

# UM PROBLEMA INVERSO DE TRANSFERÊNCIA DE MASSA EM PROCESSOS DE SEPARAÇÃO POR ADSORÇÃO GÁS-LÍQUIDO EM COLUNAS DE BOLHAS E ESPUMA

**Jader Lugon Junior**<sup>1</sup> - lugon@iprj.uerj.br

**Antônio J. Silva Neto**<sup>2</sup> - ajsneto@iprj.uerj.br

Instituto Politécnico – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, CP 97282, CEP 28601-970,  
Nova Friburgo, RJ, Brasil.

***Resumo.** Neste trabalho é feita a estimativa de parâmetros relacionados ao processo de separação de bio-moléculas por adsorção em interfaces gás-líquido em colunas de bolhas e espuma. São apresentados os resultados obtidos com o método de Levenberg-Marquardt e dados experimentais reais da concentração da albumina do soro bovino (BSA).*

***Palavras-chave:** Problemas inversos, Adsorção gás-líquido, Fracionamento, Coluna de bolhas.*

## 1. INTRODUÇÃO

Diversas indústrias produzem um volume significativo de efluentes líquidos ricos em material biológico. Estas indústrias podem ser classificadas basicamente em três grupos: (i) processamento de alimentos; (ii) fermentados e destilados; e (iii) indústrias farmacêuticas (Santana, 1994). Estes produtos devem ser retirados das águas residuais e alguns podem ser aproveitados na preparação de ração animal. Porém, normalmente estes compostos estão diluídos ou dissolvidos em baixas concentrações, o que dificulta seu aproveitamento. Recentemente o mecanismo de adsorção de proteínas em interfaces gás-líquido tem sido objeto de pesquisa, tanto teórica quanto experimental, devido à potencial utilização do fracionamento em colunas de bolhas e espuma como uma alternativa economicamente viável para a recuperação de compostos com atividade superficial a partir de soluções diluídas (Rosa, 1996).

O sistema de fracionamento em colunas de bolha e espuma funciona basicamente através da injeção de um gás na base de uma coluna contendo a solução. As bolhas de gás formadas no distribuidor sobem até o topo da coluna e durante este trajeto adsorvem o soluto, que está dissolvido no líquido. Na região de espuma, ou seção de enriquecimento, formada acima da coluna de bolhas, é feita então a extração do material de interesse (Santana e Carbonell, 1993 e 1993a).

---

<sup>1</sup> Endereço permanente: SENAI – RJ Centro de Formação Profissional de Nova Friburgo – R. Prof. José Eugênio Müller, 220 – Centro – CEP 28.610-010 Nova Friburgo/RJ

<sup>2</sup> Autor para correspondência.

Para o melhor entendimento dos processos envolvidos, bem como a passagem da escala de laboratório para a escala industrial, é necessária a determinação de propriedades físico-químicas e alguns parâmetros operacionais correlatos empregados nos modelos matemáticos e numéricos desenvolvidos para a análise do sistema. Neste trabalho é empregada a abordagem de solução de problema inverso com este objetivo.

A análise de problemas inversos possui inúmeras aplicações relevantes em engenharia e medicina, bem como em outros ramos da ciência. Tem sido observado recentemente um aumento significativo na publicação de resultados de problemas inversos em transferência de calor (Li, 1998, Yang, 1998, Al-Khalidy, 1998, Blanc et al., 1998). Como exemplos da aplicação prática de problemas inversos em transferência de calor, citamos a estimativa da intensidade de fontes térmicas com dependência funcional no espaço e ou no tempo, a partir da medida transiente de temperaturas (Silva Neto e Özisik, 1994, Rezende et al., 1998, Silva Neto et al., 1999, Silva Neto e Su, 1999, Su e Silva Neto, 1999) e a estimativa da condição inicial de problemas transientes em transferência de calor por condução (Silva Neto e Özisik, 1994a).

Os problemas inversos têm a característica de serem mal-postos (Tikhonov e Arsenin, 1977), e diversas técnicas de solução têm sido desenvolvidas e aplicadas (Beck et al., 1985, Hensel, 1991, Murio, 1993, Alifanov et al., 1995, Silva Neto e Roberty, 1998, Kauati et al., 2000).

Nas seções seguintes é apresentada a estimativa de parâmetros, tais como o coeficiente volumétrico de transferência de massa, os coeficientes da isoterma de adsorção e o diâmetro das bolhas em um processo de transferência de massa em uma coluna de fracionamento, usando uma abordagem de problema inverso.

