

ANÁLISE DE ALGUMAS CARACTERÍSTICAS IMPORTANTES DE UM MÉTODO DE VOLUMES FINITOS COM SISTEMA DE COORDENADAS LOCAIS

Jeferson A. Souza – souza@sinmec.ufsc.br

Clóvis R. Maliska – maliska@sinmec.ufsc.br

SINMEC - Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor Computacional – Universidade Federal de Santa Catarina – 88040-900 – Florianópolis – SC – Brasil – fone: 0**48 331 9562 - Fax: 0**48 234 1519

Resumo. *A procura de novos métodos computacionais para a solução de problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor, que sejam capazes de lidar com todas as complexidades (físicas, matemáticas e geométricas) dos problemas, tem dado espaço aos chamados "control volume finite-element methods". Estes métodos de volume finitos, com algumas características de elementos finitos, e associados a solução acoplada e simultânea das equações de conservação e continuidade, vem se tornando uma alternativa de crescente interesse. Este trabalho estuda um destes métodos conhecido como FIELDS, e discute duas de suas mais importantes características com respeito a função de interpolação e a discretização do termo difusivo das equações de Navier-Stokes. A aplicação do método para malhas não-estruturadas também será brevemente discutida.*

Palavras chave: *Volume de controle, Função de interpolação, Solução simultânea.*

1. INTRODUÇÃO

O método FIELDS (FInite ELEment Differential Scheme), desenvolvido por Raw (1985), é uma metodologia de volumes finitos com algumas características de elementos finitos. É importante salientar que as características de similaridade com o método dos elementos finitos não são conceituais, mas apenas no tratamento de definição dos elementos. Ou seja, o método aqui descrito combina a conservação das propriedades nos volume de controle, característica fundamental dos métodos de volumes finitos, com a flexibilidade de um sistema de coordenadas locais, a qual é uma ferramenta muito útil para a discretização de geometrias complicadas através de malhas não-estruturadas, característica esta de métodos de elementos finitos.

O FIELDS também possui outras características importantes. Uma delas é de utilizar como função de interpolação as próprias equações do movimento, em sua forma completa discretizada. Isto dá ao método a capacidade de incorporar todos os detalhes da física envolvida no problema, propiciando um forte acoplamento p - v e estabilidade durante a solução. Outra importante característica está associada ao esquema de interpolação para o termo convectivo da função de interpolação, que pode envolver tanto as variáveis

armazenadas nos nós quanto nos pontos de integração. O terceiro ponto é a maneira como o termo difusivo é discretizado, no qual não é simplificado o divergente do vetor velocidade mesmo em escoamentos incompressíveis.

Esta trabalho concentra-se principalmente no estudo do termo convectivo da função de interpolação. Três formas diferentes para um esquema *skew upstream* são apresentadas e comparadas com relação a taxa de convergência, dificuldade de implementação e tempo de CPU para o cálculo dos coeficientes.

Outro importante ponto discutido neste trabalho é com relação ao termo difusivo das equações de Navier-Stokes. O método FIELDS inclui o divergente do vetor de velocidades (equação da massa para regime permanente), mesmo para escoamentos incompressíveis. Isto é feito para forçar o aparecimento, em todas equações, de todas as variáveis (u , v e p) na tentativa de tornar a matriz dos coeficientes mais estável e fácil de resolver.

Finalmente é apresentada uma breve discussão a respeito das potencialidades do método para malhas não-estruturadas.

2. REVISÃO DO MÉTODO

O primeiro conceito básico que deve ser revisado é com relação aos aspectos geométricos do método. Para isso, o elemento, o volume e os sub-volumes serão apresentados. Este trabalho usa quadriláteros como elementos, os quais são formados pela união de quatro nós, onde todas as variáveis são armazenadas, constituindo assim em um arranjo co-localizado. Cada elemento deve ser tratado isoladamente dos demais através da utilização de um sistema de coordenadas local. O FIELDS usa um sistema de coordenada não ortogonal onde s e t variam entre -1 e $+1$, como pode ser observado na Fig. 1a.

