

CONVECÇÃO MISTA NUM TUBO HORIZONTAL COM UMA PLACA RETANGULAR INTERNA

João B. Dias

Genésio J. Menon – genesio@iem.efei.br

Dênio L. Panissi

EFEI – Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Departamento de Engenharia Mecânica
Av. BPS, 1303, Bairro Pinheirinho – 37500-000 – Itajubá, MG, Brasil.

Resumo. No presente trabalho analisa-se a convecção mista laminar no interior de um tubo horizontal com uma placa axial interna de seção retangular. Considera-se que a placa interna é isolada termicamente e que o tubo tem fluxo de calor axial uniforme com temperatura circumferencial uniforme. As equações de conservação na forma adimensional são resolvidas pelo método de elementos finitos, com o elemento triangular linear, para a função corrente (ψ), vorticidade (ω), temperatura (θ) e velocidade axial (W). O número de Nusselt médio (Nu) e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe) são calculados em função da razão de raios (RR), da razão de aspecto da placa (AR), do número de Rayleigh (Ra) e do número de Prandtl fixado em $Pr = 0,7$. São mostradas as distribuições de temperatura e de função corrente para $Pr = 0,7$, $RR = 2,0$, $AR = 0,5$ e $1,0$ e $Ra = 1 \times 10^4$, 1×10^5 e 1×10^6 .

Palavras-chave: Convecção mista, Método de elementos finitos, Transferência de calor, Métodos numéricos.

1. INTRODUÇÃO

A procura por uma maior eficiência nos sistemas térmicos tem levado ao desenvolvimento de várias pesquisas científicas. Nieckele & Patankar (1985) e Kaviany (1986), estudaram a convecção mista entre tubos horizontais concêntricos com aquecimento uniforme no tubo interno e isolamento térmico no tubo externo. O método de elementos finitos foi utilizado por Ribeiro (1992) para estudar a convecção mista laminar entre tubos horizontais concêntricos e excêntricos com duas condições de contorno, na primeira o tubo externo foi isolado e o tubo interno aquecido com fluxo de calor axial uniforme e temperatura circumferencial uniforme, e na segunda as condições foram invertidas. A convecção mista, tridimensional, laminar, não desenvolvida, em um tubo com uma placa longitudinal concêntrica, foi estudada por Hsieh & Wen (1996). Um estudo numérico da transferência de calor por convecção forçada, em um tubo horizontal com uma placa longitudinal excêntrica, sendo o tubo aquecido e a placa isolada, foi feito por Hung et al. (1997). A convecção mista de ar entre tubos horizontais concêntricos, causada pela rotação do tubo externo e pela

diferença de temperatura existente entre eles foi estudada por Yoo (1998a). Mais recentemente, Yoo (1998b) estudou a convecção natural entre tubos horizontais concêntricos para uma pequena razão de raios com número de Prandtl menor ou igual a 0,3.

O presente trabalho é uma extensão do trabalho de Hung et al. (1997) no que diz respeito ao tipo de convecção. Naquele trabalho foi considerada apenas a convecção forçada e neste é considerada a convecção mista, porém a placa é mantida concêntrica. O presente trabalho utiliza o método de elementos finitos para estudar a convecção mista em um tubo horizontal, com uma placa axial concêntrica de seção retangular. O tubo tem aquecimento axial uniforme com temperatura circunferencial uniforme e a placa é mantida isolada termicamente. O cálculo da vorticidade nas paredes é feita de uma forma matricial utilizando os valores calculados de função corrente.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Neste trabalho estuda-se a transferência de calor por convecção mista em um tubo horizontal, com uma placa axial concêntrica de seção retangular. A placa é termicamente isolada enquanto que o tubo tem fluxo de calor axial uniforme com temperatura circunferencial uniforme. São admitidas as seguintes hipóteses simplificadoras: o escoamento é laminar, bidimensional, incompressível, desenvolvido térmica e hidrodinamicamente; as propriedades do fluido são constantes com a temperatura, exceto a densidade nos termos de empuxo; a pressão axial é desacoplada da pressão transversal. A geometria para o problema é mostrada na Fig. 1.

