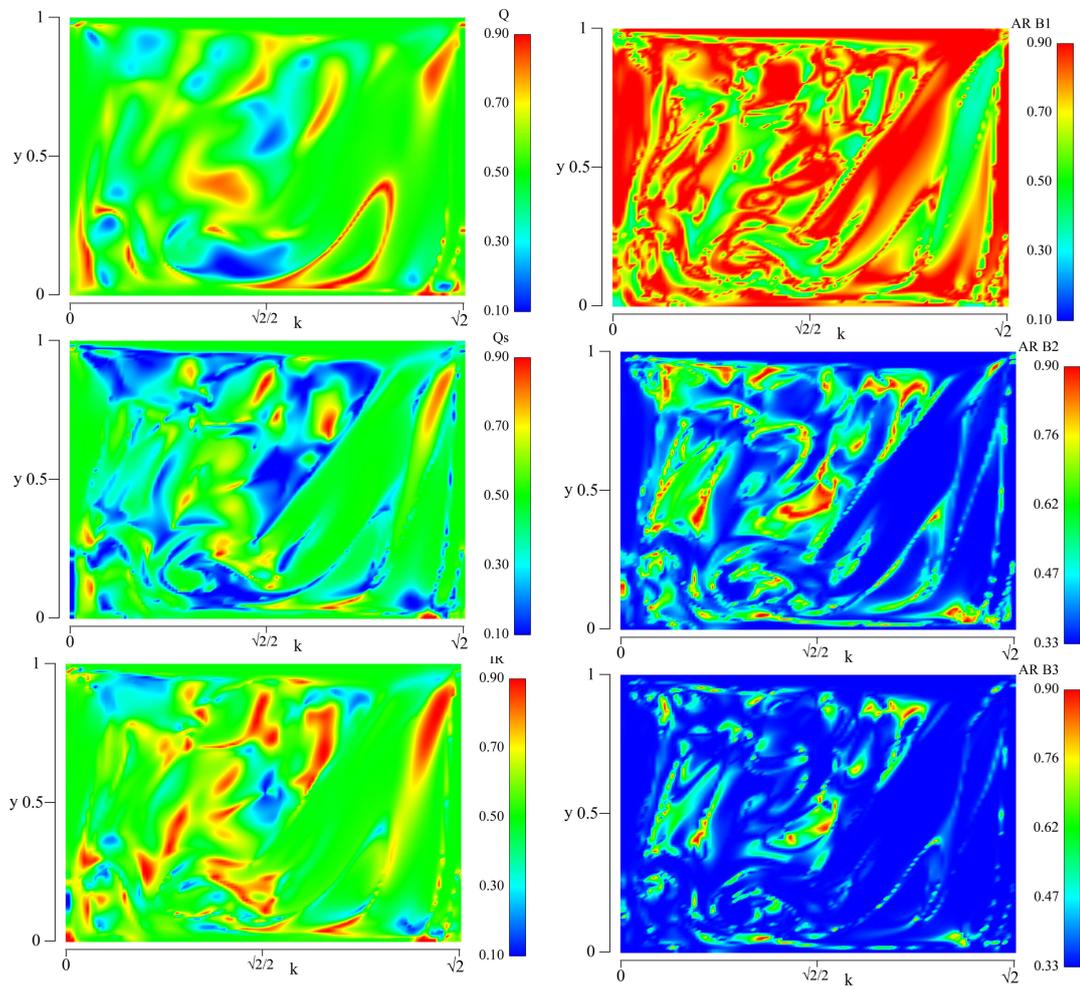


Fig. 6.24: Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 1.

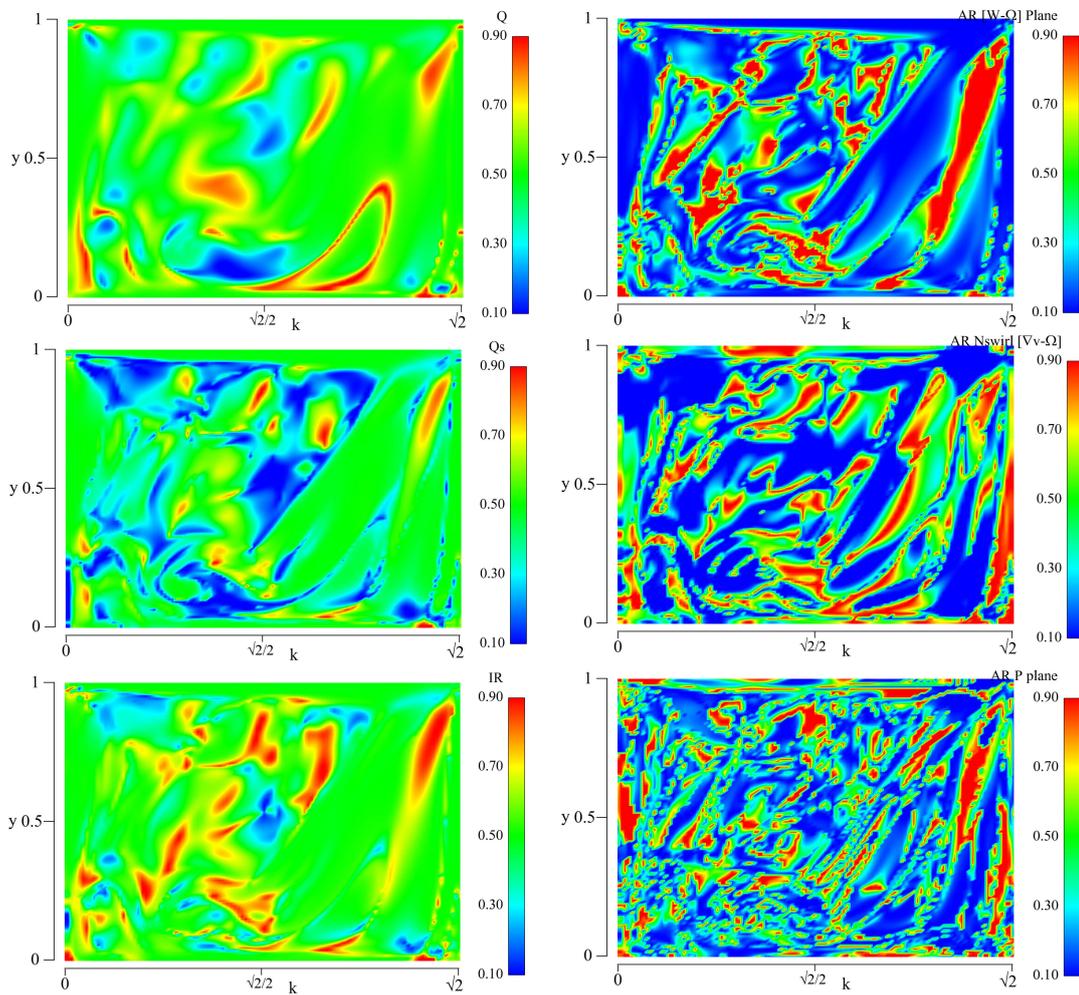


Fig. 6.25: Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{n_{swirls}}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 1.

As Figs. 6.26-6.31 apresentam os critérios de identificação de estruturas vorticiais avaliados no plano 2 (vista de topo da cavidade). Observa-se a orientação das estruturas vorticiais convergentes no escoamento, característica da orientação disposta no domínio por conta de sua geometria. As altas concentrações de vorticidade e vorticidade relativas próximas à região de convergência do domínio são fruto das altas taxa de cisalhamento nessas regiões e não devido à presença de estruturas vorticiais.

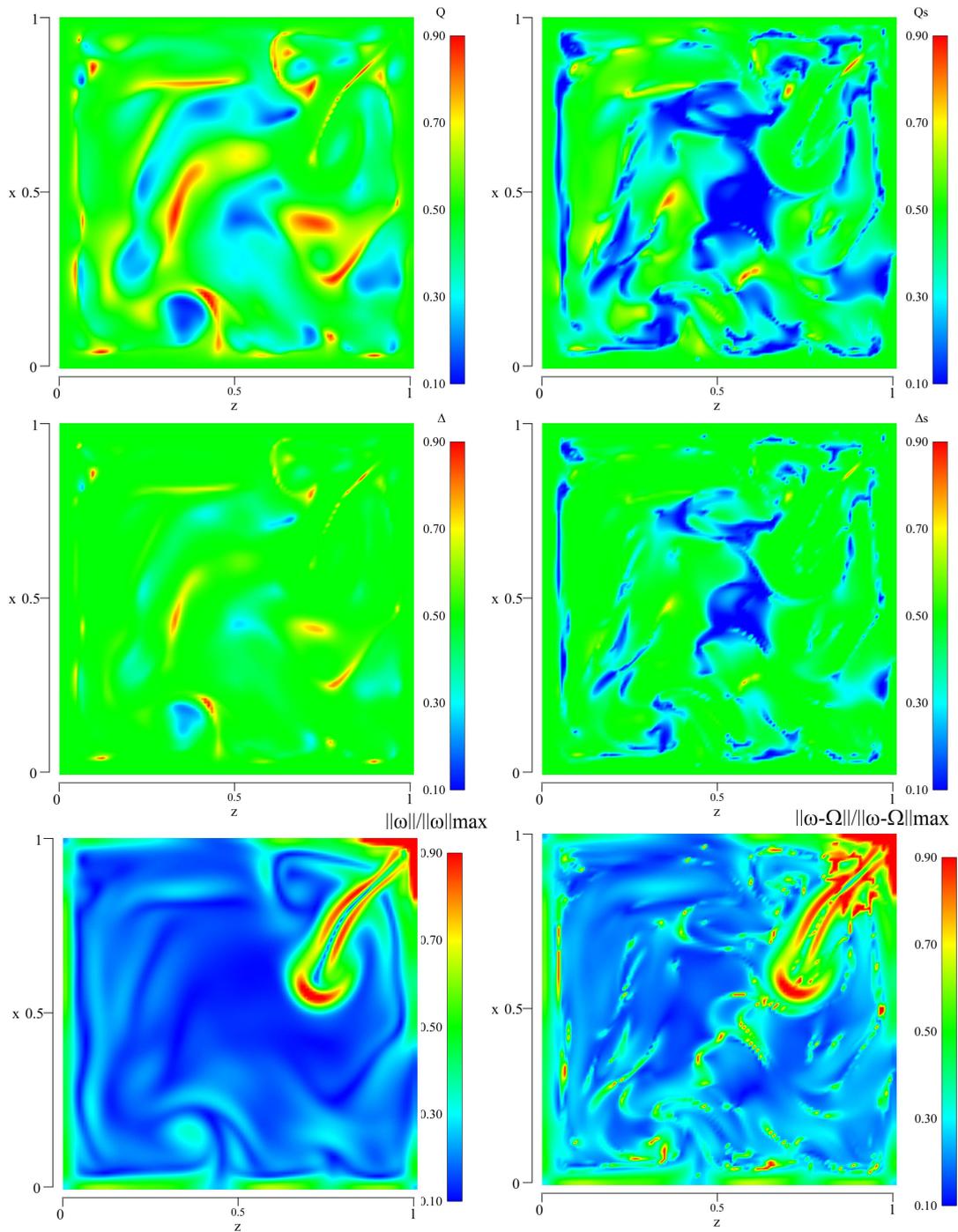


Fig. 6.26: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 2.