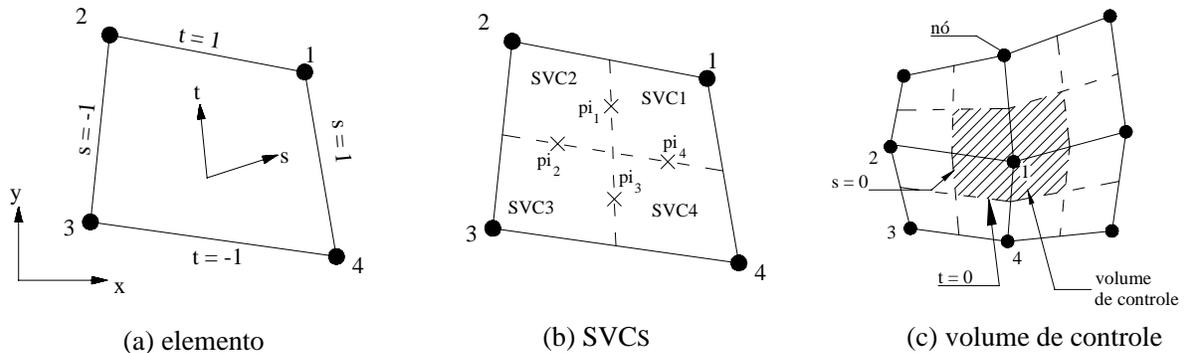


Figura 1: Características geométricas

Deve ser observado na Fig. 1a que as linhas que ligam dois nós são sempre linhas de s ou t constantes. Cada elemento é dividido em quatro sub-elementos menores chamados de sub-volumes de controle (SVC), como pode ser observado na Fig.1b. Esta mesma figura mostra também os ponto de integração (π_i) onde as variáveis devem ser aproximadas.

Todas as variáveis, físicas ou geométricas, devem ser interpoladas dentro do elemento em função das variáveis armazenadas nos nós. Isto é possível através de uma transformação de coordenadas do sistema global (x,y) para o sistema local (s,t) . Assim uma variável ϕ qualquer pode ser determinada em qualquer ponto dentro do elemento através da expressão.

$$\phi_{(s,t)} = 0,25[N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + N_3 \phi_3 + N_4 \phi_4] \quad (1)$$

onde $N_1 = (1+s)(1+t)$, $N_2 = (1-s)(1+t)$, $N_3 = (1-s)(1-t)$ e $N_4 = (1+s)(1-t)$ são as funções de forma.

Finalmente, o volume de controle mostrado na Fig.1c, é criado em torno dos nós, o qual recebe contribuições de quatro elementos diferentes.

A discretização completa das equações pode ser encontrada em Schneider (1987), porém uma versão resumida será mostrada. Por exemplo, para a equação de Navier-Stokes em u

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \right] + S_u \quad (2)$$

obtem-se, através da integração sobre o volume de controle, e da definição de um vetor normal a superfície do mesmo dado por $dn_j = -dx + dy$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) dV + \int_S (\rho u_j u) dn_j - \int_S \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dn_j + \int_S p dy - \int_V S_u dV = 0 \quad (3)$$

Para o SVC1, o termo convectivo deve ser avaliado nos pontos de integração pi_1 e pi_4 . Desta forma, as integrais sobre as superfícies com estes pontos podem ser aproximadas por

$$\int_{pi_1/pi_4} (\rho u_j^0 u) dn_j = \rho u_1^0 u_1 \Delta y_1 - \rho v_1^0 u_1 \Delta x_1 + \rho u_4^0 u_4 \Delta y_4 - \rho v_4^0 u_4 \Delta x_4 = \sum_{j=1}^4 a_{1,j}^{uc} u_j \quad (4)$$

No termo convectivo, tanto o coeficiente “ a ” como a variável “ u ” são escritos em letras minúsculas. Isto indica que o subíndice j refere-se aos pontos de integração e não aos nós.

Exatamente como o termo convectivo, o termo difusivo será avaliado sobre as mesmas superfícies. A parcela difusiva da Eq. (3) pode ser então escrita na forma

$$-\int_{pi_1} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dn_j = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{pi_1} \Delta y_1 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{pi_1} \Delta x_1 \quad (5)$$

Procedendo de maneira idêntica para o ponto de integração 4 e com o auxílio da Eq. (1) para a avaliação das derivadas, obtém-se uma forma compacta dada por

$$-\int_{pi_1/pi_4} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) dn_j = \sum_{j=1}^4 A_{1,j}^{ud} U_j + \sum_{j=1}^4 A_{1,j}^{vd} V_j \quad (6)$$

Os termos transiente, de pressão e fonte podem ser facilmente discretizados como

$$\int_{SVC1} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) da = \rho J_1 \left(\frac{U_1 - U_1^0}{\Delta t} \right) = \sum_{j=1}^4 A_{1,j}^{ut} U_j - B_1^{ut} \quad (7)$$

$$\int_{pi_1/pi_4} p dy = p_1 \Delta y_1 + p_4 \Delta y_4 = \sum_{j=1}^4 a_{1,j}^p p_j \quad (8)$$

$$-\int_{SVC1} S_u da = -S_u|_{(1/2,1/2)} J_1 = -B_1^s \quad (9)$$

onde J é o Jacobiano da transformação.

