

ANÁLISE DINÂMICA DE UM GIROSCÓPIO

Maurício Soares Leão¹ (PIBIC/Unioeste), Samuel da Silva² (Orientador)
e-mails: ¹mauriciosoaresleao@gmail.com, ²samuel.silva@unioeste.br

Universidade Estadual do Oeste do Paraná, UNIOESTE. Avenida Tarquínio Joslin dos Santos, 1300 - Foz do Iguaçu-PR, 85870-650

RESUMO: Um corpo rígido girando no espaço em torno do seu eixo de simetria pode ser definido como um giroscópio. Nesses dispositivos, a taxa de variação do vetor momento angular sofre variação apenas se houver a aplicação de um torque externo. Essa variação pode dar origem a forças giroscópicas que podem ser elevadas, e devem ser previstas durante o projeto de máquinas rotativas. Este artigo apresenta a modelagem do giroscópio Pasco[®], modelo ME-8960, e a solução das equações diferenciais do movimento usando o método de Runge-Kutta de 4^o ordem. Os resultados são comparados com os dados experimentais do movimento real do giroscópio em termos de posição de precessão, nutação e trajetórias no espaço para diferentes condições iniciais. Os resultados encontrados foram satisfatórios comprovando que foi obtido um bom modelo.

PALAVRAS-CHAVE: giroscópio, matrizes de transformação de coordenadas, ângulos de Euler

ABSTRACT: A rigid body rotating in space around its axis of symmetry can be defined as a gyroscope. In these devices, the rate of change of angular momentum vector suffers variation only if the application of an external torque. This variation can give rise to gyroscopic forces can be high, and should be provided during the design of rotating machines. This paper presents the modeling of the gyroscope Pasco[®], model ME-8960, and the solution of differential equations of motion using the Runge-Kutta 4th order. The results are compared with experimental data of the actual motion of the gyroscope in position of precession, nutation and trajectories in space for different initial conditions. The results were satisfactory showing that a good model was obtained.

KEYWORDS: gyroscope, coordinate transformation matrices, Euler's angles

INTRODUÇÃO

Todo corpo rígido girando no espaço em torno de seu eixo de simetria caracteriza um giroscópio (Barcelos Neto, 2004). O efeito giroscópico tem uma grande aplicação, (Moura, 2001), que vão desde sistemas inerciais para navegação, orientação e controle de aviões, naves espaciais, (Macglynn, 2007) etc. Porém, se houver algum tipo de desbalanceamento em máquinas rotativas, podem surgir forças de origem giroscópicas indesejáveis, e quando as mesmas se tornam elevadas, podem causar perda de desempenho, diminuição do fator de segurança e até graves acidentes. Neste sentido, a ideia desse artigo é apresentar a modelagem matemática de um giroscópio da Pasco[®] e comparar os resultados numéricos com os experimentais. Buscou-se animar a trajetória da simulação visando prever o comportamento real do giroscópio.

METODOLOGIA

Os sistemas referenciais utilizados são mostrados nas Figs. (1.a) e (1.b).

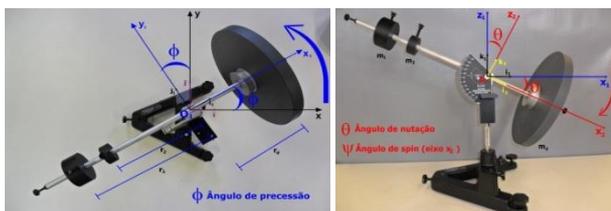


Figura 1.a. Sistema inercial e móvel B₁

Figura 1.b. Sistema móvel B₁ e B₂

Para a obtenção das equações do movimento do giroscópio na base B₂, se faz necessário a resolução da equação de Euler, que relaciona os torques resultantes no sistema com a taxa de variação do vetor momento angular, ambos no sistema móvel B₂. Aplicando esta equação é obtida a seguinte expressão:

$$B_2 \dot{L}_r = \begin{Bmatrix} -\dot{\phi} \sin \theta I_x - \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \theta (I_x + I_y - I_z) + \ddot{\psi} I_{xx} \\ \ddot{\theta} I_y - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta (I_x - I_z) + \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta I_{xx} \\ \dot{\phi} \cos \theta I_z - \dot{\theta} \dot{\psi} I_{xx} + \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta (I_x - I_y - I_z) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

sendo τ os torques e I os momentos de inércia de massa. Escrevendo a "Eq. (1)", já descritas no espaço de estados, obtêm-se as equações do movimento do giroscópio:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\tau_z + x_4 x_6 I_{xx} - x_2 x_6 \sin x_3 (I_x - I_y - I_z)}{I_z \cos x_3} \quad (3)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (4)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{\tau_y + x_2^2 \sin x_3 \cos x_3 (I_x - I_z) - x_2 x_6 \cos x_3 I_{xx}}{I_y} \quad (5)$$

$$\dot{x}_5 = x_6 \quad (6)$$

$$x_6 = \frac{\tau_z [\tau_z + x_4 x_6 l_{zz} - x_2 x_6 \sin x_2 (l_x - l_y - l_z)] \tan x_2 \frac{l_x}{l_z}}{l_{zz}} + \frac{x_2 x_4 \cos x_2 (l_x + l_y - l_z)}{l_{zz}} \quad (7)$$