Usando o método de Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963) e medidas experimentais reais para a albumina do soro bovino (BSA) são estimados os parâmetros da isoterma e apresentados os intervalos de confiança para os mesmos.

## 2. FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO

O problema direto relativo à adsorção de bio-moléculas em interfaces gás-líquido em colunas de bolhas consiste essencialmente no cálculo da depleção, ou seja da redução das concentrações do composto de interesse com o tempo, quando são conhecidas as propriedades físico-químicas e os parâmetros do processo. Este problema normalmente é bem posto, lembrando as condições de Hadamard: tem solução, ela é única e pequenas variações nos dados de entrada não são ampliadas na solução.

### 2.1 Formulação Matemática do Problema Direto

Será apresentado um modelo para descrever tanto o processo de adsorção quanto a depleção de soluto para uma solução de proteína. A taxa de adsorção de proteínas é dada por

$$\dot{n} = \frac{6}{d_b} (v_g A) \Gamma \quad (1)$$

onde  $d_b$  é o diâmetro das bolhas,  $A$  é a área da seção transversal da coluna,  $v_g$  é a velocidade superficial (vazão de gás dividida pela área da seção transversal da coluna  $A$ ), e  $\Gamma$  é a concentração superficial em excesso.

O fluxo de soluto para a superfície das bolhas pode ser calculado como

$$\frac{\dot{n}}{a} = k_l (C_b - C_s) \quad (2)$$

onde  $k_l$  é o coeficiente de transferência de massa,  $a$  é a área intersticial das bolhas,  $C_b$  é a concentração de soluto no líquido (bulk) e  $C_s$  é a concentração de soluto junto às bolhas.

Fazendo um simples balanço de massa no volume diferencial representado na Fig. 1, obtém-se

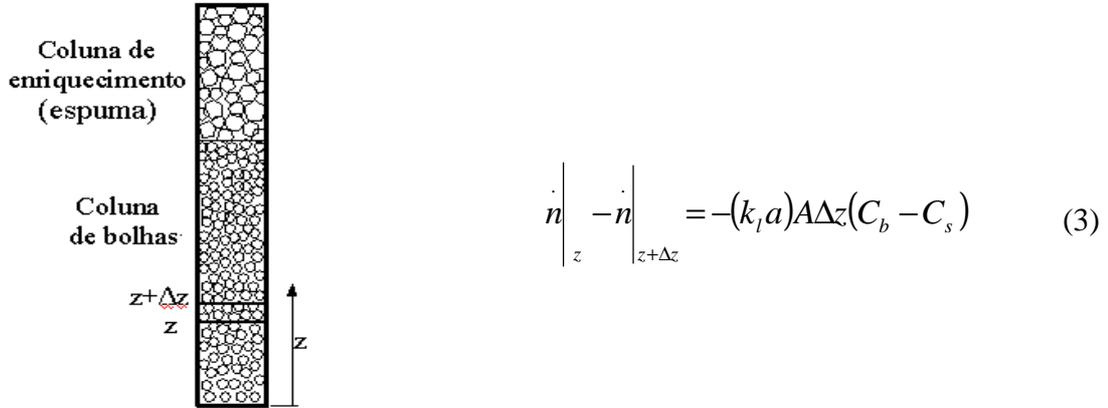


Figura 1 - Coluna de fracionamento

Considerando que a velocidade e o diâmetro das bolhas são constantes ao longo da coluna, e que esta possui seção reta constante, obtém-se das Eqs. (1) e (3)

$$\frac{\partial \Gamma(z, t)}{\partial z} = \frac{(k_l a) d_b [C_b(t) - C_s(z, t)]}{6v_g} \quad (4)$$

O coeficiente de transferência de massa pode ser calculado pela correlação de Öztürk et al. (1976)

$$\left( \frac{(k_l a) d_b^2}{D_i} \right) = 0,62 \left( \frac{\mu_f}{\rho_l D_i} \right)^{0,5} \left( \frac{g \rho_l d_b^2}{\gamma} \right)^{0,33} \left( \frac{g \rho_l d_b^3}{\mu_l^2} \right)^{0,29} \left( \frac{v_g}{\sqrt{g d_b}} \right)^{0,68} \left( \frac{\rho_g}{\rho_l} \right)^{0,04} \quad (5)$$

onde  $D_i$  é o coeficiente de difusão do tensoativo,  $\mu_f$  é a viscosidade do líquido,  $\rho_l$  é a massa específica do líquido,  $\gamma$  é a tensão superficial,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\rho_g$  é a massa específica do gás.