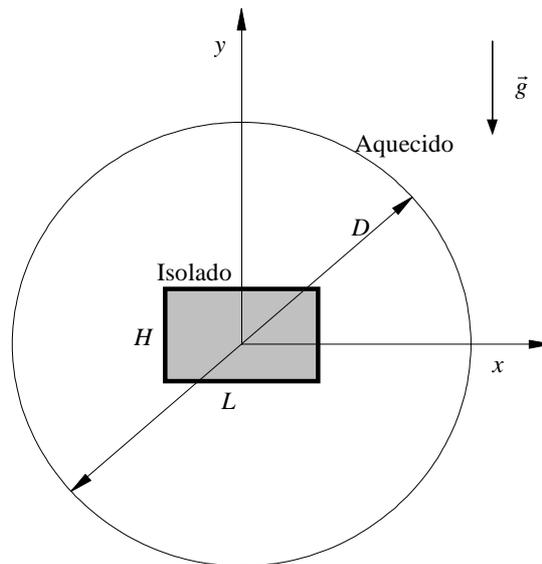


Figura 1 - Geometria do problema.

Para o problema em estudo as equações de conservação na forma adimensional, levando em conta as hipóteses simplificadoras, são:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \omega = 0, \quad (1)$$

$$Pr \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial W}{\partial X} + Pr \right) = \frac{\partial W}{\partial \tau} , \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - C_g \frac{W}{\bar{W}} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} , \quad (3)$$

$$Pr \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \omega}{\partial X} \right) + Ra Pr \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{\partial \omega}{\partial \tau} , \quad (4)$$

sendo ψ a função corrente, ω a vorticidade, \bar{W} a velocidade axial média adimensional.

Os parâmetros adimensionais utilizados para generalizar a análise teórica são dados por:

$$\tau = \frac{\alpha t}{d^2} , \quad X = \frac{x}{d} , \quad Y = \frac{y}{d} , \quad U = \frac{u d}{\alpha} , \quad V = \frac{v d}{\alpha} ,$$

$$W = \frac{w}{\frac{d \bar{p}}{d z} \frac{d^2}{\rho \nu}} , \quad P = \frac{p d^2}{\rho \nu \alpha} , \quad \theta = \frac{T - T_w}{\frac{\bar{q} d}{k}} , \quad d = 4 \frac{A_m}{P_m} , \quad (5)$$

sendo: z a coordenada na direção axial; u , v e w as velocidades nas direções x , y e z ; t o tempo; ρ a massa específica; p a pressão; \bar{p} a pressão média na seção; g a aceleração da gravidade; β o coeficiente de expansão volumétrica; T a temperatura; T_w a temperatura na parede do tubo; ν a viscosidade cinemática; α a difusividade térmica do fluido; τ o tempo adimensional; X e Y as coordenadas adimensionais; d o diâmetro hidráulico; U , V e W as velocidades adimensionais nas direções x , y e z ; P a pressão adimensional; θ a temperatura adimensional; \bar{q} o fluxo de calor através do tubo e k a condutividade térmica do fluido. O número de Prandtl (Pr), o número de Rayleigh (Ra) e a constante geométrica (Cg) são dados por:

$$Pr = \frac{\rho \nu c_p}{k} , \quad Ra = \frac{\rho c_p g \beta \bar{q} d^4}{\nu k^2} , \quad C_g = 4 \frac{P_q}{P_m} , \quad (6)$$

sendo: P_m o perímetro molhado da seção (perímetro do tubo mais perímetro da placa); P_q o perímetro aquecido (tubo); c_p o calor específico a pressão constante e A_m a área molhada da seção (área livre da seção). Para o problema em estudo A_m , P_q e P_m são dados por:

$$A_m = \frac{\pi D^2}{4} - H L , \quad P_q = \pi D , \quad P_m = \pi D + 2(H + L) , \quad (7)$$

sendo: H e L as dimensões da placa nas direções y e x , respectivamente e D o diâmetro do tubo.

Levando-se em conta as definições de P_q e P_m , a constante geométrica Cg é dada por:

$$C_g = \frac{4 \pi RR \sqrt{AR^2 + 1}}{2(AR + 1) + \pi RR \sqrt{AR^2 + 1}}, \quad (8)$$

sendo a razão de raios (RR) e a razão de aspecto (AR) definidas como:

$$RR = \frac{D}{\sqrt{H^2 + L^2}}, \quad AR = \frac{H}{L}. \quad (9)$$

As condições iniciais e de contorno, na forma adimensional, são:

Para $\tau = 0$:

$$\psi = \theta = \omega = W = 0. \quad (10)$$

Para $\tau > 0$:

$$\theta = 0 \quad (\text{tubo}), \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad (\text{placa}), \quad (11)$$

$$\psi = 0 \quad (\text{tubo} + \text{placa}), \quad W = 0 \quad (\text{tubo} + \text{placa}), \quad (12)$$

sendo n a direção normal à superfície.