Com todos os termos discretizados é possível dar a forma final para a equação da quantidade de movimento para a velocidade u . Assim, a equação de um elemento genérico qualquer toma a forma

$$\sum_{j=1}^4 (A_{i,j}^{uc} + A_{i,j}^{ud}) U_j + \sum_{j=1}^4 A_{i,j}^{vd} V_j + \sum_{j=1}^4 a_{i,j}^{uc} u_j + \sum_{j=1}^4 a_{i,j}^p p_j = B_i^l + B_i^s \quad (10)$$

onde os “ A_s ” e os “ a_s ” são matrizes 4x4 em que as linhas representam os sub-volumes e as colunas representam as contribuições de cada nó ou ponto de integração para o sub-volume da linha em questão. As letras maiúsculas referem-se aos nós enquanto que as minúsculas aos pontos de integração. Os superíndices c , d , p , s e t indicam respectivamente convectivo, difusivo, pressão, fonte e tempo, enquanto que u e v indicam se o coeficiente multiplica a velocidade U ou V .

O vetor u_j representa o valor das propriedades nos quatro pontos de integração. Para a avaliação deste vetor faz-se necessário a utilização da função de interpolação que no método FIELDS acaba por ser a própria equação da quantidade do movimento discretizada de forma quase idêntica a Eq. (10). Como este trabalho propõe-se a explorar apenas os termos convectivos desta função de interpolação, apenas este termo será apresentado.

3. TERMO CONVECTIVO DA FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO

A forma como o FIELDS cria as funções de interpolação através da discretização das equações do movimento, permite que cada termo (transiente, convectivo, difusivo, pressão e fonte) possa ser tratado separadamente. Nesta secção, três formas de interpolação para o termo convectivo serão abordadas: uma apresentada por Raw (1985) e duas propostas neste trabalho.

Antes da apresentação dos três esquemas de interpolação, é apropriado apresentar uma breve introdução aos já conhecidos esquemas *skew*. A Fig. 2a mostra um elemento com seus quatro pontos de integração e seus quatro nós. Pode ser também observado nesta figura a direção do escoamento η , a qual está alinhada com o vetor velocidade V , e intercepta os contornos do sub-volume e do elemento.

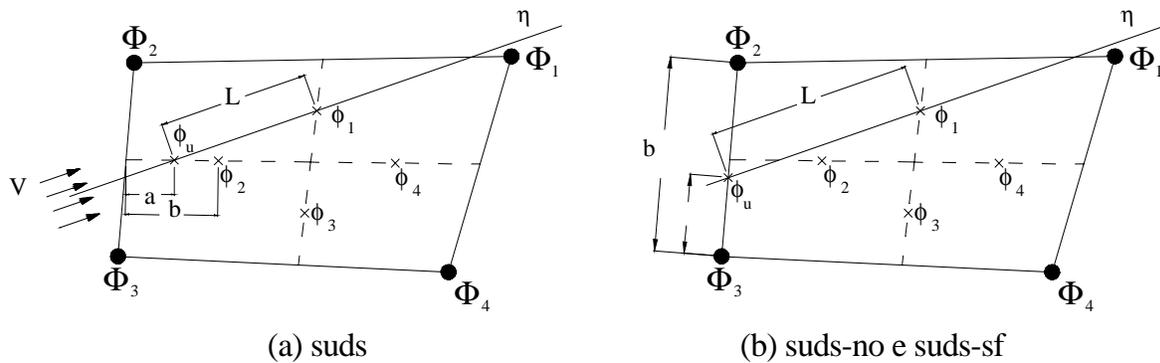


Figura 2: Esquemas skew-upstream

O termo convectivo

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (11)$$

pode ser aproximado para o ponto de integração 1, como

$$\rho V \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \rho V \frac{(\phi_1 - \phi_u)}{L} \quad (12)$$

onde $V = \sqrt{u^2 + v^2}$, ϕ_u é o valor da variável a montante, e L é uma escala de comprimento. A forma como ϕ_u será aproximado irá determinar o esquema de interpolação.