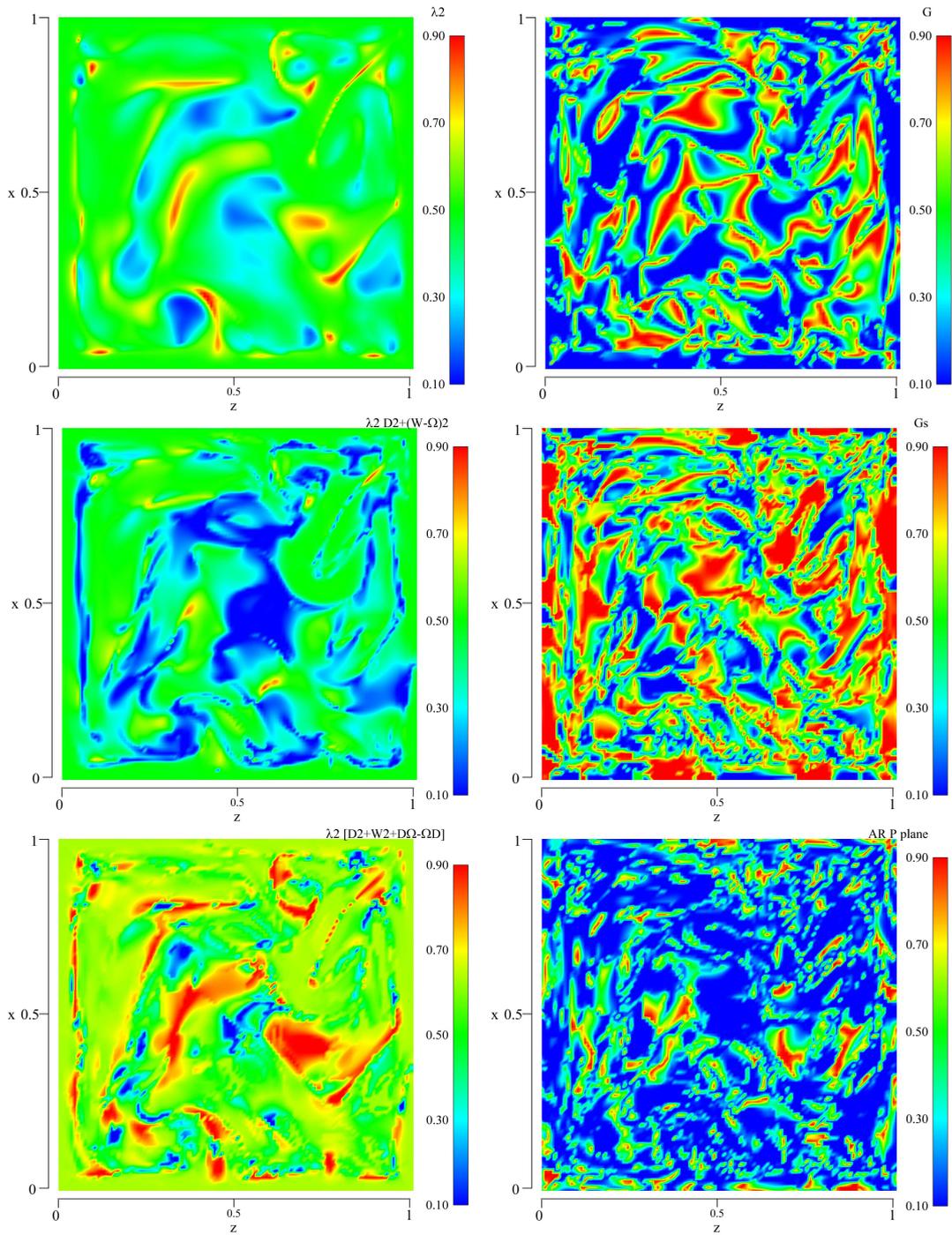


Fig. 6.27: Critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\bar{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 2.

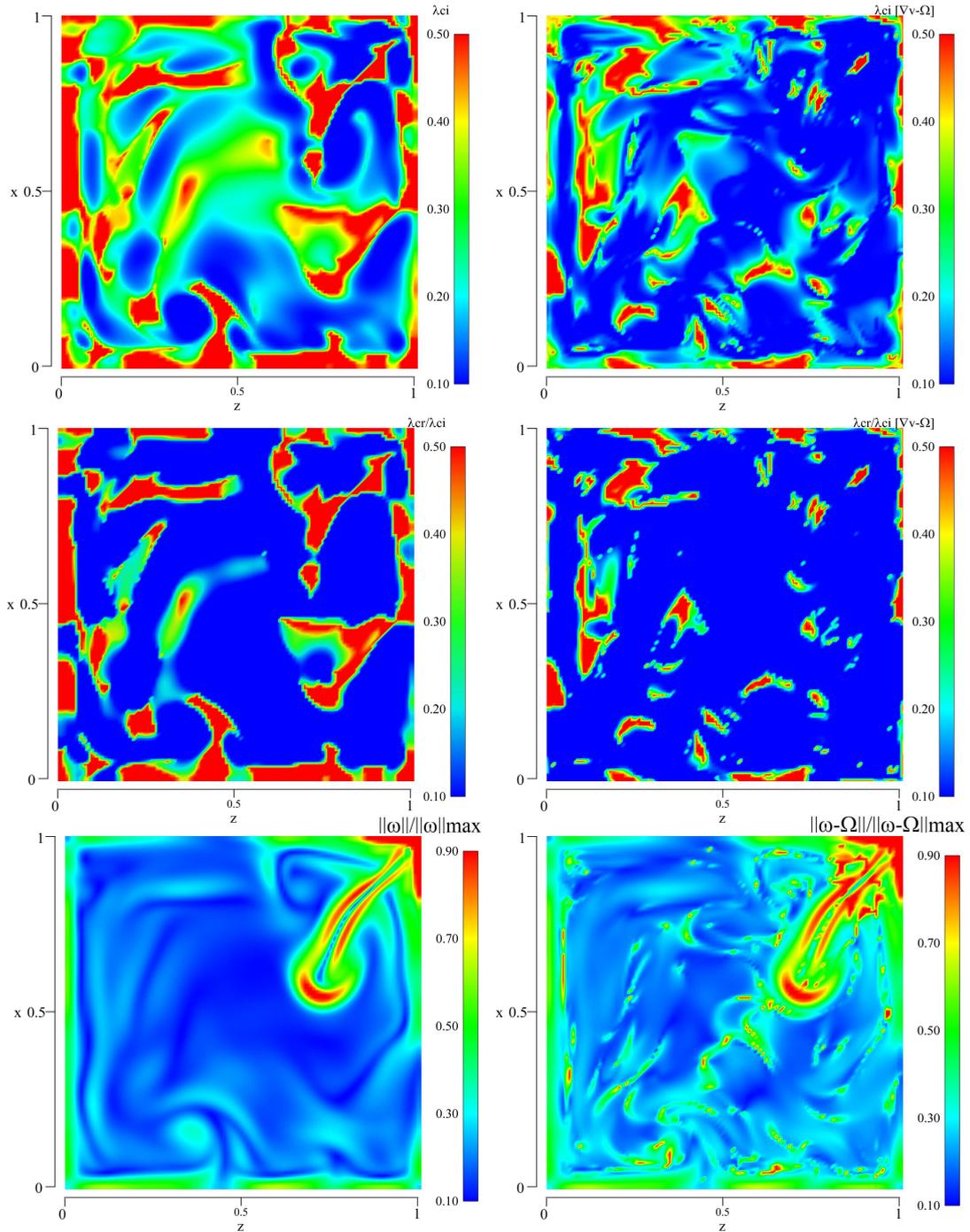


Fig. 6.28: Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ ,  $\lambda_{ci}^{\nabla v - \Omega}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v - \Omega}/\lambda_{ci}^{\nabla v - \Omega}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 2.

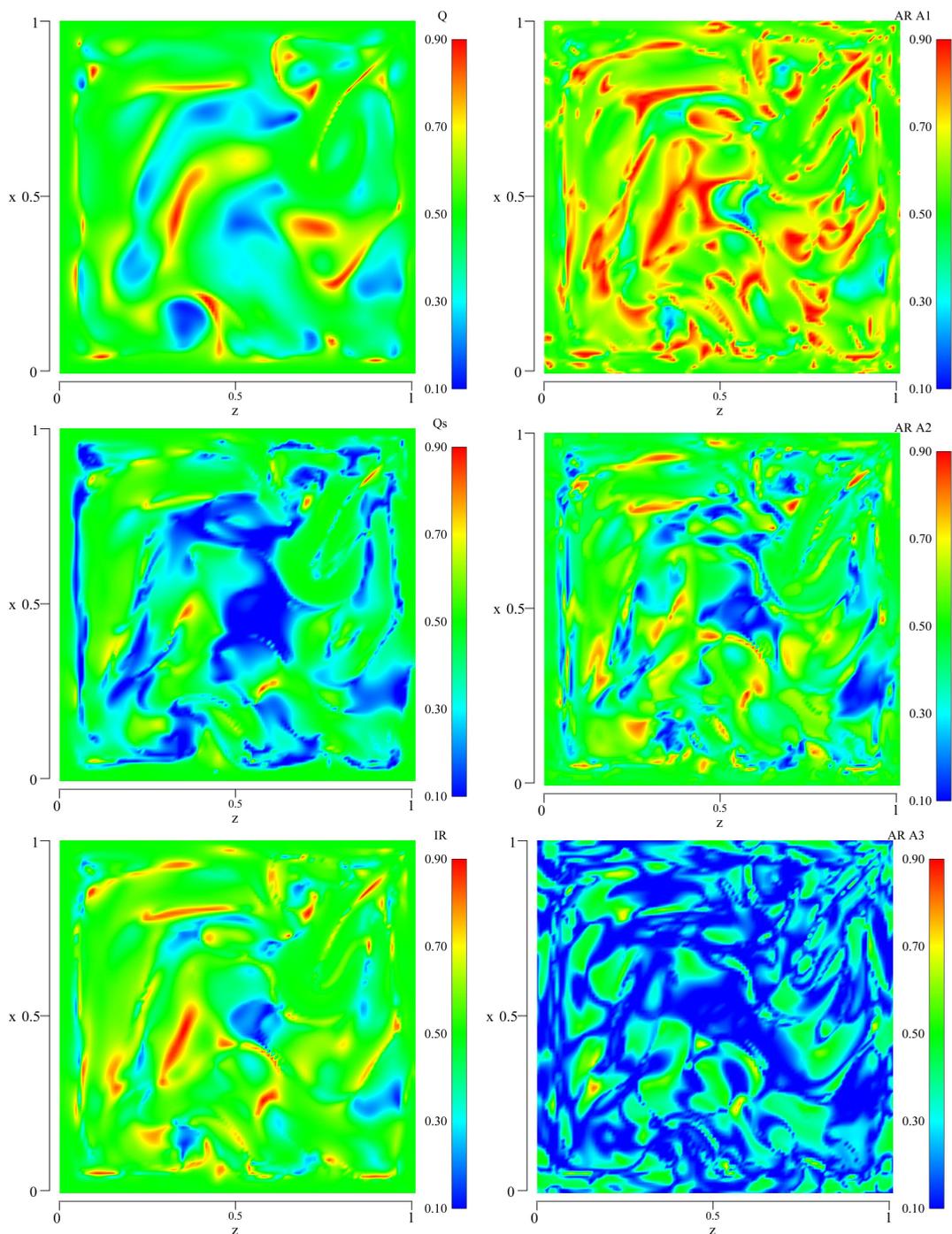


Fig. 6.29: Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 2.

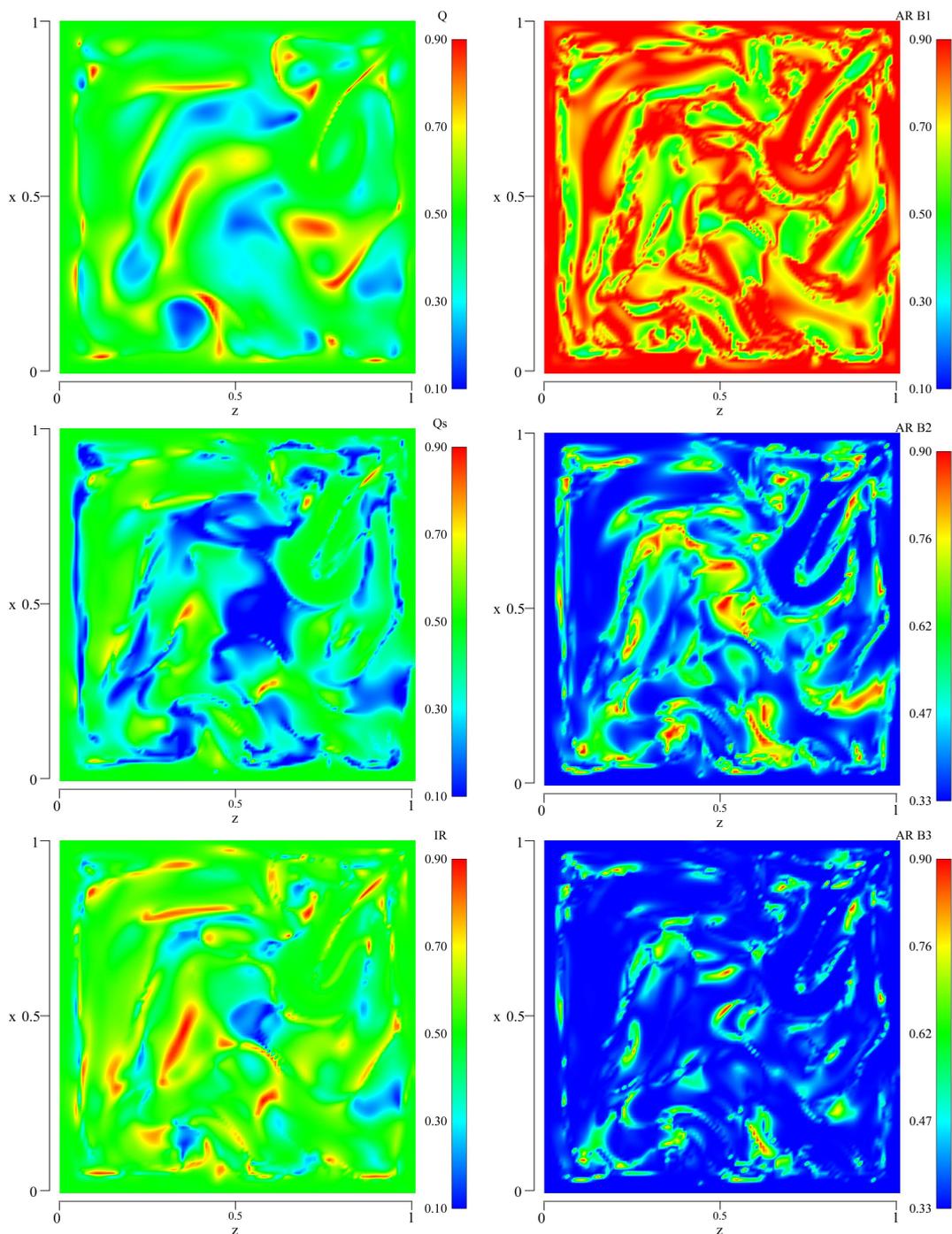


Fig. 6.30: Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 2.