3. MÉTODO DE SOLUÇÃO

As Equações (1), (2), (3) e (4) são resolvidas através do método de elementos finitos com o elemento triangular linear.

Para cada passo de tempo são calculadas as distribuições de função corrente (ψ), de velocidade axial (W), de temperatura (θ) e de vorticidade (ω). São calculados ainda a velocidade axial média (\overline{W}), a temperatura média ($\overline{\theta}$), o número de Nusselt médio (Nu) e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe). Para o primeiro passo de tempo os valores do tempo anterior são tomados da condição inicial. Todos estes cálculos são feitos na seqüência descrita abaixo.

- Calcula-se a distribuição de ψ utilizando os valores de vorticidade do tempo anterior.
- Calcula-se a distribuição de velocidade axial e a velocidade axial média utilizando os valores da velocidade axial do tempo anterior e os valores calculados da função corrente.
- A distribuição de temperatura é calculada utilizando os valores de temperatura do tempo anterior e os valores calculados da função corrente, da velocidade axial e da velocidade axial média. Calcula-se também a temperatura média
- Calcula-se a média do produto da velocidade axial pela temperatura ($\overline{W\theta}$).
- O cálculo da vorticidade utiliza os valores da vorticidade do tempo anterior e os valores calculados da função corrente e da temperatura
- A vorticidade nas paredes é calculada utilizando os valores calculados da função corrente e, como condição de contorno, os valores da vorticidade nos demais pontos nodais do domínio. Este cálculo é feito na seguinte forma matricial para o elemento:

$$[C^e] \{\omega^e\} = [K_\psi^e] \{\psi^e\}, \quad (13)$$

sendo que a matriz $\{\omega^e\}$ é a vorticidade que se quer calcular e as demais matrizes são conhecidas. As matrizes da Eq. (13) são dadas por:

$$[C^e] = \frac{A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \{\omega^e\} = \begin{bmatrix} \omega_i \\ \omega_j \\ \omega_k \end{bmatrix}, \quad \{\psi^e\} = \begin{bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_k \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$[K_\psi^e] = \frac{1}{4 A_e} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_k + c_j c_k \\ b_k b_i + c_k c_i & b_k b_j + c_k c_j & b_k b_k + c_k c_k \end{bmatrix}, \quad (15)$$

sendo que:

$$b_i = Y_j - Y_k, \quad b_j = Y_k - Y_i, \quad b_k = Y_i - Y_j, \quad (16)$$

$$c_i = X_k - X_j, \quad c_j = X_i - X_k, \quad c_k = X_j - X_i, \quad (17)$$

A_e é a área do elemento, o índice “e” representa o elemento e os índices i, j, k representam os pontos nodais do elemento.

- Calcula-se o número de Nusselt médio (Nu) e o produto do fator de atrito pelo número de Reynolds (fRe), na seguinte forma:

$$Nu = -\frac{\bar{W}}{W \theta}, \quad f Re = \frac{2}{W}. \quad (18)$$

4. VALIDAÇÃO

O código computacional desenvolvido neste trabalho, foi aplicado para o caso de convecção forçada pura e os resultados foram comparados com o trabalho desenvolvido por Hung et al. (1997). Na Tabela 1 são apresentados os resultados para $Ra = 0$ (convecção forçada), razão de raios $RR = 1,25, 2,0$ e $5,0$, razão de aspecto $AR = 0,5, 0,8$ e $1,0$ e número de Prandtl $Pr = 0,7$ (número de Prandtl do ar).

Na Tabela 1, NP é o número de pontos nodais e NE o número de elementos. Alguns cuidados devem ser tomados ao se comparar os resultados do presente trabalho com o trabalho de Hung et al. (1997). As razões de raios e de aspecto definidas em Hung et al. (1997) são o inverso das definidas no presente trabalho e o fator de atrito definido naquele trabalho é $1/4$ do definido neste trabalho. Os valores de RR e AR da Tabela 1 seguem as definições do presente trabalho e o produto fRe de Hung et al. (1997) foi multiplicado por 4 para ser colocado na tabela.

Observando-se a Tabela 1 nota-se que os desvios do presente trabalho em relação ao trabalho de Hung et al. (1997) são pequenos, sendo o máximo de 3,74% para fRe e -0,60% para

o número de Nusselt médio. Levando-se em conta os valores dos desvios encontrados, o código computacional pode ser considerado validado.