$\Gamma$  e  $C_s$  estão relacionados por uma isoterma de adsorção, sendo a mais simples delas a linear (Guzman et al., 1986):

$$\Gamma_l = B + K C_s \quad (6)$$

A isoterma para diversos compostos, como por exemplo a proteína cytochrome C, apresenta um patamar a partir de um certo valor de concentração de soluto (Santana, 1994), não podendo ser representada portanto de forma linear. Este patamar é formado devido à saturação da capacidade de adsorção. Neste caso a isoterma de Langmuir representa uma melhor relação entre  $\Gamma$  e  $C_s$ .

$$\Gamma_l = \frac{1}{a} \left[ \frac{K_1(T) C_s}{1 + K_1(T) C_s} \right] \quad (7)$$

onde T é a temperatura absoluta.

Um modelo mais complexo permite caracterizar com muita precisão a depleção de proteínas como BSA (Albumina Bovina), Lysozima e  $\beta$ -Caseína,

$$\Gamma_t = \Gamma_1 + \Gamma_2 = \frac{K_1(T) \exp(-\lambda \Gamma_1) C_s [1 + K_2(T) \hat{a} C_s]}{\hat{a} [1 + K_1 \exp(-\lambda \Gamma_1) C_s]} \quad (8)$$

onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são as concentrações superficiais em excesso da primeira e da segunda camada respectivamente.

Esta curva corresponde à modelagem termodinâmica desenvolvida por Guzman et al. (1986), representando 2 camadas de adsorção. A primeira camada é equivalente à isoterma de Langmuir, podendo saturar, enquanto a segunda camada não apresenta saturação. Na Tabela 1 são apresentados os valores dos coeficientes  $\hat{a}$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  e  $\lambda$  para três proteínas

Tabela 1 – Parâmetros para isoterma de 2 camadas para três proteínas (Guzman et al., 1986)

Proteína	$\hat{a}$ [m <sup>2</sup> /mg]	$K_1$ [wt%]	$K_2$ [mg/(m <sup>2</sup> wt%)]	$\lambda$ [m <sup>2</sup> /mg]
$\beta$ -Caseína	0,392	36.130	118,5	-0,674
Lysozima	0,338	86.330	607,4	0,641
BSA	0,322	109.400	103,6	1,117

Aplicando novamente um balanço de massa, obtém-se (Santana, 1994)

$$\frac{dC_b}{dt} = -k_l a (1 - \varepsilon_g) (C_b - C_s) \quad (9)$$

onde  $\varepsilon_g$  é a fração volumétrica de gás, que pode ser calculada com a correlação adimensional de Kumar (1976),

$$\varepsilon_g = 0,728U - 0,485U^2 + 0,095U^3 \quad \text{onde} \quad U = v_g \left[ \frac{\rho_l^2}{\gamma(\rho_l - \rho_g)g} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (10,11)$$

## 2.2 Solução do Problema Direto

Combinando as Eqs. (4) e (9) e usando uma condição inicial e uma condição de contorno do tipo,  $\Gamma = 0$  em  $z = 0$  e  $C_b = C_{b0}$  em  $t = 0$ , obtém-se a variação da concentração de soluto no líquido em função do tempo  $C_b(t)$ . Santana e Carbonell (1993,1993a) obtiveram uma solução analítica para o problema direto no caso de uma isoterma linear e os resultados obtidos apresentaram boa concordância com dados experimentais.

Com o objetivo de se obter uma solução adequada também à isoterma de Langmuir, Rosa (1996) utilizou um procedimento numérico. Neste trabalho este procedimento foi adaptado atendendo às isotermas linear, de Langmuir e de 2 camadas. Primeiro modifica-se a Eq. (4) obtendo-se uma forma mais conveniente

$$\int_0^{\Gamma_{saída}} \frac{d\Gamma}{[C_b(t) - C_s(z,t)]} = \int_0^H \frac{(k_l a) d_b}{6v_g} dz \quad (12)$$

onde  $H$  é a altura da coluna de bolhas.