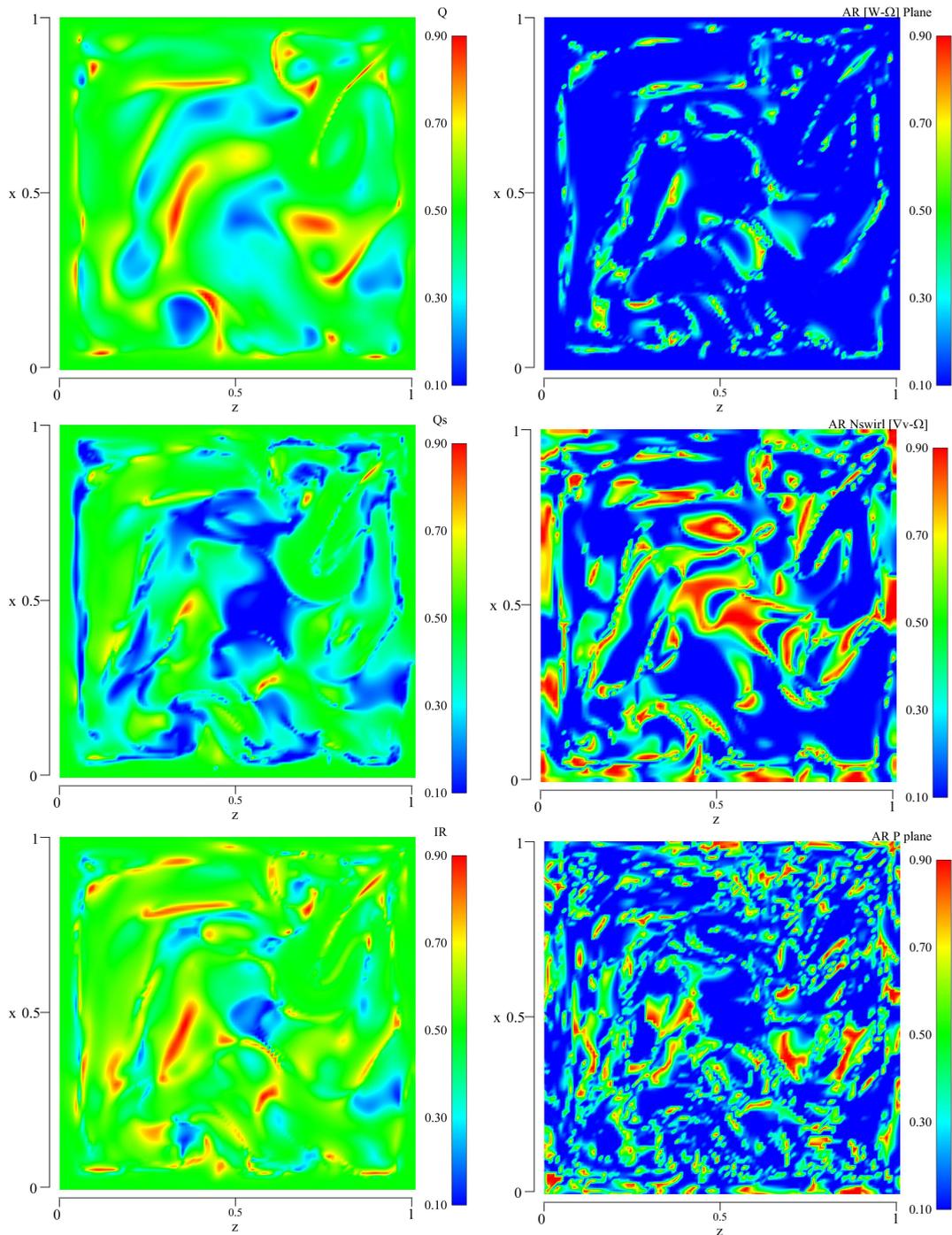


Fig. 6.31: Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{nswirls}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus - no plano 2.

As Figs. 6.32-6.36 apresentam isosuperfícies igual a 0.5 para todos os critérios assim como para a vorticidade e para vorticidade relativa dividido pelos seus valores máximos. É possível observar a mudança na disposição das estruturas coerentes, em menor tamanho e em maior número, com relação às estruturas obtidas no caso anterior.

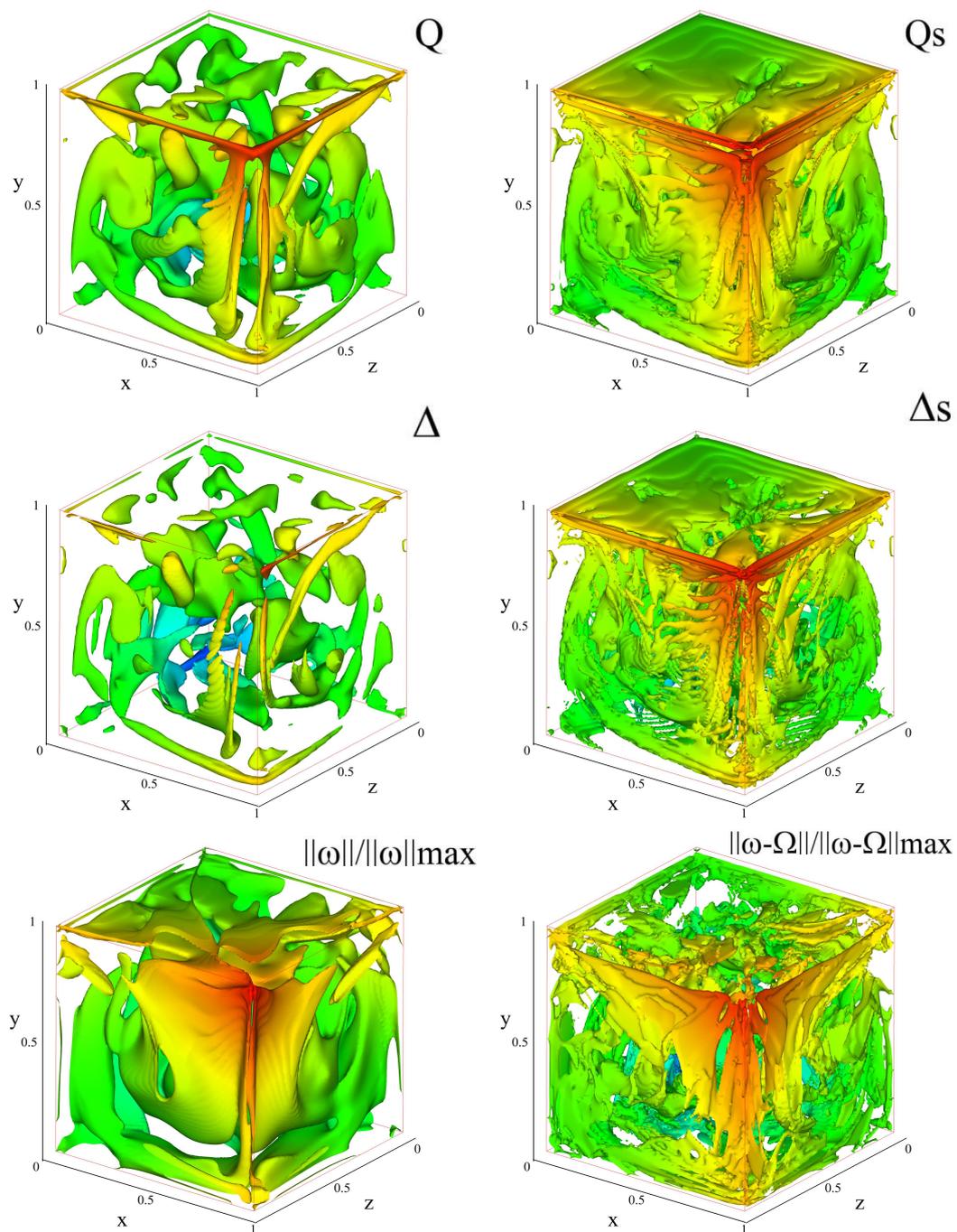


Fig. 6.32: Isosuperfícies dos critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus.

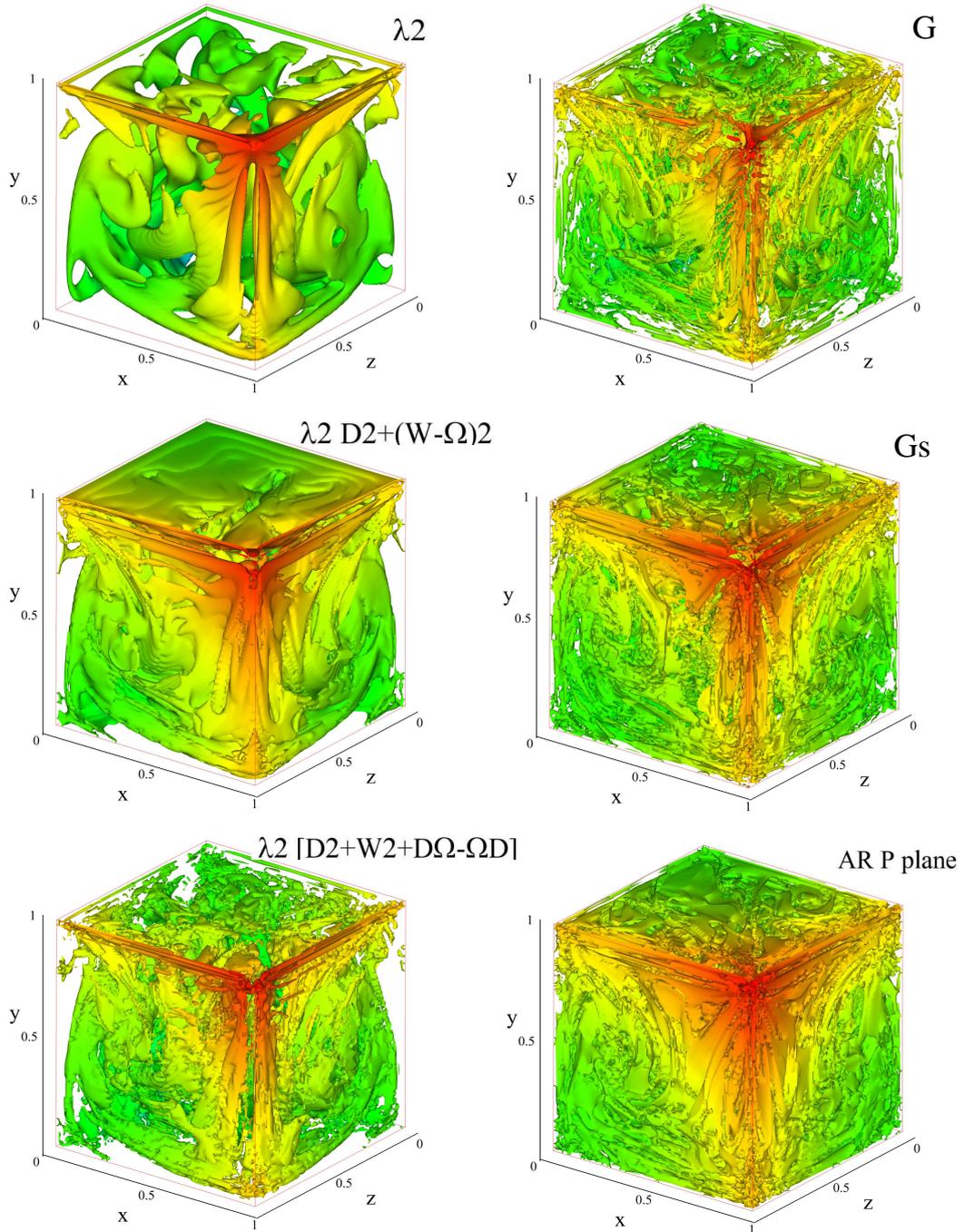


Fig. 6.33: Isosuperfícies dos critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\overline{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus.