Tabela 1. Comparação de resultados de Nu e fRe

		Hung et al. (1997)		Presente trabalho (2000)				
AR	RR	fRe	Nu	fRe	Desvio %	Nu	Desvio %	Malha $NP \times NE$
0,5	2,0	89,48	4,471	92,799	3,71	4,444	-0,60	465×826
0,8	2,0	92,12	4,782	95,564	3,74	4,789	0,15	464×822
1,0	2,0	92,56	-----	95,524	3,20	4,854	-----	484×860
1,0	5,0	90,00	-----	92,653	2,95	4,484	-----	558×1024
1,0	1,25	87,12	-----	89,453	2,68	4,157	-----	568×988

5. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Após a validação do código computacional para o problema de convecção forçada ele é aplicado para a convecção mista. As aplicações são feitas para $Pr = 0,7$, $RR = 1,25, 2,0$ e $5,0$, $AR = 0,5, 0,8$ e $1,0$ e $0 \leq Ra \leq 1 \times 10^6$.

A influência do número de Rayleigh e da razão de aspecto no número de Nusselt médio e no produto fRe pode ser vista nas Fig. 2 e 3. A razão de raios é mantida constante e igual a 2,0, a razão de aspecto assume os valores 0,5, 0,8 e 1,0 e o número de Rayleigh é variado de 0 à 1×10^6 .

Na Figura 2, Nu aumenta com o aumento da razão de aspecto e este aumento é tanto menor quanto maior for o número de Rayleigh, tornando-se quase que imperceptível para $Ra = 1 \times 10^6$. O número de Nusselt médio aumenta também com o aumento de Ra . Na Figura 3, a variação de fRe com a razão de aspecto pode ser dividida em 3 regiões. Para Ra menor que aproximadamente 3×10^4 uma menor razão de aspecto causa o menor valor de fRe . Para Ra entre 3×10^4 e 4×10^4 ocorre uma transição e, para Ra maior que 4×10^4 , fRe aumenta com a diminuição da razão de aspecto e esse aumento é tanto maior quanto maior for o número de Rayleigh. O produto fRe aumenta com o aumento de Ra .

A razão entre o número de Nusselt médio da convecção mista e o número de Nusselt médio da convecção forçada (Nu/Nu_0) e a razão entre o produto fRe da convecção mista e o produto fRe da convecção forçada (fRe/fRe_0) podem ser alteradas pelo número de Rayleigh e pela razão de aspecto da placa, como é mostrado nas Fig. 4 e 5. A razão de raios é mantida constante.

Nas Figuras 4 e 5, as razões Nu/Nu_0 e fRe/fRe_0 aumentam com a diminuição da razão de aspecto e com o aumento do número de Rayleigh. O aumento de Nu/Nu_0 em função de Ra pode chegar a mais de 100% ($Ra = 1 \times 10^6$) enquanto que o aumento de fRe/fRe_0 atinge um máximo de cerca de 35% ($Ra = 1 \times 10^6$), que é bem menor do que os 100% atingido pela razão Nu/Nu_0 .

Para as Fig. 6 e 7, a razão de aspecto é mantida constante e igual a 1,0, a razão de raios assume os valores 1,25, 2,00 e 5,00 e o número de Rayleigh é variado de 0 à 1×10^6 . Na Figura 6, Nu aumenta com o aumento da razão de raios para qualquer valor de Ra , e com o aumento de Ra para todas as razões de raios. Na Figura 7, a variação de fRe com a razão de raios pode ser dividida em duas regiões. Para Ra menor que aproximadamente 6×10^4 fRe é menor para pequenas razões de raios, tem um valor intermediário para grandes razões de raios e um valor mais alto para razões de raios intermediárias. Para Ra maior que aproximadamente 6×10^4 fRe aumenta com o aumento da razão de raios. O produto fRe aumenta com o aumento de Ra para todas as razões de raios.

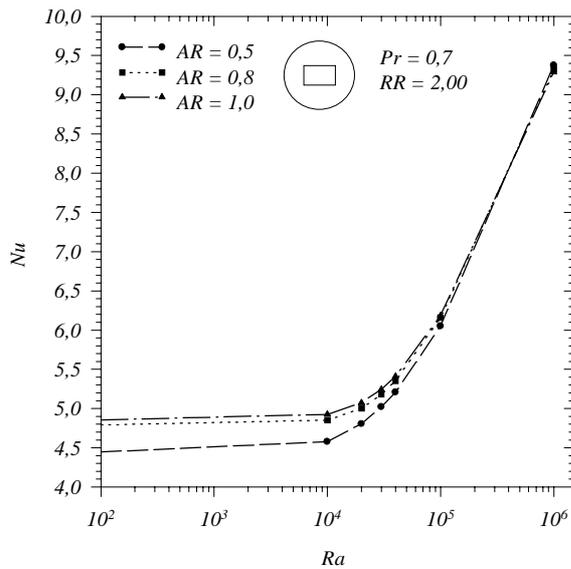


Figura 2 – Número de Nusselt médio em função de Ra e da razão de aspecto.