Considerando-se que o tempo de ascensão das bolhas é pequeno e que, portanto, o diâmetro das mesmas e o coeficiente de transferência de massa sejam constantes durante a subida de um conjunto de bolhas, integra-se a Eq.(12) obtendo-se

$$\int_0^{\Gamma_{saída}} \frac{d\Gamma}{[C_b(t) - C_s(z, t)]} = \frac{(k_l a) d_b H}{6v_g} \quad (13)$$

Usando a Eq.(13) e a isoterma de adsorção pode-se determinar o valor da concentração superficial em excesso do tensoativo na saída da coluna,  $\Gamma_{saída}$ .

Fazendo um balanço global de massa na coluna de líquido levando em consideração as transferências que ocorrem na interface entre a coluna de bolhas e a coluna de espuma formada acima desta, obtém-se (Rosa,1996)

$$\frac{dC_b}{dt} = - \frac{6v_g}{(1 - \varepsilon_g) H d_b} \Gamma_{saída} \quad (14)$$

A Eq.(14) pode ser aproximada por diferenças finitas usando o método de Euler explícito

$$C_b^{n+1} = C_b^n - \Delta t \frac{6v_g}{(1 - \varepsilon_g) H d_b} \Gamma_{saída}^n \quad (15)$$

com  $C_b^0 = C_b(t=0) = C_{b0}$ , onde  $\Delta t$  é o passo no tempo, e  $n$  indica o instante  $t$  e  $n+1$  o instante  $t + \Delta t$ .

### 3. FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

Silva Neto e Moura Neto (1999) classificaram os problemas inversos levando em consideração a dimensão do modelo matemático e a dimensão dos objetos a serem estimados. Esta classificação está apresentada na Tabela 2.

Tabela 2 – Classificação dos problemas inversos

Modelo Matemático	Estimativa	
	Dimensão finita(constante)	Dimensão infinita (função)
Dimensão finita <sup>1</sup>	Tipo I	Não se aplica
Dimensão infinita <sup>2</sup>	Tipo II	Tipo III

<sup>1</sup> por exemplo: sistema de equações algébricas

<sup>2</sup> por exemplo: equação diferencial parcial ou equação integro-diferencial

O problema inverso aqui considerado consiste na estimativa de propriedades físico-químicas e parâmetros de processo a partir de medidas experimentais das concentrações do soluto dissolvido no líquido em função do tempo. Tem-se, portanto um problema inverso do Tipo II, ou seja, o modelo matemático é de dimensão infinita e a estimativa de dimensão finita.

#### 3.1 Formulação do Problema Inverso

Para o processo de transferência de massa com adsorção de tensoativos na interface gás-líquido em colunas de bolhas, segundo a formulação apresentada na seção 2.1, tem-se o interesse em estimar simultaneamente, ou não, as seguintes grandezas: (i) parâmetros da isoterma ( $K_2$  e  $\hat{a}$  para a isoterma linear,  $K_1$  e  $\hat{a}$  para a isoterma de Langmuir e  $K_1, K_2, \hat{a}$  e  $\lambda$  para a isoterma de 2 camadas); (ii) o produto do coeficiente de transferência de massa com a área intersticial das bolhas ( $k_l a$ ); e (iii) o diâmetro das bolhas.

Como a quantidade de medidas experimentais é superior ao número de incógnitas a serem estimadas, o problema inverso é resolvido como um problema de otimização de dimensão finita onde busca-se minimizar o funcional de resíduos quadrados

$$S = \sum_{i=1}^M \left( X_i - C_{bi}(\vec{P}) \right)^2 = \vec{F}^t \vec{F} \quad (16)$$

onde  $X_i$  é a concentração de soluto medida no líquido,  $C_{bi}$  é a concentração calculada,  $M$  é o número de medidas experimentais,  $\vec{P}$  é o vetor de incógnitas, e  $F_i = X_i - C_{bi}$ .

### 3.2 Solução do Problema Inverso

Para a solução do problema inverso de transferência de massa descrito na seção anterior foi usado o método de Levenberg-Marquardt (1963) que é equivalente à regularização de Tikhonov, quando o termo de regularização é quadrático nas incógnitas  $\vec{P}$  (Silva Neto e Moura Neto, 1999). Este método tem sido usado com sucesso na solução de problemas inversos do Tipo II (Silva Neto e Özisik, 1993, 1995).