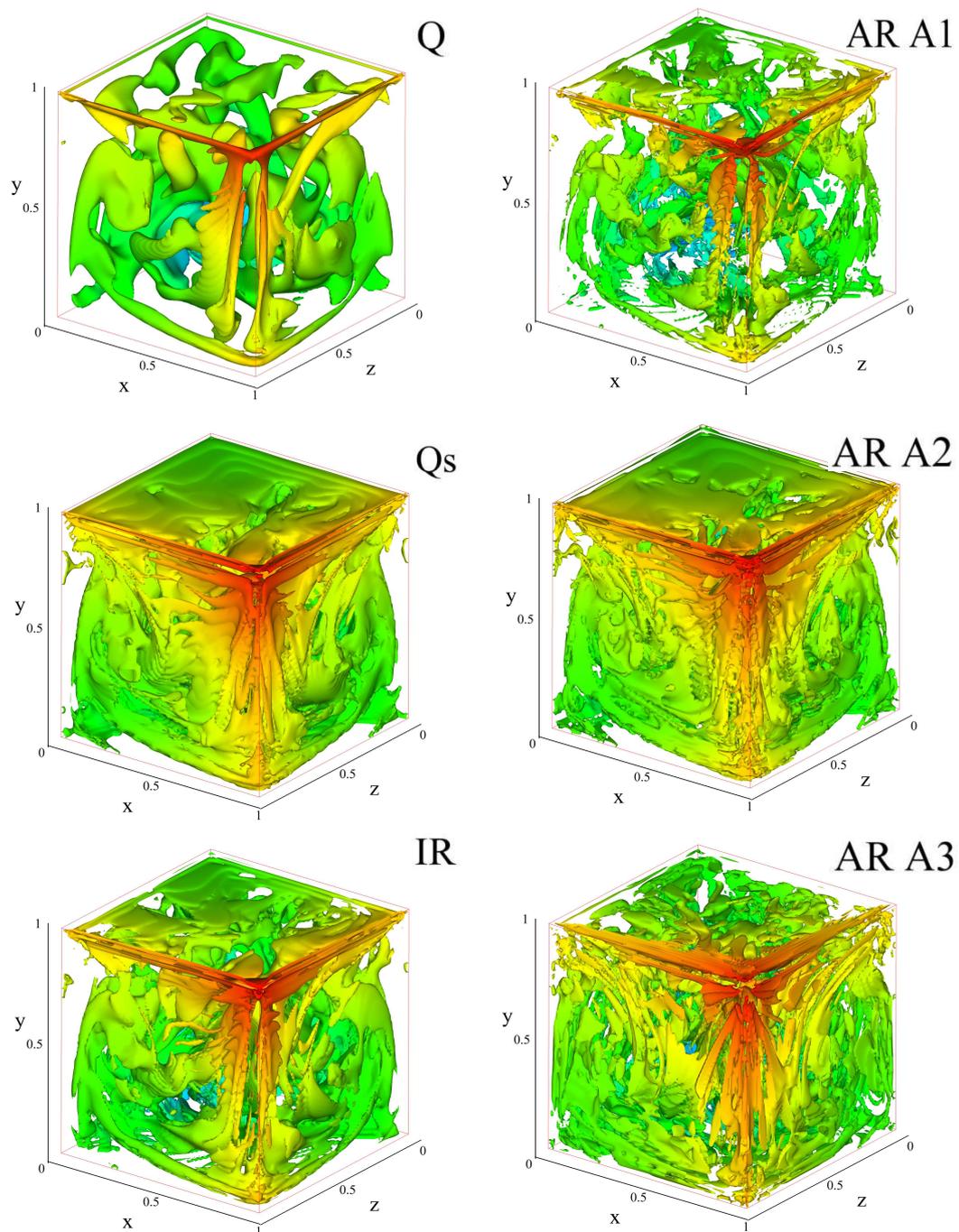


Fig. 6.34: Isosuperfícies dos operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus.

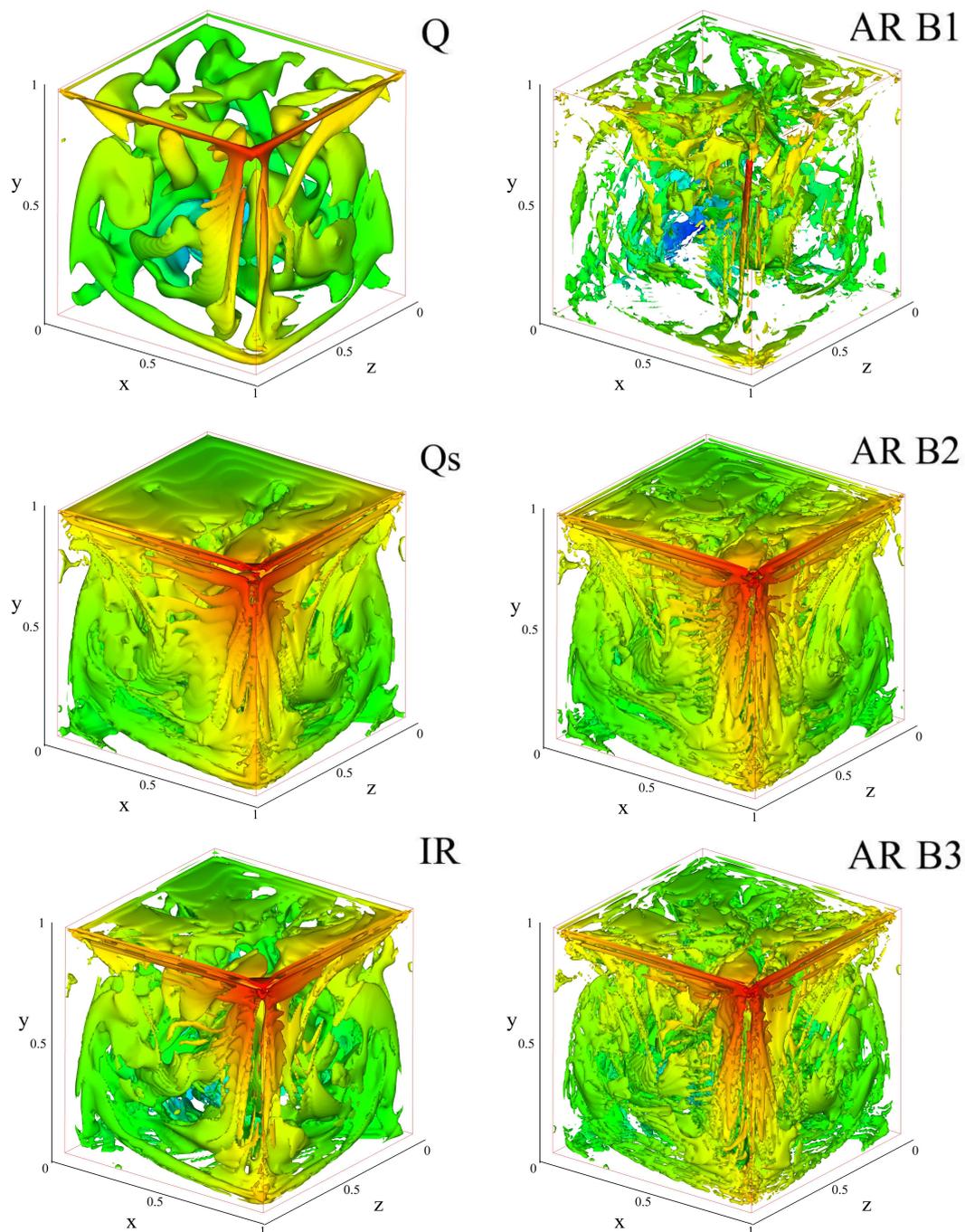


Fig. 6.35: Isosuperfícies dos operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  iguais a 0.5 para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus.

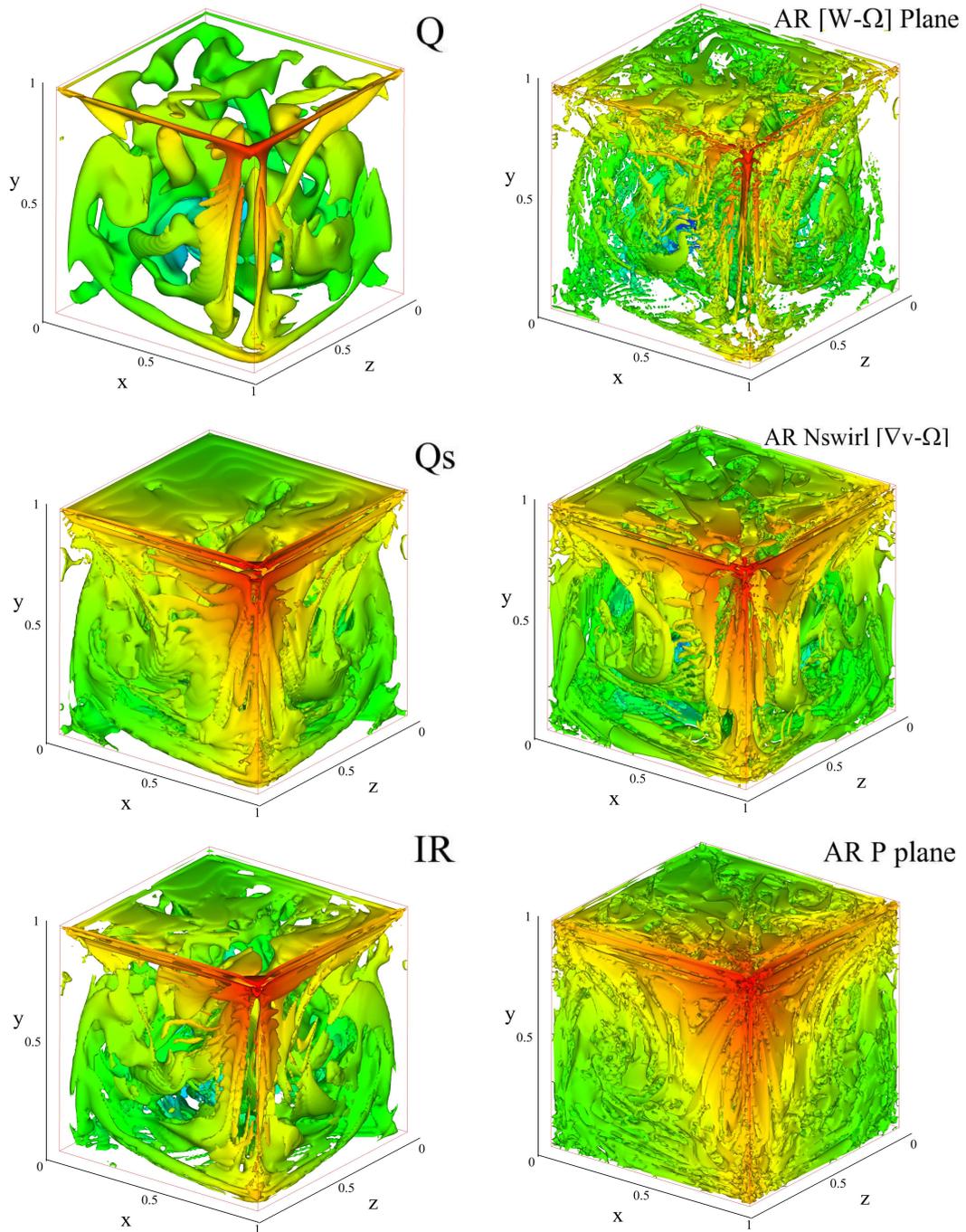


Fig. 6.36: Isosuperfícies dos operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{n_{swirls}}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento em cavidade - Caso 45 graus.