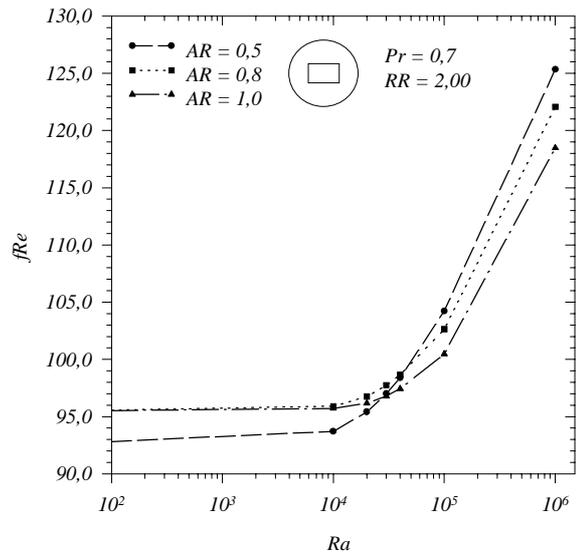


Figura 3 – Produto fRe em função de Ra e da razão de aspecto.

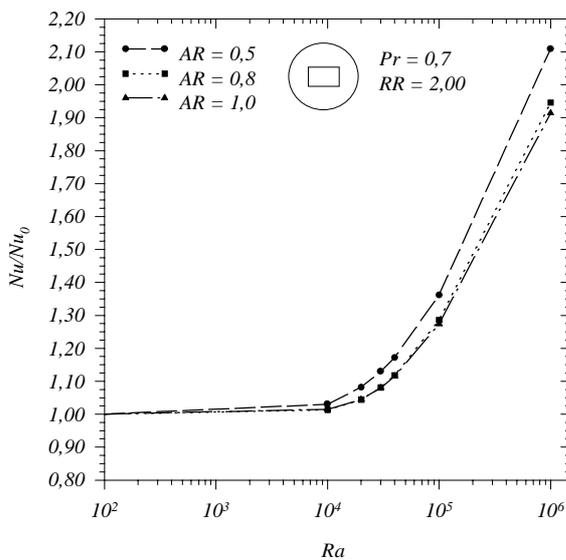


Figura 4 – Nu/Nu_0 em função de Ra e da razão de aspecto.

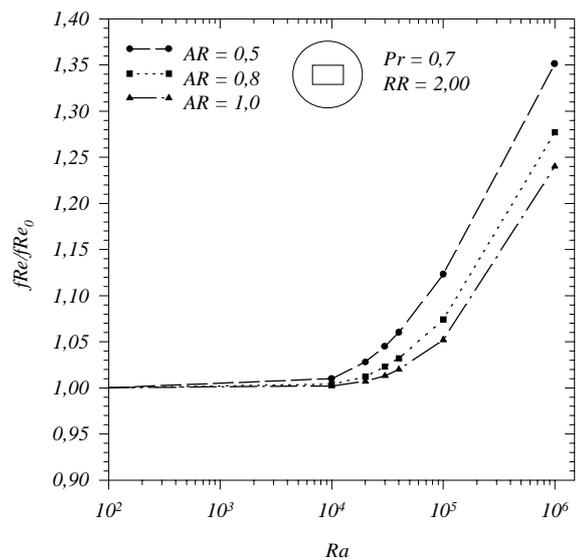


Figura 5 – fRe/fRe_0 em função de Ra e da razão de aspecto.

A razão Nu/Nu_0 e a razão fRe/fRe_0 também podem ser alteradas pela razão de raios da placa, como pode ser visto nas Fig. 8 e 9. A razão de aspecto é mantida constante. Na Figura 8, a razão Nu/Nu_0 tem um valor menor para uma razão de raios intermediária, um valor intermediário para uma razão de raios maior e um valor mais alto para uma razão de raios menor. Na Figura 9, a razão fRe/fRe_0 tem um valor menor para uma razão de raios média, um valor médio para uma razão de raios menor e um valor maior para uma razão de raios maior.