3.1. Skew Upstream differential Scheme (*suds*)

Este primeiro esquema proposto por Raw (1985), utiliza para a interpolação de ϕ_u tanto as variáveis armazenadas nos nós como nos pontos de integração. Referindo-se novamente a Fig. 2a, pode ser observado que a linha de corrente η intersecta o SVC2 em um ponto entre ϕ_2 e o ponto médio entre Φ_2 e Φ_3 . Então ϕ_u deve ser interpolado em função de ϕ_2 , Φ_2 e Φ_3 e pode ser expresso por

$$\phi_u = \frac{a}{b} \phi_2 + \left(1 - \frac{a}{b}\right) \left(\frac{\Phi_2 + \Phi_3}{2}\right) \quad (13)$$

Desta forma, englobando todas as possibilidades de interseção da linha de corrente do escoamento com as bordas dos SVC2 ou do SVC1, a avaliação do termo convectivo para este esquema acaba envolvendo oito variáveis: quatro nos pontos de integração e quatro nos nós. O termo convectivo pode então ser expresso para um elemento como

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 (c_{i,j} \phi_{i,j} + C_{i,j} \Phi_{i,j}) \quad (14)$$

onde i indica o SVC e que j pode indicar tanto o ponto de integração, para os coeficientes em letras minúsculas, quanto o nó, para os coeficientes em letras maiúsculas.

Para a criação das funções de interpolação é preciso isolar a variável u , o que torna necessário a inversão da matriz de coeficientes $c_{i,j}$. Mesmo sabendo-se que a maioria dos seus coeficientes são zeros, é impossível determinar quais não são, tornando-se necessário que um método geral de inversão de matrizes seja utilizado.

3.2. Skew upstream differential scheme-node (*suds-no*)

Este esquema é uma simplificação para o esquema *suds*, onde apenas os valores nos nós são utilizados, ao contrário do caso anterior que utilizava as variáveis nos nós e nos pontos de integração. O procedimento é idêntico ao do *suds*, mas a aproximação de ϕ_u é feita não mais no contorno do sub-volume, mas sim no contorno do elemento.

Usando o escoamento mostrado na 2b, desta vez a discretização de ϕ_u torna-se

$$\phi_u = \frac{a}{b} \Phi_2 + \left(1 - \frac{a}{b}\right) \Phi_3 \quad (15)$$

Como pode ser visto, ao invés de ϕ_2, Φ_2 e Φ_3 , apenas Φ_2 e Φ_3 são utilizados para aproximar ϕ_u . Esta formulação é mais simples de ser implementada do que o *suds*. Neste caso existem menos formas de interpolar ϕ_u e também estão envolvidas um menor número de variáveis (apenas as variáveis dos nós) mas, como pode ser observado na Fig. 2b, o comprimento de escala L torna-se maior, o que significa obter a informação do escoamento em um ponto mais afastado, afetando assim diretamente a taxa de convergência do método. Isto será discutido na seção de resultados

Deve ser lembrado ainda que a matriz c_{ij} neste caso é diagonal, e que sua inversa é obtida diretamente através da inversão dos termos de sua diagonal principal (apenas quatro operações).

3.3. Skewed upstream differential scheme-shape function (*suds-sf*)

Este esquema é também uma modificação do esquema *suds*. Aqui, novamente apenas as variáveis nos nós são utilizadas para interpolar ϕ_u , mas diferentemente do esquema *suds-no*, ϕ_u é aproximado nos contornos do sub-volume de controle como é feito pelo esquema *suds*. Neste, a Eq. (1) é usada para calcular ϕ_u em função apenas das variáveis armazenadas nos nós. Por exemplo, para o escoamento mostrado na figura Fig. 2a ϕ_u é calculado por

$$\phi_u = 0,25[(1+s)(1+t)\phi_1 + (1-s)(1+t)\phi_2 + (1-s)(1-t)\phi_3 + (1+s)(1-t)\phi_4] \quad (16)$$

onde s e t são as coordenadas locais do ponto onde ϕ_u será aproximado.

As mesmas considerações feitas anteriormente para o esquema *suds-no* quanto a inversão de c_{ij} são também aplicadas neste caso.