## 6.2 Turbulência Isotrópica Forçados

Os resultados numéricos obtidos a partir da base de dados em turbulência da Universidade John Hopkins [20] foram analisados a partir dos critérios avaliados no presente trabalho. A base de dados consiste de resultados obtidos da sim-

ulação numérica direta da turbulência isotrópica forçada em um domínio cúbico de dimensões  $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$ . A malha computacional é isotrópica com sua resolução de  $1024 \times 1024 \times 1024$  elementos, onde todas as fronteiras são periódicas e um solver pseudo-espectral é utilizado para a solução das equações pertinentes ao problema. A energia é inserida no domínio de forma a manter o número de onda próximo a 2. Após atingido o estado estacionário estatisticamente, 1024 passos de tempo foram capturados e o tempo total de simulação foi considerado a partir do tempo necessário para uma volta completa em torno do próprio eixo das maiores escalas (2.02). O número de Reynolds baseado na microescala de Taylor é igual a 433. A escala de comprimento de Kolmogorov é igual a 0.00287 e a escala de tempo igual a 0.0466. A Fig. 6.37 apresenta o espectro de energia médio no tempo. A Fig. 6.38 dispõe a energia instantânea e o número de Reynolds baseado na micro escala de Taylor ao longo do tempo. Na figura, o intervalo de tempo negativo diz respeito aos acontecimentos antes de reconhecido estatisticamente o desenvolvimento da turbulência.

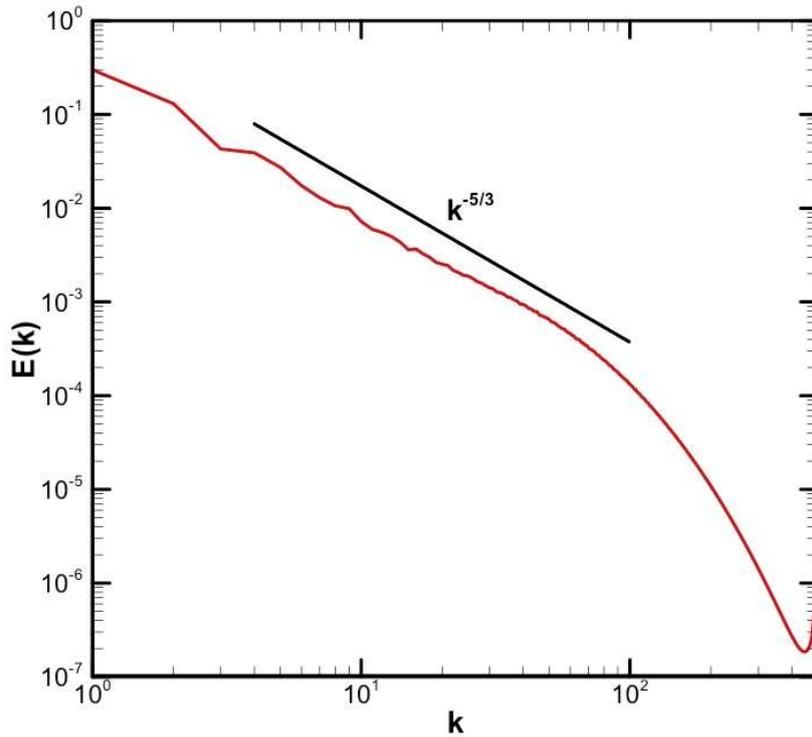


Fig. 6.37: Espectro de energia médio temporal avaliado na simulação de turbulência isotrópica da base de dados em turbulência da Universidade John Hopkins. Retirado de [20]

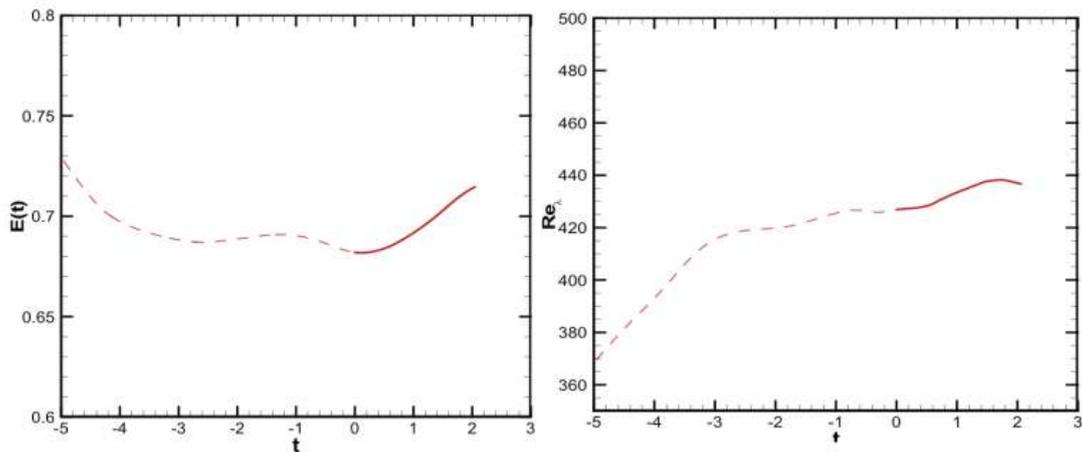


Fig. 6.38: Energia cinética instantânea e número de Reynolds  $Re_\lambda$ . Retirado de [20]

A base de dados oferece a avaliação pontual dos campos pertinentes ao problema como velocidade, gradiente de velocidades, Hessiana da velocidade e pressão e etc., utilizando esquemas advectivos que vão de 4<sup>a</sup> ordem até 8<sup>a</sup> ordem. Além

disso, o sítio eletrônico da base de dados fornece acesso dos dados em uma nuvem de pontos fornecidas pelo usuário, inclusive com acesso direto via *web services*.

Os gráficos das Figs. 6.39-6.44 apresentam os critérios de identificação de vórtices em contornos para um plano de corte para o caso de simulação de turbulência forçada retirado da base de dados da Universidade John Hopkins, avaliados no instante de tempo 1.0 (estão liberados instantes de tempo de 0.0-2.048 a partir do instante constatada a turbulência como desenvolvida) em um plano  $z = \pi$ , com limites das outras dimensões em  $0 \leq x \leq \pi/2$  e  $0 \leq y \leq \pi/2$ . Apesar de representar somente 1/16 do domínio, a região apresentada mostra a heterogeneidade das estruturas dispostas ao longo do domínio, tanto nos critérios existentes quanto nos novos critérios propostos no presente trabalho.

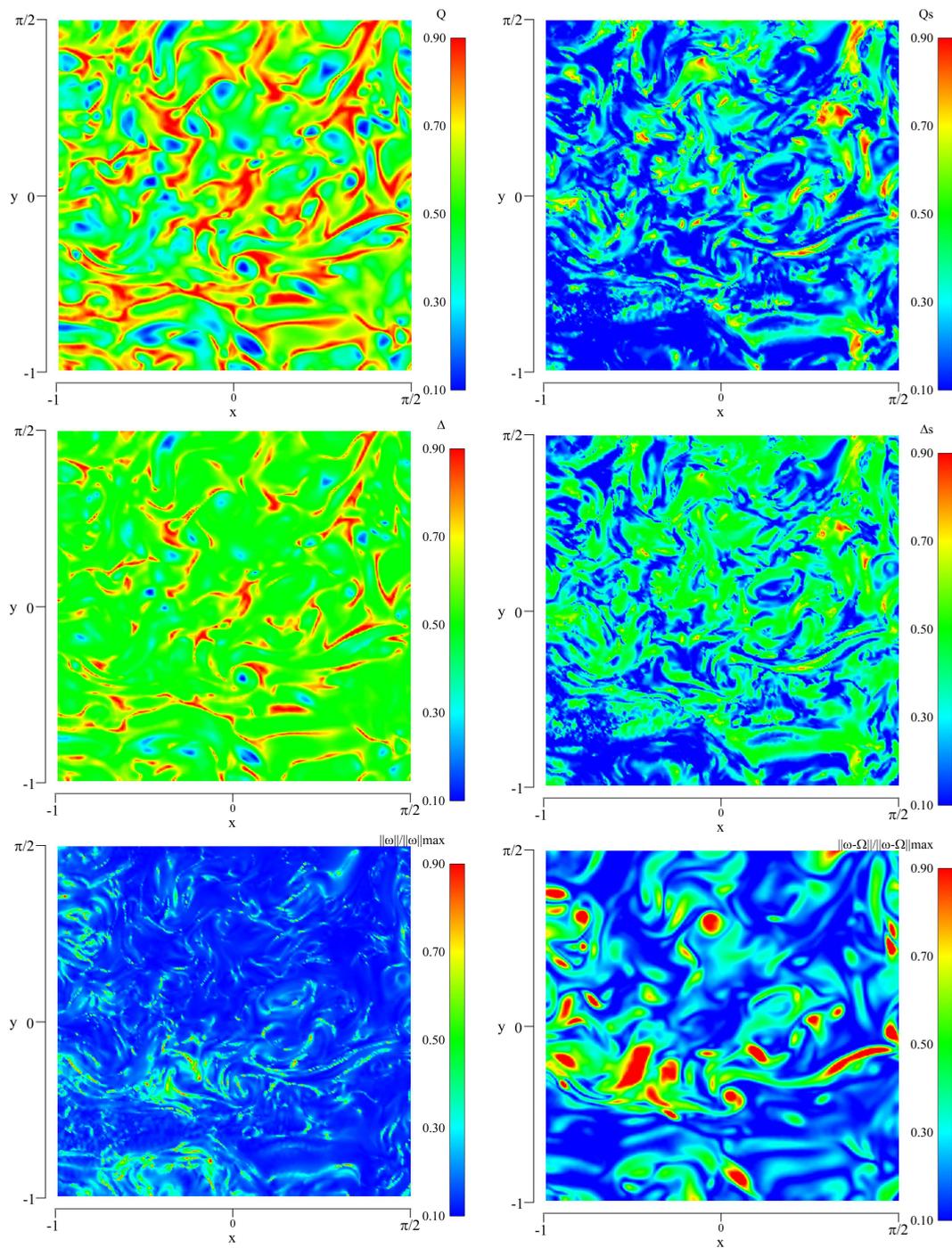


Fig. 6.39: Critérios  $Q$ ,  $Q_s$ ,  $\Delta$  e  $\Delta_s$ , e os módulos da vorticidade e da vorticidade relativa, ponderadas pelos seus valores máximos para o escoamento de turbulência isotrópica forçada.

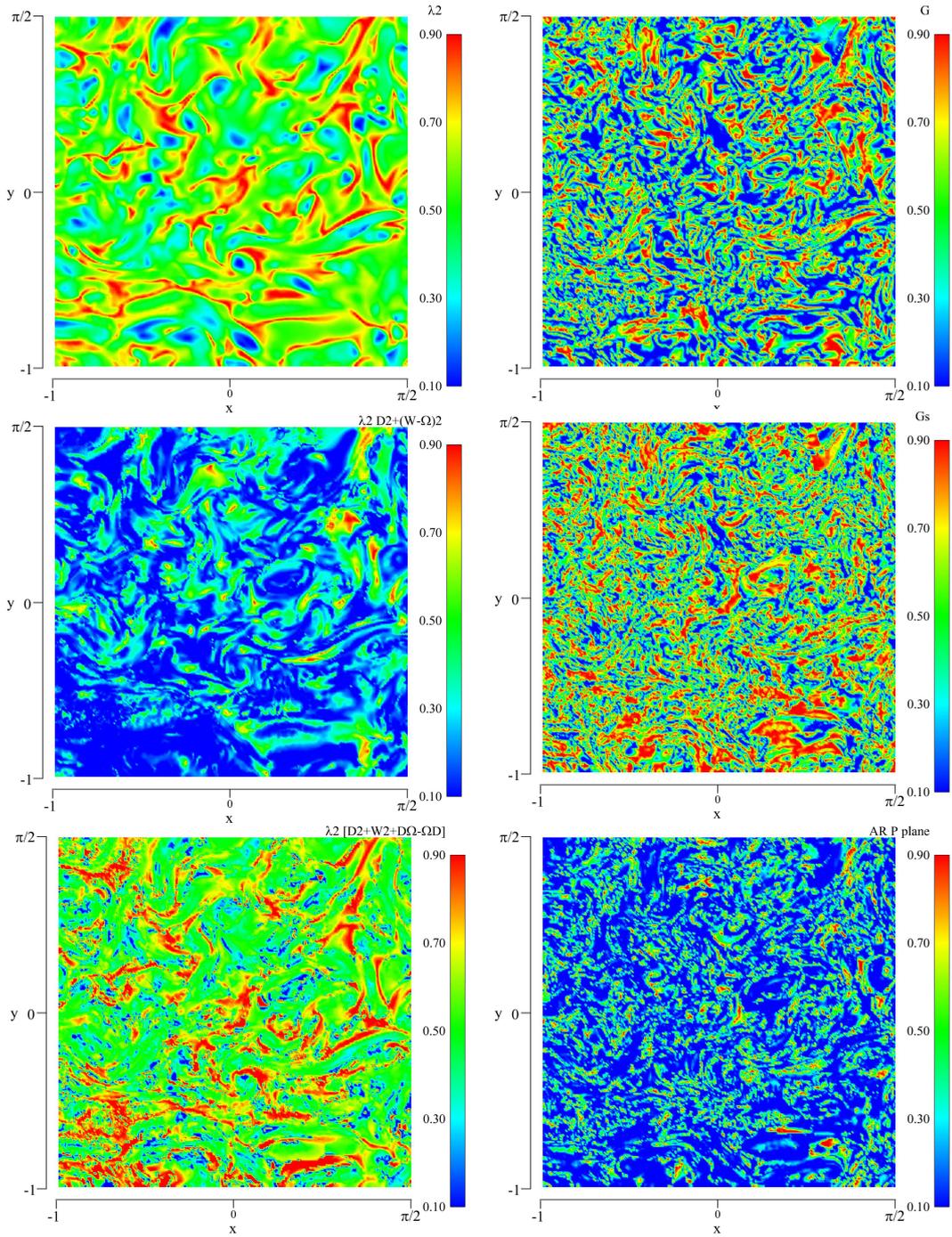


Fig. 6.40: Critérios  $\lambda_2^{D^2+W^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+\bar{W}^2}$ ,  $\lambda_2^{D^2+W^2+D\Omega-\Omega D}$ ,  $G$  e  $G_s$ , além do operador  $AR^P$  para o escoamento de turbulência isotrópica forçada.