Observando as Fig. 4, 5, 8 e 9 nota-se que para número de Rayleigh menor ou igual a aproximadamente 1×10^4 , o problema de transferência de calor pode ser estudado considerando-se apenas a convecção forçada sem cometer erros consideráveis. Para número de Rayleigh acima

deste valor, os erros cometidos se tornam cada vez maiores, inviabilizando o estudo através apenas da convecção forçada, tornando necessário então o uso da convecção mista.

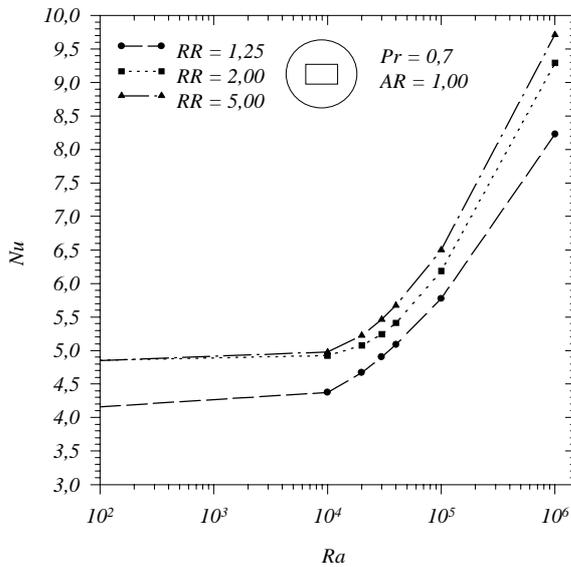


Figura 6 - Número de Nusselt médio em função de Ra e da razão de raios.

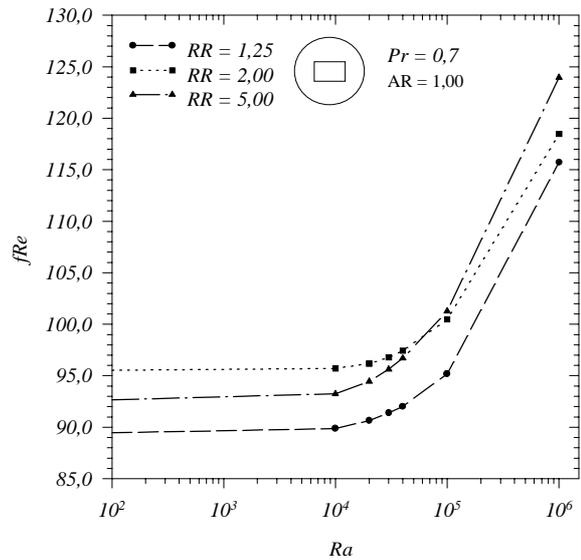


Figura 7 – Produto fRe em função de Ra e da razão de raios.

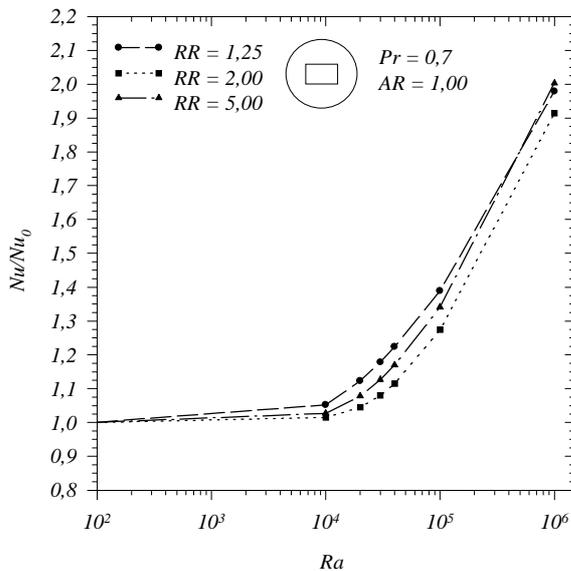


Figura 8 – Nu/Nu_0 em função de Ra e da razão de raios.

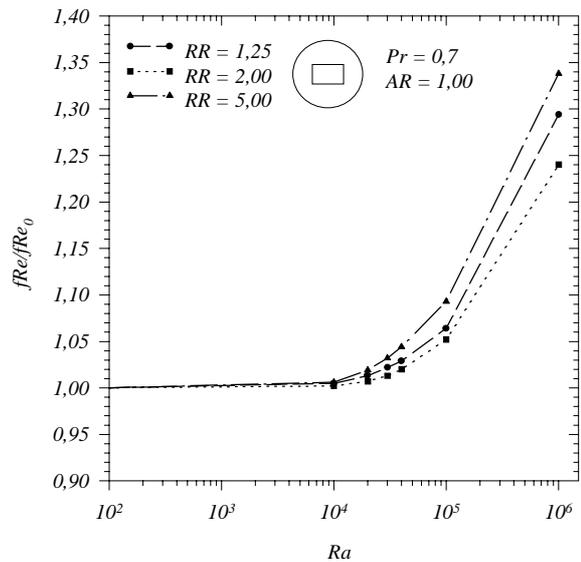


Figura 9 – fRe/fRe_0 em função de Ra e da razão de raios.