4. DIVERGENTE DO VETOR VELOCIDADE

A forma completa dos termos viscosos para a equação de Navier-Stokes na direção de x pode ser expressa por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \quad (17)$$

Se μ for considerado constante e o $\nabla \cdot \vec{V}$ que multiplica $(-2/3\mu)$ for simplificado, encontramos, através de algumas operações algébricas,

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (18)$$

É neste ponto que para escoamentos incompressíveis, o divergente de velocidade é novamente feito igual a zero e a Eq. (18) toma a forma usualmente utilizada, sem o divergente do vetor velocidade. No método FIELDS esta simplificação não é feita. Na busca de soluções analíticas as simplificações são bem vindas, enquanto que a manutenção de certos termos são artifícios usados em soluções numéricas. A inclusão deste termo, modifica a matriz dos coeficientes e aparentemente proporciona um maior acoplamento entre as equações, melhorando a estabilidade e taxa de convergência do método. Na verdade este termo propicia o aparecimento da velocidade v na equação de u e a velocidade u na equação de v .

5. MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS

O método FIELDS em sua primeira concepção (Raw (1985) e TASCflow (1995)), foi utilizado apenas com malhas estruturadas (em coordenadas generalizadas), mas sua formulação permite que malhas não-estruturadas também sejam utilizadas. Neste trabalho esta possibilidade é mostrada para um problema simples, onde a discretização com uma malha estruturada não é apropriada para a geometria em questão. Nenhuma modificação foi feita no código para acomodar malhas não-estruturadas

O exemplo é o de uma cavidade quadrada com tampa móvel e um furo no centro. A geometria, mostrada na Fig 3, não pode ser facilmente discretizada com malhas generalizadas, como pode ser visto em Maliska (1995). Uma alternativa para o tratamento deste problema é dividir a geometria em vários subdomínios, os quais são resolvidos separadamente (multiblocos), porém esta metodologia possui algumas dificuldades no tratamento das interfaces entre os subdomínios. Com a discretização mostrada na Fig 3, o FIELDS pode lidar com geometrias desse tipo, com qualquer ordenamento, sem nenhuma dificuldade. Na Fig. 3 é mostrada também a solução, apenas para efeitos ilustrativos.

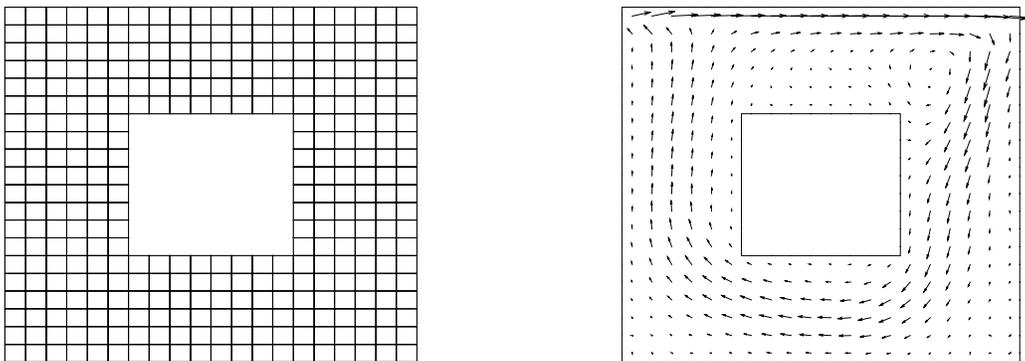


Figura 3– Cavidade quadrada com tampa móvel e um furo no centro - $Re = 1000$

Este é apenas um exemplo simples das várias geometrias irregulares que podem ser discretizadas com quadriláteros. O objetivo deste exemplo é simplesmente mostrar que o método FEILDS pode lidar com malhas não-estruturadas onde não é necessário nenhum tipo de regularidade e ou conexão entre os volumes e elementos.

6. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Uma das características mais importantes do método FIELDS está relacionada com a forma de aproximação do termo convectivo da função de interpolação. Na secção 3 foram mostradas três formas possíveis para estas aproximações. Aqui será feito uma breve comparação entre o desempenho destes esquemas de interpolação.

O problema aqui utilizado para tanto é o da cavidade quadrada com tampa móvel. Este problema foi escolhido pois apresenta as principais dificuldades encontradas na solução numérica de problemas de mecânica dos fluidos, que são o forte acoplamento entre os campos de velocidade e pressão e as não-linearidades do termo convectivo. Este problema foi testado e os resultados validados e comparados com os obtidos por Guia *et al.* (1982) e podem ser verificados em Souza (2000). Como o objetivo deste trabalho não é a validação da metodologia FIELDS, mas sim o estudo de algumas características do método, estes resultados não são mostrados.