Buscando minimizar a norma  $S$  é primeiramente escrita a equação do ponto crítico

$$\frac{dS}{d\vec{P}} = \frac{d}{d\vec{P}} (\vec{F}^t \vec{F}) = 0 \quad \longrightarrow \quad J^t \vec{F}(\vec{P}) = 0 \quad (17)$$

onde  $J$  é a matriz Jacobiana, com os elementos  $J_{ps} = \frac{\partial C_{bp}}{\partial P_s}$  sendo  $p = 1, 2, \dots, M$  e  $s = 1, 2, \dots, N$ , e  $N$  é o número total de incógnitas.

Aplica-se então uma expansão em série de Taylor a  $\vec{F}(\vec{P})$ , mantendo apenas os termos até a primeira ordem,

$$\vec{F}(\vec{P} + \Delta\vec{P}) = \vec{F}(\vec{P}) + J\Delta\vec{P} \quad (18)$$

Utilizando a expansão acima na Eq.(17) obtém-se

$$J^t J\Delta\vec{P} = -J^t \vec{F}(\vec{P}) \quad (19)$$

No método de Levenberg-Marquardt é somado à diagonal da matriz  $J^t J$  um valor  $\beta$  para auxílio na convergência do método (que é equivalente ao parâmetro de regularização no funcional de Tikhonov), sendo este valor reduzido durante o procedimento iterativo que é executado até que se satisfaça um critério de convergência estabelecido a priori.

Para a utilização no procedimento iterativo a Eq.(19) é escrita de uma forma mais conveniente,

$$\Delta\vec{P}^n = -\left[ (J^n)^t J^n + I\beta \right]^{-1} (J^n)^t \vec{F}(\vec{P}^n) \quad (20)$$

onde  $I$  é a matriz identidade e  $n$  é o contador de iterações

O procedimento iterativo é iniciado com uma estimativa para os parâmetros,  $\vec{P}^0$ , sendo novas estimativas obtidas com  $\vec{P}^n = \vec{P}^{n-1} + \Delta\vec{P}^n$ , calculando-se as correções  $\Delta\vec{P}^n$  com a Eq.(20), até que o critério de convergência

$$\left| \frac{\Delta P_n^k}{P_n^k} \right| < \varepsilon \quad , \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

seja satisfeito, onde  $\varepsilon$  é um número pequeno, e.g.  $10^{-5}$ .

Os elementos do Jacobiano, bem como o termo do lado direito da Eq.(19), são calculados a cada iteração usando a solução do problema direto empregando as estimativas para as incógnitas obtidas na iteração anterior.

Deve ser observado que o problema dado pela Eq.(20) é diferente do problema original dado pela Eq.(19). Ao longo do procedimento iterativo busca-se, portanto, reduzir o valor do fator de amortecimento,  $\beta$ , para que ao se atingir a convergência tenha-se a solução do problema original.

### 3.2 Intervalos de confiança

Os intervalos de confiança para as estimativas  $\bar{P}^n$  são calculados usando o procedimento desenvolvido por Gallant (1987). Empregando a notação utilizada por Huang e Özisik (1990).

$$\sigma_{\bar{P}} = \sigma \left\{ \text{diag} \left[ \frac{\partial \bar{C}_b^T}{\partial \bar{P}} \frac{\partial \bar{C}_b}{\partial \bar{P}^T} \right]^{-1} \right\}^{1/2} \quad (22)$$

onde  $\bar{C}_b$  é o vetor contendo os elementos  $\{C_{b_i}\}$  e  $\sigma$  é o desvio padrão dos erros experimentais.

Assumindo uma distribuição normal para os erros experimentais, e 99 % de confiabilidade, os limites de intervalos de confiança para as estimativas  $P_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$ , são calculados por (Flach e Özisik, 1989),

$$(P_s - 2,576 \sigma_{P_s}) < P_s < (P_s + 2,576 \sigma_{P_s}), \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (23)$$

## 4. COEFICIENTES DE SENSIBILIDADE

As derivadas parciais das variáveis de estado, em nosso caso a concentração de tensoativos, em relação aos parâmetros que se deseja estimar, por exemplo os parâmetros da isoterma ou o diâmetro das bolhas, são chamadas de coeficientes de sensibilidade. Através da análise destes coeficientes pode-se concluir se o propósito de estimar certos parâmetros tem chance de ser bem sucedido. De fato estes permitem o projeto de experimentos otimizados onde buscam-se medidas experimentais que sejam influenciadas significativamente pelas grandezas que se deseja determinar.