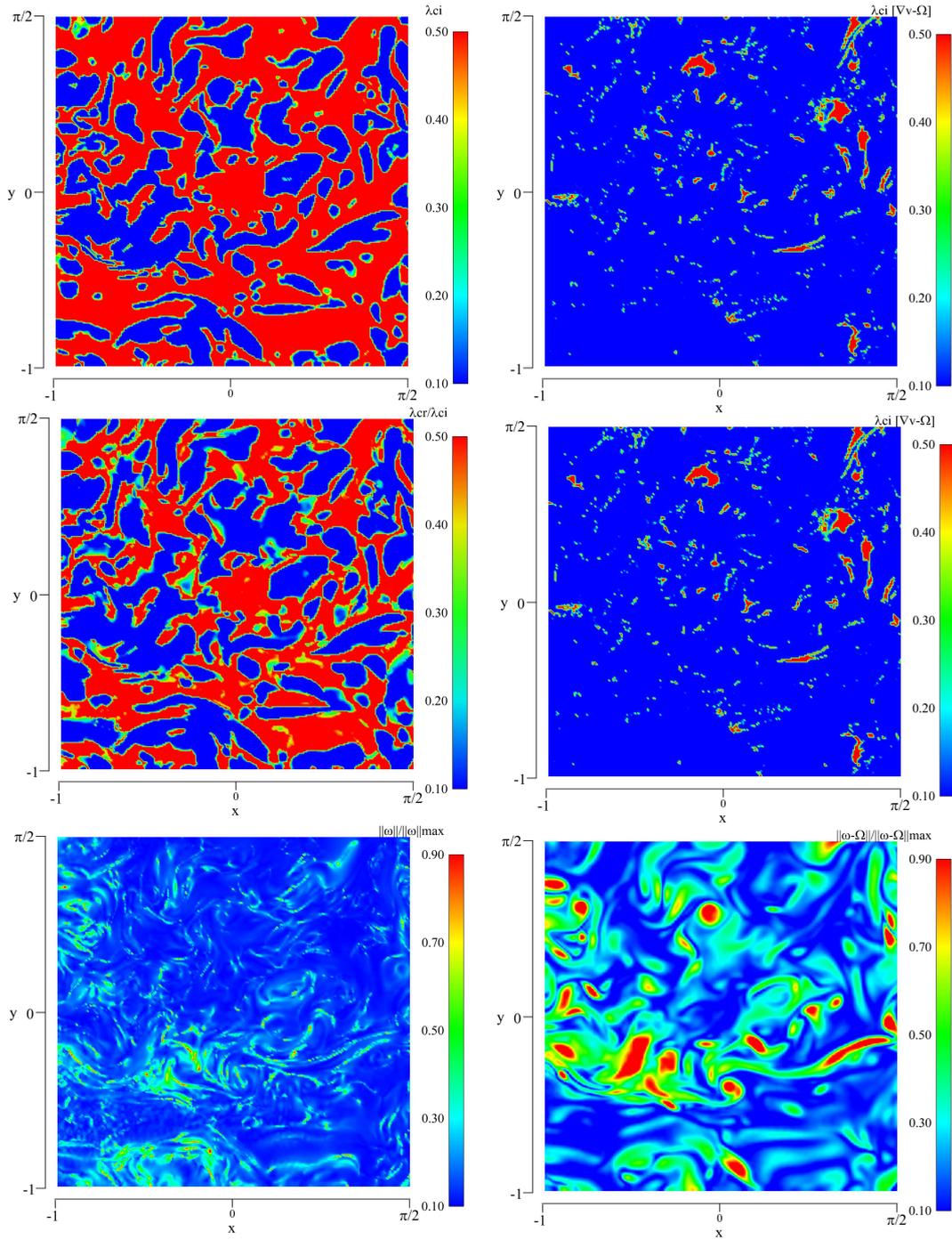


Fig. 6.41: Operadores  $\lambda_{ci}^{\nabla v}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla v}/\lambda_{ci}^{\nabla v}$ ,  $\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\overline{\nabla v}}/\lambda_{ci}^{\overline{\nabla v}}$ , além dos módulos da vorticidade e da vorticidade relativa para o escoamento de turbulência isotrópica forçada.

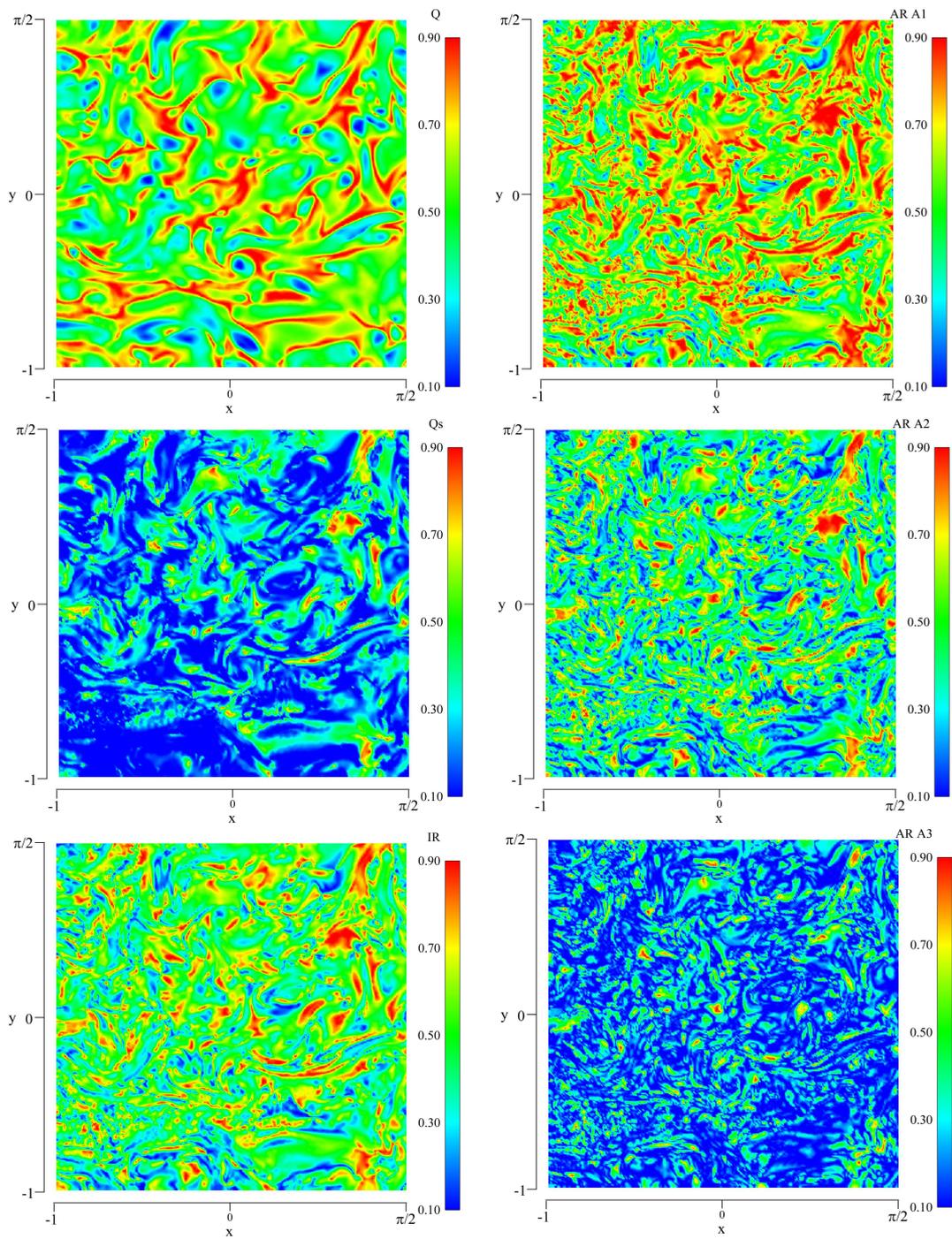


Fig. 6.42: Operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de turbulência isotrópica forçada.

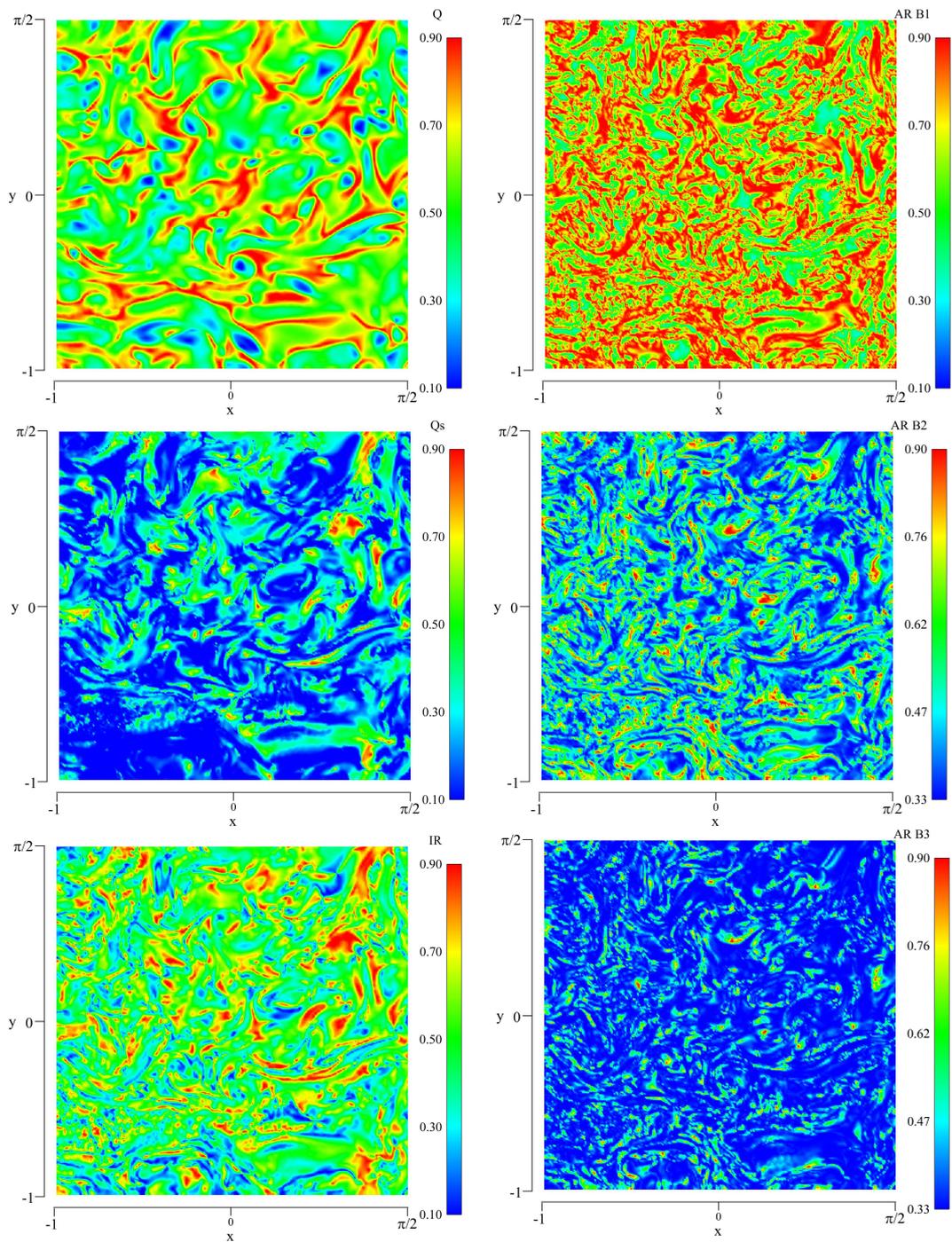


Fig. 6.43: Operadores  $AR_{1,2,3}^B$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de turbulência isotrópica forçada.