Nas Figuras 10 e 11 estão representadas as isotermas e linhas de função corrente da seção transversal do tubo para $RR = 2,0$, $AR = 0,5$ e $1,0$ e $Ra = 1 \times 10^4$, 1×10^5 e 1×10^6 . Devido à simetria em relação a um plano vertical passando pelo centro da seção transversal, as isotermas são mostradas no lado esquerdo e as linhas de função corrente no lado direito da seção. As isotermas têm um valor máximo de $\theta_{max} = 0$ na parede do tubo. Para $Ra = 1 \times 10^4$ existe uma assimetria em relação a um plano horizontal passando pelo centro da placa, ou seja, as isotermas localizadas abaixo da placa estão mais próximas umas das outras, do que as localizadas acima da

placa. Isto mostra o início de um fluxo transversal (fluxo secundário) causado pela convecção natural. Com o aumento do número de Rayleigh para $Ra = 1 \times 10^5$ e $Ra = 1 \times 10^6$, a assimetria em relação ao plano horizontal se intensifica ainda mais, passando a existir uma região de baixa temperatura na parte inferior do tubo e um região de alta temperatura na sua parte superior. Há um aumento na temperatura média do fluido.

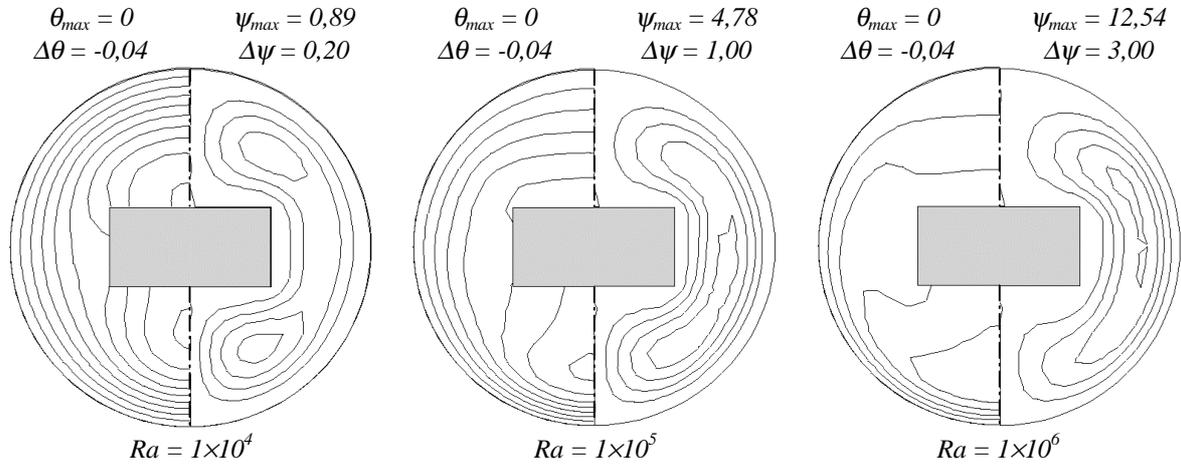


Figura 10 - Isotermas e linhas de função corrente para $RR = 2,0$, $AR = 0,5$ e Ra variando de 1×10^4 à 1×10^6 .