O primeiro parâmetro utilizado para a comparação é a taxa de convergência. A Fig. 4 mostra os resíduos para o problema da cavidade com $Re = 1000$, e $\Delta t = 1$.

Como pode ser observado na Fig. 4, a performance de cada esquema está diretamente relacionada com o refinamento de malha. Em malhas grosseiras os esquemas *suds* e *suds-sf* possuem uma melhor performance, enquanto que para malhas mais refinadas o esquema *suds-no* apresenta uma taxa de convergência melhor.

Comparando primeiramente os esquemas *suds* e *suds-sf*, a melhor performance do esquema *suds-sf* para malhas grosseiras (Figs. 4a and 4b) deve ser explicada pela forma como são feitas as interpolações para ϕ_u dentro do elemento. O esquema *suds-sf* utiliza-se de uma interpolação bilinear (através das *shape functions*) para a avaliação de ϕ_u , a qual é melhor do que a interpolação linear usada pelo esquema *suds*. Para malhas refinadas, estas duas formas de interpolação retornam aproximadamente os mesmos valores, então a forte conectividade dos quatro pontos de integração imposta pelo esquema *suds* torna-se mais importante do que sua interpolação linear. A matriz para os pontos de integração ($c_{i,j}$) é na realidade um sistema de equações que relaciona os quatro pontos de integração de cada elemento. Com a solução deste sistema, na realidade estão sendo encontrados valores para as variáveis nos pontos de integração que ao mesmo tempo satisfazem as necessidades do escoamento em quatro posições diferentes dentro do mesmo elemento. Como cada elemento contribui para a formação dos coeficientes de quatro volumes diferentes, este esquema acaba por também criar uma certa conectividade entre os quatro volumes adjacentes. Isto dá ao esquema *suds* uma melhor performance para malhas refinadas.