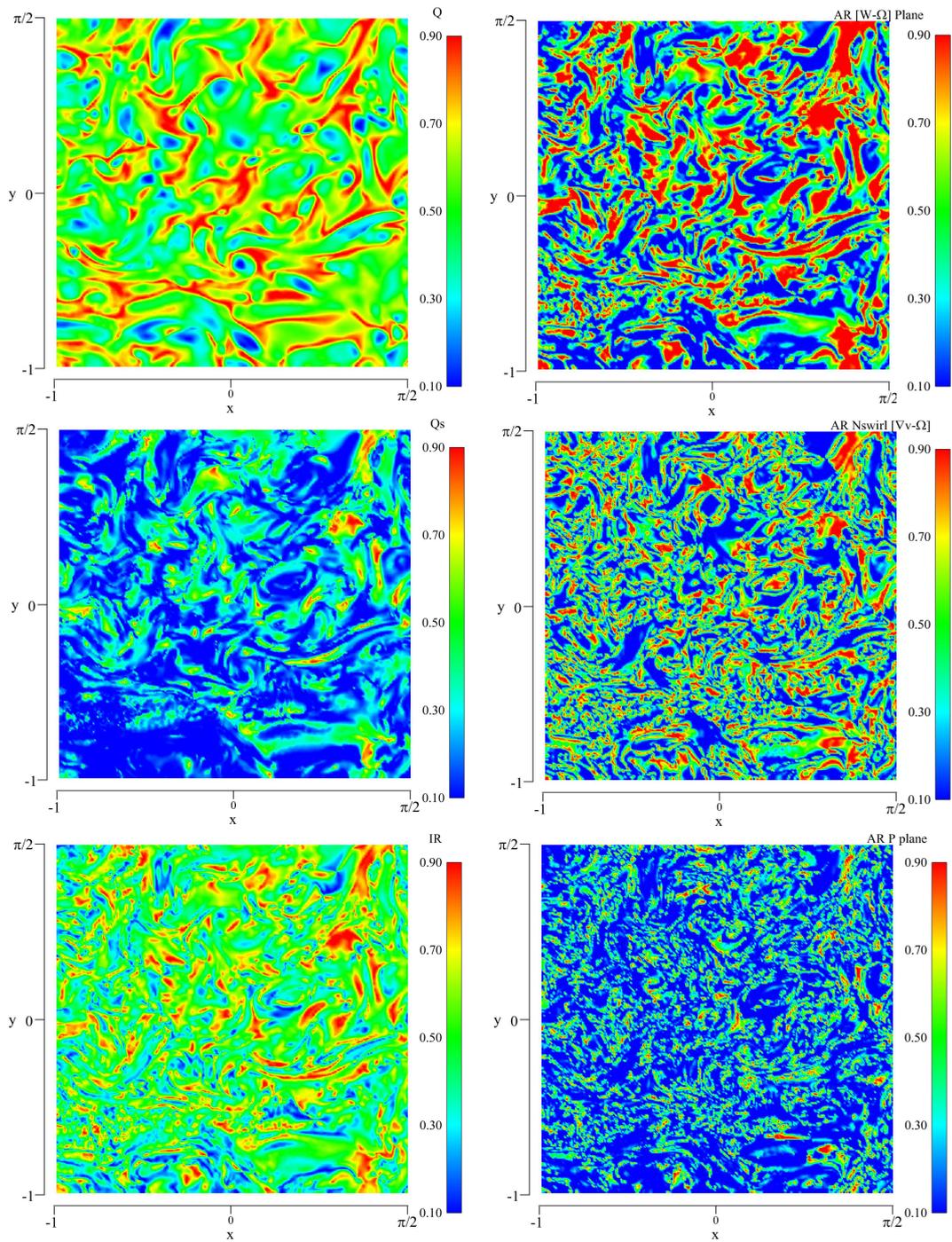


Fig. 6.44: Operadores  $AR^{\omega-\Omega}$ ,  $AR^{nswirls}$  e  $AR^P$  e  $IR$  avaliados com os critérios  $Q$  e  $Q_s$  para o escoamento de turbulência isotrópica forçada.

# Capítulo 7

## Conclusões

A identificação de vórtice é um tema de grande complexidade e ainda hoje não existe uma teoria consensual sobre o assunto. Diferentes critérios foram propostos ao longo dos anos com aplicação em diferentes escoamentos, mas todos apresentam deficiências e limitações. A busca por um critério geral requer o conhecimento das diferentes disciplinas que compõem a mecânica dos fluidos e o que o presente trabalho tem por objetivo é mostrar a importância dessa integração. Os novos critérios propostos nesse trabalho e que se fundamentam em estudos relacionados à mecânica dos fluidos viscoelásticos e à classificação de escoamentos não-newtonianos, foram incorporados ao estudo de escoamentos caóticos e turbulentos, apresentando resultados interessantes.

Diferentes concepções de critérios foram propostas ao longo dos anos. Os critérios baseados nos invariantes do tensor gradiente de velocidade avaliam de forma isotrópica a existência de estruturas vorticais no domínio. Os critérios  $Q$  e  $\Delta$  apresentaram relativa semelhança em todos os casos analisados, enquanto que o critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$  corroborou com a identificação dos dois anteriores em alguns casos, como no escoamento ABC e de uma gota imersa em fluido de Stokes, mas apresentou relativa diferença nos escoamentos turbulentos. Por se tratarem de critérios consagrados, que apresentam um número considerável de trabalhos publicados que os utilizam, o presente trabalho recomenda seu uso,

principalmente do critério  $\lambda_2^{\mathbf{D}^2+\mathbf{W}^2}$ , para estudos que não tenham o compromisso quanto a mudança no observador e que desejarem uma análise qualitativa do escoamento.

Os operadores que  $\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  e  $\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}}/\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}$  que compõem um critério, poderiam ser avaliados por um único operador que relaciona-se com esses dois parâmetros, sem divergir quando a parte real relativa ao autovalor complexo do gradiente de velocidades for nulo, por exemplo, dado pela relação

$$\frac{\lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}}{\lambda_{cr}^{\nabla\mathbf{v}} - \lambda_{ci}^{\nabla\mathbf{v}}} \quad (7.1)$$

O parâmetro definido acima incorpora a avaliação dos dois critérios e pode ser utilizado sem a implementação de dois patamares subjetivos. Entretanto, como vimos anteriormente, os operadores apresentam deficiências que podem ser corrigidas se avaliados simultaneamente por outros operadores discutidos nesse trabalho, formando um critério único, como, por exemplo, conjuntamente com o operador  $H_e$ . Esse operador por sinal, assim como a helicidade  $H$ , faz parte de uma classe de identificadores de vórtices que avaliam alinhamentos entre vetores pertinentes ao processo de formação e evolução de estruturas vorticais. Esse tipo de proposta é relativamente nova, com poucos trabalhos apresentados e que o utilizam em escoamentos caóticos ou turbulentos, apesar de ser promissora.

A vorticidade não foi utilizada no presente trabalho como um critério de identificação de vórtices, apesar de ser disposta nos resultados, assim como não foram utilizados também os critérios de pressão local mínima e linhas de correntes circulares, pois este entende que esses parâmetros, apesar de importantes na descrição do escoamento, apresentam deficiências fundamentais, se comparados com os critérios discutidos nesse trabalho. O mesmo vale para a vorticidade relativa.

Foram observadas mudanças significativas nas novas formulações objetivas dos critérios existentes, se comparados com os originais. Esses critérios identificaram padrões caóticos nos escoamentos analíticos não integráveis, como o caso do escoamento ABC e da gota, sob algumas condições, enquanto que suas con-

trapartes originais evidenciavam contornos suaves e contínuos. Esse fato ressalta a importância da objetividade frente à invariância galileana.

Os novos critérios propostos foram avaliados em resultados analíticos e numéricos, resultando em análises completamente diferentes daquelas realizadas por outros critérios, mesmo sob uma mesma base de normalização. Padrões caóticos puderam ser observados nos escoamentos analíticos e mesmo nos escoamentos turbulentos. Os campos resultantes dos parâmetros dos critérios propostos apresentaram grande divergência com relação aos critérios existentes. Conclusões efetivas sobre a topologia das estruturas resultantes, frente a noção de vórtices e estruturas vorticais que temos hoje por conta dos critérios com maior aplicação na literatura só poderão ser tiradas com estudos mais profundos em determinado escoamento e com a aplicação do critério em outras soluções de vórtices mais rudimentares e com maior tempo de avaliação. A possibilidade de análise da anisotropia do escoamento por meio dos operadores  $AR_{1,2,3}^A$  e  $AR_{1,2,3}^B$  possibilita a classificação do vórtice quanto às suas direções principais de rotação e quanto a sua morfologia. A abordagem de avaliação de um critério em planos normais a vetores relevantes ao processo de formação, evolução e dissipação de vórtices cria uma nova família de critérios com inúmeras possibilidades de análise. A aplicação da medição da persistência de deformação objetiva nessa identificação pode vir a ser uma realidade, mesmo em escoamentos turbulentos.

Outra possibilidade importante no processo de identificação de vórtices com os novos critérios propostos encontra-se na ligação entre os tensores avaliados pelo critério e aos termos das equações de momentum, o que atribui ao processo de identificação de estruturas coerentes um caráter dinâmico e não apenas cinemático do escoamento. A possibilidade de associação de um determinado efeito dessas equações na formação ou dissipação de vórtices abre caminho para novas linhas de estudo relacionados ao tema.

## 7.1 Temas Para Trabalhos Futuros

A avaliação dos termos da equação de Navier-Stokes e sua comparação em escoamentos caóticos ou turbulentos contra o comportamento do tensor  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}1}$  quanto ao fato de se encontrar em fase ou fora de fase com a taxa de deformação e comparar a influência desses diferentes termos constitui um trabalho de grande relevância e que poderá, inclusive, modificar algumas hipóteses aplicadas em alguns modelos de turbulência, visando a melhoria dos mesmos ou até mesmo a implementação de novos modelos baseados na persistência de deformação.

Outro trabalho de grande relevância e que foi rapidamente descrito no capítulo 2 é a análise lagrangiana dos métodos existentes e dos novos métodos propostos nesse trabalho. Apesar de subjetiva quanto ao tempo de integração e ao número de trajetórias simuladas para classificação de uma região como uma região vortical, a análise desse tipo de estrutura por uma abordagem lagrangiana é mais intuitiva, pois descreve a trajetória descrita por partículas imersas no escoamento e, conseqüentemente, a geometria do vórtice. A proposta de Haller [14] de um critério que identifique vórtices de forma lagrangiana, mas com um pano de fundo euleriano, caracterizado pelo tensor  $\mathbf{A}_2^{\mathbf{A}1}$  pode mutuamente, auxiliar nas deficiências de cada abordagem.

# Capítulo 8

## Bibliografía

- [1] M. S. Chong, A. E. Perry, and B. J. Cantwell. A general classification of three-dimensional flow fields. *Phys. of Fluids A*, 2(5):765–777, 1990.
- [2] J. C. R. Hunt, A. A. Wray, and P. Moin. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. In *Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases, 2. Proceedings of the 1988 Summer Program*, pages 193–208, 1988.
- [3] J. Jeong and F. Hussain. On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.*, 285:69–94, 1995.
- [4] M. Tabor and I. Klapper. Stretching and alignment in chaotic and turbulent flows. *Chaos, Solitons & Fractals*, 4(6):1031–1055, 1994.
- [5] J. Zhou, R. J. Adrian, S. Balachandar, and T. M. Kendall. Mechanisms for generating coherent packets of hairpin vortices in channel flow. *J. Fluid Mech.*, 387:353–396, 1999.
- [6] P. Chakraborty, S. Balachandar, and R. J. Adrian. On the relationships between local vortex identification schemes. *J. Fluid Mech.*, 535:189–214, 2005.