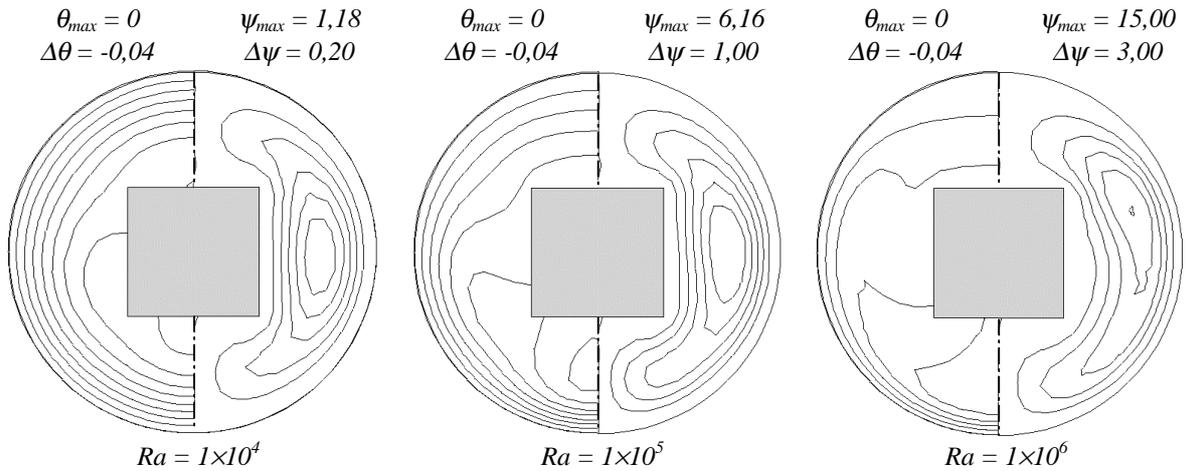


Figura 11 - Isotermas e linhas de função corrente para $RR = 2,0$, $AR = 1,0$ e Ra variando de 1×10^4 à 1×10^6 .

As linhas de função corrente tem o valor zero nas paredes da placa e do tubo e o valor máximo (ψ_{max}) no núcleo da célula de escoamento secundário. Observando os valores máximos de função corrente (ψ_{max}) e o intervalo entre elas ($\Delta\psi$), nota-se que o valor máximo de ψ aumenta com o aumento do número de Rayleigh, o que significa dizer que a velocidade do escoamento secundário aumenta com o aumento de Ra , ou seja, o escoamento secundário se torna mais forte com o aumento de Ra . Nota-se nas Fig. 10 e 11, para $Ra = 1 \times 10^6$, a existência de uma maior velocidade do escoamento secundário próximo à parede do tubo, o que pode ser verificado pela menor distância entre as linhas de função corrente nesta região.

Agradecimentos

Agradeço à instituição CAPES pelo apoio financeiro sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Hsieh, S. S. and Wen, M. Y., 1996, Developing three-dimensional laminar mixed convection in a circular tube inserted with longitudinal strips, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 39, n. 2, pp. 299-310.
- Hung, C. I., Lin, Y. S. and Chen, J. D., 1997, Numerical study of heat transfer enhancement of a horizontal tube with an eccentrically inserted plate, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 40, n. 7, pp. 1687-1692.
- Kaviany, M., 1986, Laminar combined convection in a horizontal annulus subject to constant heat flux inner wall and adiabatic outer wall, *Journal of Heat Transfer*, vol. 108, pp. 392-397.
- Nieckele, A. O. and Patankar, S. V., 1985, Laminar mixed convection in a concentric annulus with horizontal axis, *Journal of Heat Transfer*, vol. 107, n. 4, pp. 902-909.
- Ribeiro, M. M., 1992, Estudo da transferência de calor por convecção mista no interior de tubos horizontais concêntricos e excêntricos, *Dissertação de Mestrado*, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Itajubá, M. G., Brasil.
- Yoo, J. S., 1998a, Mixed convection of air between two horizontal concentric cylinders with a cooled rotating outer cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 41, n. 2, pp. 293-302.
- Yoo, J. S., 1998b, Natural convection in a narrow horizontal cylindrical annulus: $Pr \leq 0.3$, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 41, n. 20, pp. 3055-3073.

MIXED CONVECTION INSIDE A HORIZONTAL TUBE WITH AN INNER RECTANGULAR PLATE

Abstract: *In this work the laminar mixed convection inside a horizontal tube, with an axial rectangular inner plate, is analyzed. The following conditions are assumed: the inner plate is insulated and the tube has axially uniform heat flux and circumferentially uniform temperature. The finite element method, with the linear triangular element, is utilized to solve the conservation equations for the stream function (ψ), vorticity (ω), temperature (θ) and axial velocity (W). The Nusselt number (Nu) and the friction factor-Reynolds number product (fRe) are determined in terms of the radius ratio (RR), aspect ratio of the plate (AR), Rayleigh number (Ra) and a constant Prandtl number ($Pr = 0.7$). Temperature distribution and stream function distribution are presented for: $Pr = 0.7$, $RR = 2.0$, $AR = 0.5$ and 1.0 and $Ra = 1 \times 10^4$, 1×10^5 and 1×10^6 .*

Key-words: *Mixed convection, Finite element method, Heat transfer, Numerical methods.*