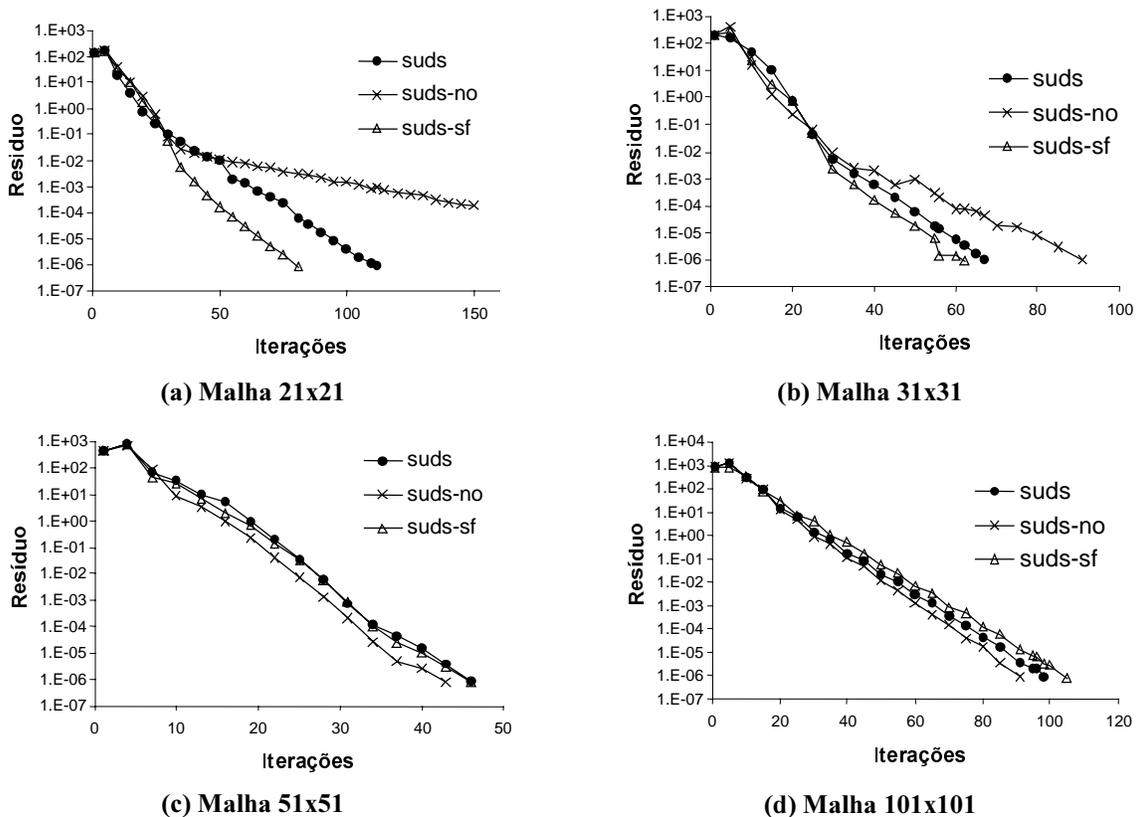


Figura 4: Performance dos diferentes esquema de interpolação - $Re = 1000$

A performance ruim do esquema *suds-no* (Figs. 4a and 4b) para malhas grosseiras talvez possa ser explicada através da análise do comprimento de escala L , que determina a distância entre o ponto de integração i e o ponto onde ϕ_u é interpolado. Quando um problema

fortemente convectivo está sendo resolvido, que é o caso analisado neste trabalho, e a função de interpolação é composta por uma série de termos cada um representando um dos termos da equação de Navier-Stokes, o termo convectivo deve ser dominante, o que implica que o comprimento L deve ser pequeno. Este comprimento é significativamente maior no esquema *suds-no*, como pode ser visto na Fig. 2.

Quando a malha é refinada, a performance do esquema *suds-no* aumenta, provavelmente em razão do fato de que deve existir um comprimento de escala L ótimo, o qual incorpora a correta influência do termo convectivo na função de interpolação. Das Figs. 4c e 4d, onde os esquemas *suds* e *suds-sf* apresentam uma taxa de convergência inferior a do esquema *suds-no*, pode-se concluir que o comprimento L é menor do que o seu valor ótimo. Para estes esquemas, pode-se sugerir que se ϕ_u fosse interpolado em uma posição fora do elemento, talvez a taxa de resíduo fosse melhor. Da discussão apresentada acima, chega-se a conclusão de que o esquema *suds* é mais estável, apresentando uma boa taxa de convergência para todos os casos experimentados, mas pode também ser observado, que os outros dois esquemas são também ótimas opções e que em alguns casos especiais, funcionam melhor do que o esquema original *suds*.

A principal motivação para a criação dos esquemas *suds-no* e *suds-sf* foi a possibilidade de redução do tempo de cálculo dos coeficientes. Como todos os esquema (*suds*, *suds-no* e *suds-sf*) são muito similares, e apenas pequenas modificações no algoritimo diferem um esquema do outro, comparações entre os três esquemas podem serem feitas com relação ao tempo de CPU para o cálculo dos coeficientes.

A Tabela 1 ilustra a relação entre os tempos para o cálculo dos coeficientes para os três esquemas, nota-se que os esquemas *suds-no* e *suds-sf* são em torno de três e um por cento, respectivamente, mais rápidos do que o esquema *suds*.

Tabela 1: Tempo de CPU para o cálculo dos coeficientes

Esquema	malhas			
	21x21	31x31	51x51	101x101
suds	1.00	1.00	1.00	1.00
suds-no	0.97	0.98	0.97	0.96
suds-sf	0.99	0.99	0.98	0.99

Os ganhos com o tempo para o cálculo dos coeficientes dos esquemas *suds-no* e *suds-sf* propostos neste trabalho são pequenos. Os teste feitos mostraram que para uma formulação bidimensional, onde c_{ij} é uma matriz 4x4, os métodos para o cálculo de sua inversa são bastante rápidos e o tempo gasto pequeno. Mas, para uma possível versão tridimensional, as pequenas vantagens dos esquemas *suds-no* e *suds-sf* aparentemente deverão ampliar-se geometricamente, pois a matriz c_{ij} passaria a ter 12x12 termos, tornando sua inversão (necessária no esquema *suds*) inviável, e também porque o número de termos armazenados nos esquemas propostos (*suds-no* e *suds-sf*) seriam apenas 12 ao invés dos 144 necessários no esquema *suds*.

O último ponto estudado é com relação a não simplificação do divergente do vetor velocidade no termo difusivo. Em primeira análise, é esperado que esta inclusão no máximo melhore a convergência, mas como é mostrado na Fig. 5, esta é decisiva. O problema utilizado foi o da cavidade para $Re = 1000$, malha cartesiana de 31x31 volumes e $\Delta t = 1$.