- [7] J. Z. Wu, A. K. Xiong, and Y.T. Yang. Axial stretching and vortex definition. *Phys. Fluids*, 17:038108–1 – 038108–4, 2005.
- [8] S. Kida and H. Miura. Identification and analysis of vortical structures. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 17(4):471–488, 1998.
- [9] R. Cucitore, M. Quario, and A. Baron. On the effectiveness and limitations of local criteria for the identification of a vortex. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 18(2):261–282, 1999.
- [10] K. Horiuti. A classification method for vortex sheet and tube structures in turbulent. *Phys. Fluids*, 13(12):3756–3774, 2001.
- [11] Y. Levy, D. Degani, and A. Seginer. Graphical visualization of vortical flows by means of helicity. *AIAA Journal*, 28:1347–1356, 1990.
- [12] S. Zhang and D. Choudhury. Eigen helicity density: A new vortex identification scheme and its application in accelerated inhomogeneous flows. *Phys. Fluids*, 18:058104–1 – 058104–4, 2006.
- [13] V. Kolar. Vortex identification: New requirements and limitations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 28(4):638–652, 2007.
- [14] G. Haller. An objective definition of a vortex. *J. Fluid Mech.*, 525:1–26, 2005.
- [15] R. I. Tanner and R. R. Huilgol. On a classification scheme for flow fields. *Rheol. Acta*, 14:959–962, 1975.
- [16] G. Astarita. Objective and generally applicable criteria for flow classification. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 6:69–76, 1979.
- [17] R. L. Thompson and P. R. de Souza Mendes. Persistence of straining and flow classification. *Int. J. Engng Sci.*, 43(1-2):79–105, 2005.

- [18] R. L. Thompson. Some perspectives on the dynamic history of a material element. *Int. J. Engng Sci.*, 46:524–549, 2008.
- [19] M. Z. Chen. *Turbulence and the Related Engineering Calculations*. Beijing Aeronautical Institute Press, 1986.
- [20] Y. Li, E. Perlman, M. Wan, Y. Yang, R. Burns, C. Meneveau, R. Burns, S. Chen, A. Szalay, and No. 31 (2008). G. Eyink. ””. 9. A public turbulence database cluster and applications to study lagrangian evolution of velocity increments in turbulence. *J. Turbulence*, 9(31):1–29, 2008.
- [21] H. J. Lugt. *The dilemma of defining a vortex*, pages 309–321. Springer-Verlag, 1979.
- [22] A. K. M. F. Hussain. Coherent structures—reality and myth. *Phys. Fluids*, 26(10):2816–2850, 1983.
- [23] C. Truesdell. *The Kinematics of Vorticity*. Indiana University, 1953.
- [24] P. Chakraborty, S. Balachandar, and R. J. Adrian. Comment on “axial stretching and vortex definition” [phys. fluids 17,038108, 2005]. *Phys. Fluids*, 18:029101–1 – 029101–2, 2006.
- [25] J. Z. Wu, A. K. Xiong, and Y.T. Yang. Response to “comment on ‘axial stretching and vortex definition’” [phys. fluids 18, 029101, 2006]. *Phys. Fluids*, 18:029102–1 – 029102–2, 2006.
- [26] Isaak M. Yaglom. *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis : an elementary account of Galilean geometry and the Galilean principle of relativity*. New York: Springer-Verlag, 1979. (translated from the Russian).
- [27] G. Galilei. *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems*. University of California Press, 1953. translated and revised from italian by S. Drake.
- [28] M. E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, 2003.

- [29] R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of Polymeric Liquids*. John Wiley and Sons, 1987.
- [30] H. K. Moffatt. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *J. Fluid Mech.*, 18(1):1–18, 1963.
- [31] V. Shtern and F. Hussain. Hysteresis in a swirling jet as a model tornado. *Phys. Fluids A*, 5:2183–2195, 1993.
- [32] M. V. Melander and F. Hussain. Polarized vorticity dynamics on a vortex column. *Phys. Fluids A*, 5:1992–2003, 1993.
- [33] D. S. Pradeep and F. Hussain. *Core Dynamics of a Coherent Structure: a Prototypical Physical-Space Cascade Mechanism*, chapter 4, pages 54–82. Cambridge University Press, 2000.
- [34] U. T. Bödewadt. Die drehströmung über festern grund. *Z. Angew. Math. Mech.*, 20:141, 1940.
- [35] J. Z. Wu, H. Y. Ma, and M. D. Zhou. *Vorticity and Vortex Dynamics*. Springer-Verlag, 2006.
- [36] J. M. Burgers. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Adv. Appl. Mech.*, 1:171–199, 1948.
- [37] J. Jiménez. Kinematic alignment effects in turbulent flows. *Phys. Fluids A*, 4:652, 1992.
- [38] S. Kida. Tube-like structure in turbulence. *Lecture Notes in Numerical Applied Analysis*, 12:137, 1993.
- [39] B. Andreotti. “studying burgers” models to investigate the psysical meaning of the alignments statistically observed in turbulence. *Phys. Fluids*, 9:735, 1997.

- [40] K. N. Beronov and S. Kida. Linear two-dimensional stability of a burgers vortex layer. *Phys. Fluids*, 8(4):1024–1035, 1996.
- [41] R. S. Rivlin and J. L. Ericksen. Stress-deformation relations for isotropic materials. *Journal of Rational Mech. Anal.*, 4:323–425, 1955.
- [42] G. Haller. Lagrangian structures and the rate of strain in a partition of two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 13:3365–3385, 2001.
- [43] A. Ziabicki. Studies on the orientation phenomenon by fiber formation from polymer melts ii. *Journal of Appl. Polym. Sci.*, 2:24–31, 1959.
- [44] R. L. Thompson and P. R. de Souza Mendes. Considerations on kinematic flow classification criteria. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 128:109–115, 2005.
- [45] S. Doshi and J. Dealy. Exponential shear: a strong flow. *J. Rheol.*, 31: 563–582, 1987.
- [46] L. Lumley. Drag reduction by additives. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1:367–384, 1969.
- [47] F. C. Frank and M. R. Mackley. Localized flow birefringence of polyethylene oxide solutions in a two roll mill. *J. Polymer Science*, 14:1121–1131, 1976.
- [48] B. Coleman. On the use of symmetry to simplify the constitutive equations of isotropic material with memory. *Proc. Roy. Soc. A*, 306:449–476, 1968.
- [49] C. Truesdell. Two measures of vorticity. *J. Rational Mech. and Analysis*, 2: 173–217, 1953.
- [50] G. Astarita. Two dimensionless groups relevant in the analysis of steady flows of viscoelastic materials. *Ind. Engng Chem. Fund.*, 6:257–270, 1967.
- [51] E. Dresselhaus and M. Tabor. The persistence of strain in dynamical systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 22:971–984, 1989.

- [52] J. Weiss. The dynamics of enstrophy transfer in two-dimensional hydrodynamics. *Physica D*, 48:273–294, 1991.
- [53] H. Zhang and A. Holden. Estimation of the persistence of strain from a time series as a measure of the geometry of the attractor. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2:493–504, 1992.
- [54] R. R. Huilgol. Comments on "objective and generally applicable criteria for flow classification", by g. astarita. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 7:91–95, 1980.
- [55] R. Druot. Definition du transport associe a un modele de fluide de deuxieme ordre. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 282:923–929, 1976.
- [56] G. Astarita. Reply to r. r. huilgol. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 7:97–99, 1980.
- [57] E. Dresselhaus and M. Tabor. The kinematics of stretching and alignment of material elements in general flow fields. *J. Fluid Mech.*, 236:415–444, 1991.
- [58] R. L. Thompson and P. R. de Souza Mendes. Further remarks on persistence of straining and flow classification. *Int. J. Engng Sci.*, 45:504–508, 2007.
- [59] G. Sposito. On steady flows with lamb surfaces. *J. Engng Sci.*, 35:197–209, 1997.
- [60] V. I. Arnold. Sur une propriété topologique des applications globalement canoniques de la mécanique classique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 261:3719–3722, 1965.
- [61] S. Childress. Courant institute reports. *AFORS*, 67:0124 and 0976, 1967.
- [62] T. Dombre, U. Frisch, J.M. Greene, M. Hénon, A. Mehr, and A. M. Soward. Chaotic streamlines in the abc flows. *J. Fluid Mech.*, 167:353–391, 1986.
- [63] R. Aris. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover, Mineala New York, 1962.

- [64] C. Y. Wang. Exact solutions of the navier-stokes equations - the generalized beltrami flows, review and extension. *Acta Mech.*, 81:69–74, 1990.
- [65] S. L. Bragg and W. R. Hawthorne. Some exact solutions of the flow through annular cascade actuator discs. *J. Aero Sci.*, 17:243, 1950.
- [66] G. K. Batchelor. Axial flow in trailing line vortices. *J. Fluid Mech.*, 20: 645–658, 1964.
- [67] A. D. Neufville. The decaying vortex. In *Proc. 5th Northwestern Conf. Fluid Mech.*, pages 365–375. The University of Michigan Press,, 1957.
- [68] M. Abramowitz and A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1972.
- [69] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1932.
- [70] C. W. Oseen. Hydromechanik. *Ark. F. Math. Astrom. Och. Fys.*, 7:82, 1912.
- [71] G. I. Taylor. On the dissipation of eddies. Technical Report 598, Rep. Memo. Advis. Comm. Aeronaut., 1918.
- [72] T. S. Lundgren. Strained spiral vortex model for turbulent fine structure. *Phys. Fluids*, 25:2193–2203, 1982.
- [73] T. Kambe. Axisymmetric vortex solution of navier-stokes equation. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 53:13–15, 1984.
- [74] M. Lesieur. *Turbulence in fluids*. Kluwer, 1990.
- [75] H. A. Stone, A. Nadim, and S. Strogatz. Chaotic streamlines inside drops immersed in steady flows. *J. Fluid Mech.*, 232:629–646, 1991.
- [76] H. Bajer and H. K. Moffatt. On a class of steady confined stokes flows with chaotic streamlines. *J. Fluid Mech.*, 212:337–383, 1990.

- [77] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds number. *Dolk. Akad. Nauk.*, 30:301–305, 1941.
- [78] Z. S. She and E. Leveque. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 7:336–339, 1994.
- [79] D. Oster and I. Wygnanski. The forced mixing layer between parallel streams. *J. Fluid Mech.*, 123:91, 1982.
- [80] P. A. Monkewitz and P. Huerre. The influence of velocity ratio on the spatial instability of mixing layers. *Phys. Fluids*, 25:1137, 1982.
- [81] H. Tennekes and J. L. Lumley. *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, 1972.
- [82] J. Smagorinsky. General circulation experiments with primitive equations. *Mon. Weath. Rev.*, 91(3):99–164, 1963.
- [83] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids A*, 3:1760–1765, 1991.
- [84] D. K. Lilly. A proposed modification of the german0 s&grid-scale closure method. *Phys. Fluids A*, 4:633–635, 1991.
- [85] C. R. Maliska. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. LTC, Rio de Janeiro, 2 edition, 2004.
- [86] *ANSYS CFX, Release 12.0 Solver theory guide*. ANSYS Inc., Canonsburg, PA, USA, 2008.
- [87] J. R. Koseff and S. L. Street. Visualization of a shear driven three-dimensional recirculation flow. *J. Fluids Eng.*, 106:21–29, 1984.
- [88] H. C. Ku, R. S. Hirsh, and T. D. Taylor. A pseudospectral method for solutions of the three-dimensional incompressible navier-stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 70:439–462, 1987.

- [89] V. Babu and S. A. Korpela. Numerical solution of the incompressible, three-dimensional navier-stokes equations. *Computers & Fluids*, 23(5):1–5, 1994.
- [90] C. Migeon, G. Pineau, and A. Texier. Three-dimensionality development inside standard parallelepipedic lid-driven cavities at  $re=1000$ . *J. of Fluids and Structures Eng.*, 17:717–738, 2003.
- [91] E. L. M. Padilla, F. P. Mariano, and A. da Silveira Neto. Enclosed flows: Numerical study using the les methodology. In *Proceedings of ENCIT 2008*, 2008.
- [92] T. S. Lundgren. Linearly forced isotropic turbulence. In *Annual Research Briefs 2003*. Center for Turbulence Research, 2003.