Dowding et al. (1999), analisaram o cálculo e o uso de coeficientes de sensibilidade em problemas de condução de calor, demonstrando como estes fornecem informações fundamentais sobre os efeitos dos parâmetros nas respostas dos modelos.

Para a obtenção de boas estimativas, é fundamental que os coeficientes de sensibilidade tenham valores relativamente elevados, fazendo com que as respostas do modelo reflitam pequenas mudanças nas grandezas a serem estimadas.

Quando são estimadas várias grandezas diferentes simultaneamente, são utilizados os coeficientes escalados ou modificados

$$\text{Coeficiente de Sensibilidade Modificado} = P_s \frac{\partial C_b}{\partial P_s}, \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (24)$$

Quando estimam-se diversos parâmetros de um modelo, os efeitos de cada um deles nas concentrações devem ser diferentes, ou seja independentes. Se os coeficientes de sensibilidade de dois parâmetros têm a mesma forma, significa que eles afetam as concentrações da mesma maneira e então é difícil distinguir suas influências e portanto estimá-los.

## 5. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Primeiramente foi realizada a estimativa para isoterma da proteína BSA, considerando um experimento real com concentração inicial  $100\text{g/m}^3$ , velocidade superficial de  $0,14\text{ cm/s}$  e com informações da depleção do soluto até um tempo de 45 minutos. Nesta faixa de concentração o experimento só apresentou sensibilidade para estimativa de  $B$ , levando portanto a um valor constante para  $\Gamma$  sendo estimado o valor de  $3,42 \times 10^{-3}\text{ g/m}^2$  com intervalo de confiança de  $\pm 1,6 \times 10^{-4}\text{ g/m}^2$ . O valor apresentado pela literatura (Santana, 1994), corresponde a  $3,21 \times 10^{-3}\text{ g/m}^2$ , confirmando portanto a estimativa realizada.

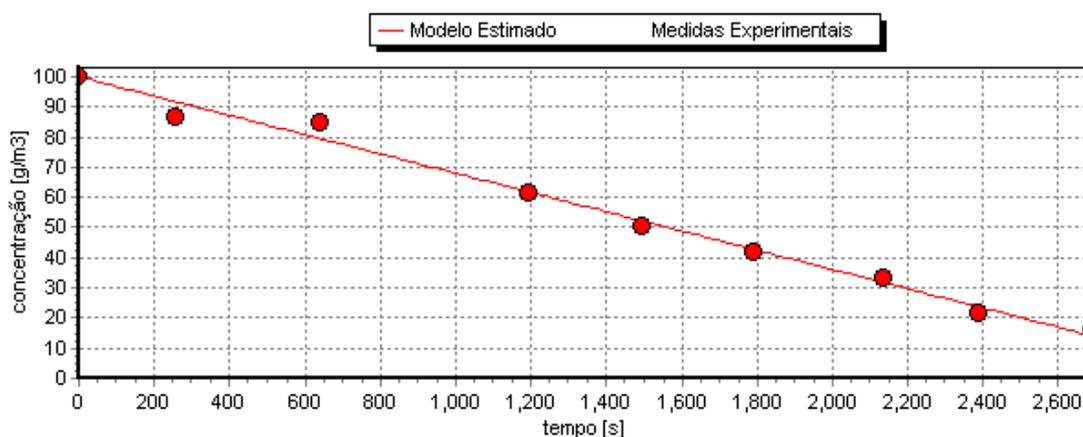


Figura 1 – Dados experimentais reais da depleção de BSA (Santana e Carbonell, 1993 e 1993a)

Para uma estimativa da isoterma linear, i.e.  $K$  e  $B$ , é necessário um experimento em uma faixa de concentração mais alta. Foi realizada então a estimativa com dados experimentais sintéticos, produzidos através da solução do problema direto com a introdução de um ruído randômico da ordem de 7%. A concentração inicial foi de  $1000\text{g/m}^3$ , velocidade superficial de  $0,33\text{ cm/s}$ , com informações da depleção do soluto até um tempo de 60 minutos. Os parâmetros  $K$  e  $B$  foram estimados como  $1,23 \times 10^{-5}\text{ m}$ , com intervalo de confiança de  $\pm 5,78 \times 10^{-6}\text{ m}$ , e  $3,13 \times 10^{-3}\text{ g/m}^2$ , com intervalo de confiança de  $\pm 8,7810^{-4}\text{ g/m}^2$ . Estes valores estão em excelente concordância com os valores exatos conhecidos a priori. Foram usados nesta estimativa dados experimentais na região de maior sensibilidade.