Analisando a Fig. 5, observa-se que nos problemas com Reynolds baixo, a influência do termo adicional não é sentida, porém com o aumento do número de Reynolds, esta passa a ser decisiva. A melhor performance do método com a inclusão do divergente nos termos difusivos talvez possa ser explicada através de uma análise numérica. Com o aumento do

Reynolds, o sistema torna-se mais instável e difícil de convergir. A inclusão deste termo adicional nas equações do movimento cria, por assim dizer, um acoplamento “numérico” entre os campos de u , v e p , facilitando a convergência do sistema.

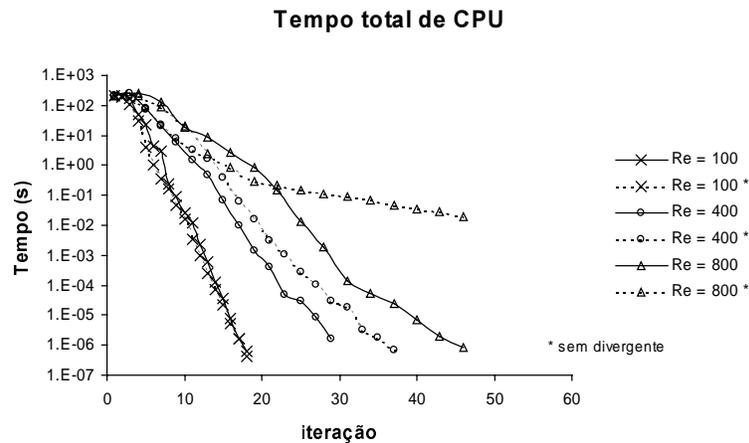


Figura 5– Divergente do vetor velocidade - $Re = 1000$

Dos resultados acima apresentados, fica claro que para esquemas de interpolação do tipo *skew upwind*, associados a métodos de *control volume finite elemets*, dois fatores são decisivos para o seu desempenho: o número de pontos envolvidos nas interpolações e a distância entre o ponto a ser avaliado e o ponto onde é realizada a interpolação. Também é interessante ressaltar a importância da forma da matriz dos coeficientes, o que como foi mostrado, sem a inclusão dos termos adicionais a esta matriz, podemos não conseguir a convergência do sistema de equações.

Agradecimentos

Agradecimentos são feitos à CAPES, POSMEC/UFSC e SINMEC/UFSC pelos apoios financeiros e de infra-estrutura.

REFERÊNCIAS

- Guia, U., Guia K. N. e Shin, C. T., 1982, High-Re solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, *Journal of Computational Physics*, n° 48, pp. 387-411.
- Maliska, C. R., (1995), *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, LTC – Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Raw, M.J., 1995, *A New Control Volume finite Element Procedure for the Numerical Solution of the fluid Flow and Scalar Transport Equations*, PhD Thesis, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.
- Schneider, G. E., e Raw, M.J., 1987, *Control Volume Finite Element Procedure for Heat Transfer and Fluid Flow Using Collocated Variables – 1. Computational Procedure*, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 11, n° 4, pp. 363-390.
- Souza, J. A., 2000, *Implementação de Um Método de Volumes Finitos com Sistema de Coordenadas Locais para a Solução Acoplada das Equações de Navier-Stokes*, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.
- TASCflow – Theory Documentation, (1995), Version 2.4, Advanced Scientific Computing Ltd. All rights reserved, Waterloo, Ontario, Canada.

**ANALYSIS OF A VOLUME BASED FINITE ELEMENT METHODOLOGY IN
VIEW OF THE INTERPOLATION FUNCTION EMPLOYED AND COUPLING
CHARACTERISTICS**

Jeferson A. Souza – souza@sinmec.ufsc.br

Clóvis R. Maliska – maliska@sinmec.ufsc.br

Computational Fluid Dynamics Laboratory – SINMEC -Federal University of Santa Catarina
88040-900 – Florianópolis –SC – Brasil - Phone: 0xx48 331 9562 - Fax: 0xx48 234 1519

***Abstract.** The search for computational methods to the solution of the fluid mechanical and heat transfer problems that could deal with all the difficulties in a “strong” way, combine with the growing capabilities of processing and memory storage of the modern computers, make the control volume finite element methods, associated with a coupled solution of the Navier-Stokes and continuity equations, of great interest of the scientific community. This work studies one of these methods known as FIELDS, and discusses some of its important private characteristics with respect to the interpolation functions and the discretization of the diffusive term of the Navier-Stokes equations. The applicability of the method for unstructured grid will also be discussed.*

***Key words:** Control-volume, Interpolation functions, Simultaneous solution.*