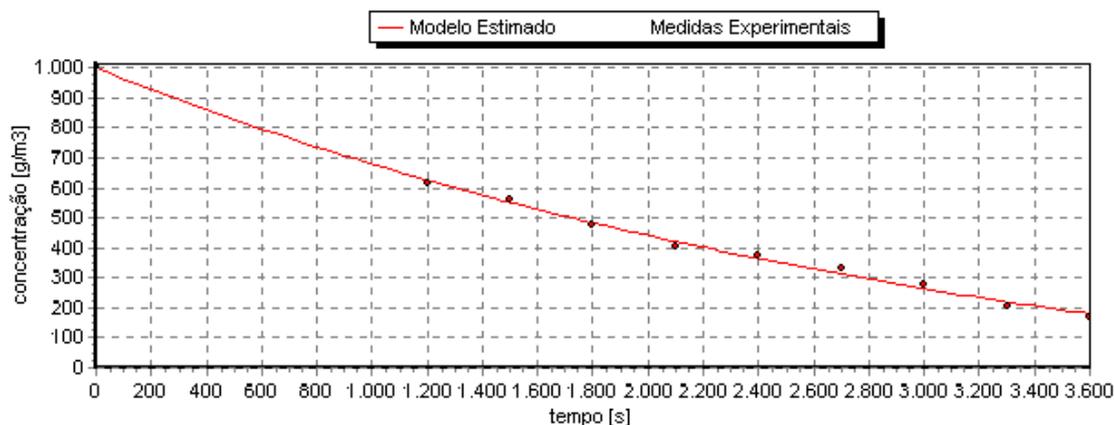


Figura 2 – Dados experimentais sintéticos da depleção de BSA

Os resultados obtidos até o momento são extremamente satisfatórios. Foram também considerados outros tensoativos tais como brometo de hexadeciltrimetil amônio (CTAB) e

cytochrome C. Como trabalho futuro deverá ser investigado um experimento ótimo para estimar também as isotermas de Langmuir e de 2 camadas.

### ***Agradecimentos***

Os autores agradecem ao Professor César C. Santana do Departamento de Processos Biotecnológicos da Faculdade de Engenharia Química da Unicamp pelo apoio na formulação do problema direto e pelo fornecimento dos dados experimentais usados neste trabalho.

### **REFERÊNCIAS**

- Alifanov, O. M., Artyukhin, E. A. e Rumiantsev, S. V., 1995, *Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems*, Springer Verlag.
- Al-Khalidy, N., 1998, On the solution of parabolic and hyperbolic inverse heat conduction problems, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 41, No. 23, pp. 3731-3740.
- Beck, J. V., Blackwell, B. e St. Clair Jr., C. R., 1985, *Inverse Heat Conduction*, Wiley, New York.
- Blanc, G., Raynaud, M. e Chau, T. H., 1998, A guide for the use of the function specification method for 2D inverse heat conduction problems, *Rev. Gén. Therm.*, Vol. 37, pp. 17-30.
- Dowding, K.J., Blackwell, B.F. e Cochran, R.J., Applications of sensitivity coefficients for heat conduction problems, *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol.36, pp.33-55, 1999.
- Flach, G. P. e Özisik, M. N., 1989, Inverse heat conduction problem of simultaneously estimating spatially varying thermal conductivity and heat capacity per unit volume, *Numer. Heat Transfer*, Vol. 16, pp. 249-266.
- Gallant, A. R., 1987, *Nonlinear Statistical Models*, Wiley, New York.
- Guzman, R., Carbonell, R.G. e Kilpatrick, P.K., 1986, The adsorption of proteins to gas-liquid interfaces, *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 114, No. 2, 536-547.
- Hensel, E., 1991, *Inverse Theory and Applications for Engineers*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Huang, C. H. e Özisik, M. N., 1990, A direct integration approach for simultaneously estimating spatially varying thermal conductivity and heat capacity, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 11, pp. 262-268.
- Kauati, A. T., Silva Neto, A. J. e Roberty, N. C., 2000, A source-detector methodology for the construction and solution of the one-dimensional inverse transport equation, *Inverse Problems in Engineering*, em impressão.
- Kumar, A., Dagaleesan, T.T., Ladha, G.S. e Hoelscher, H.E., 1976, Bubble swarm characteristics in bubble columns, *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 54, 503-510.
- Li, H. Y., 1998, Estimation of thermal properties in combined conduction and radiation, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 42, No. 3, pp. 565-572.
- Marquardt, D. W., 1963, An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters, *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, Vol. 11, pp. 431-441.
- Murio, D. A., 1993, *The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems*, John Wiley & Sons, New York.
- Öztürk, S.S., Schumpe, A. e Deckwer, W.D. – Organic liquids in a bubble column: holdups and mass transfer coefficients – *AIChE Journal*, Vol. 33, No. 9, p. 1473-1480, 1987.
- Rosa, P.T.V., *Fracionamento de Proteínas e Outros Tensoativos em Colunas de Bolhas e de Espuma*, Tese de Doutorado, 1996, Universidade Estadual de Campinas - Faculdade de Engenharia Química.

- Rezende, F. C., Regis, C. R., Silva Neto, A. J. e Su, J., 1998, Estimativa do termo fonte para a equação de condução unidimensional com condições de contorno convectivas, Anais do VII Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas, Vol. II, pp. 951-956.
- Santana, C.C., Adsorptive Bubble Separation Process as a Means of Reducing Surface-Active Contaminants in Industrial Wastewaters, 1994, Revista Brasileira de Engenharia – Química Especial – Vol. 5.
- Santana, C.C. e Carbonell, R.G., 1993, Waste minimization by flotation: recovery of proteins and other surface-active compounds, 3<sup>rd</sup> International Conference on Waste Management, Salvador, Bahia.
- Santana, C.C. e Carbonell, R.G., 1993, Adsorptive bubble separation as a means of reducing surface-active contaminants in industrial wastewaters, Proceedings of the International Symposium on Heat and Mass Transfer, Cancun, Mexico, pp. 1-11.
- Silva Neto, A.J. e Moura Neto, F.D., 1999, Escolha de Modelos-Problemas Inversos em Engenharia, Notas de Aula do Minicurso Técnico MC05 no XXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Santos, São Paulo.
- Silva Neto, A. J. e Özisik, M. N., 1994, The estimation of space and time dependent strength of a volumetric heat source in a one-dimensional plate, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 37, No. 6, pp. 909-915.
- Silva Neto, A. J. e Özisik, M. N., 1994a, An inverse heat conduction problem of unknown initial condition, Proc. 10th International Heat Transfer Conference, Vol. 6, pp. 421-426, Brighton, Inglaterra.
- Silva Neto, A. J. e Özisik, M. N., 1995, An inverse problem of simultaneous estimation of radiation phase function, albedo and optical thickness, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, Vol. 53, No. 4, pp. 397-409.
- Silva Neto, A. J. e Roberty, N.C., 1998, A abordagem fonte-detector na solução de problemas inversos em meios participantes, Anais do V Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste, Vol. III, pp. 340-347.
- Silva Neto, A.J., e Su, J., 1999, The estimation of heat source strength in plate-type fuel elements with cladding, Proc. 3<sup>rd</sup> International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice, Port Ludlow, USA.
- Silva Neto, A. J., Gomes, J. L. M. A. e Su, J., 1999, Estimativa da intensidade da fonte térmica em varetas combustíveis cilíndricas, Anais do VII Congresso Geral de Energia Nuclear.
- Su, J. e Silva Neto, A.J., 1999, Heat source estimation with the conjugate gradient method in inverse linear diffusive problems, Proc. 1<sup>st</sup> International Conference on Engineering Thermophysics, Beijing, China, pp. 377-384.
- Tikhonov, A. N. e Arsenin, V. Y., 1977, Solutions of Ill-Posed Problems, Winston, Washington D.C.
- Yang, C. Y., 1998, The determination of heat sources in an inverse heat conduction problem, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 42, No. 2, pp. 345-356.

#### **AN INVERSE MASS TRANSFER PROBLEM IN GAS-LIQUID ADSORPTION SEPARATION PROCESS IN COLUMNS OF BUBBLE AND FOAM**

**Abstract:** *In this work is done the estimation of parameters related to the separation process of bio-molecules by adsorption in gas-liquid interfaces in bubble and foam columns. The results obtained with the Levenberg-Marquardt method and real experiment data of the concentration of the Bovine Serum Albumin (BSA) are presented.*

**Key-words:** *Inverse problems, Gas-liquid adsorption, Fractionation, Bubble columns.*