Procedimento experimental

Os dados experimentais foram obtidos através de dois sensores de rotação acoplados ao giroscópio. A aquisição de dados foi feita com a placa ScienceWorkshop® 750 e visualizados na interface DataStudio, com uma taxa de amostragem de 1kHz e alta resolução. Por meio de um tacômetro conectado ao dispositivo, modelo TEKNIKAO NK600 a velocidade de spin do giroscópio foi medida. A Fig.(2) ilustra o procedimento:



Figura 2. Equipamentos utilizados para os testes experimentais

Os parâmetros físicos dos contrapesos e do disco utilizados no modelo estão na tabela 1, sendo $g = 9,8m/s$ e $k = 100N/rad$:

Tabela 1. Parâmetros dos pesos e do disco

	$m(kg)$	$h(m)$	$l(m)$	$R(m)$
m_d	1,740	0,1465		0,1270
m_1	0,900	-0,2575	0,0315	0,0350
m_2	0,030	-0,1680	0,0190	0,0225
m_3	0,0150	0,1845	0,0154	0,0205

A solução numérica das equações diferenciais foram realizadas com o auxílio do MATLAB®, implementando-se o método de Runge-Kutta de 4º Ordem. A implementação desse método exigiu a transformação das três equações diferenciais do movimento de 2º Ordem, em seis equações diferenciais de 1º Ordem. Para isso, utilizou-se o conceito de variáveis de estado.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

As relações utilizadas no algoritmo implementado no MATLAB® são x_1, x_3, x_5 as posições de precessão, nutação e spin e x_2, x_4, x_6 as velocidades de precessão, nutação e spin, respectivamente.

As condições iniciais simuladas foram as seguintes:

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = -20^\circ; x_4 = 0; x_5 = 0; x_6 = 71,21 \text{ rad/s}$$

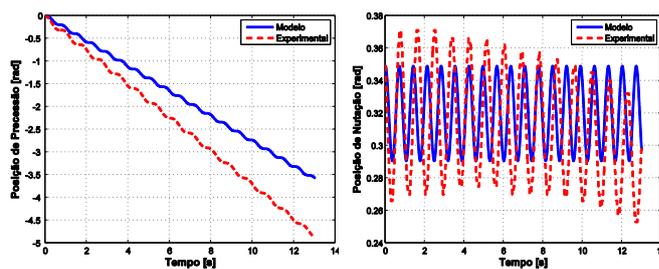


Figura 3. Comparação da posição de precessão e nutação numérica e experimental para condições iniciais acima

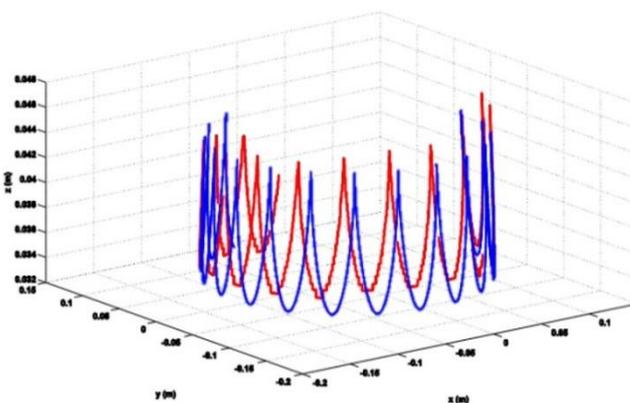


Figura 4. Trajetórias numérica e experimental sobrepostas para as mesmas condições iniciais

Também foi realizada uma comparação entre as trajetórias animadas de um modelo geométrico do giroscópio desenvolvido no MATLAB® com uma filmagem do giroscópio real. Essa comparação revelou tendências bastante satisfatórias.

CONCLUSÃO

A análise dos resultados mostrou que apesar das simplificações feitas no modelo, desconsiderando o atrito, é possível descrever com riqueza de detalhes o comportamento dinâmico do giroscópio.

REFERÊNCIAS

- BARCELOS NETO, J. Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004.
- MCGLYNN, E. Introducing gyroscopes quantitatively without utting studnets into a Spin. European Journal of Physics, 23 Março 2007. 479-484.
- MOURA, E. M. D. Uma contribuição ao Estudo de Sistemas Dinâmicos Giroscópicos Não-Lineares. Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 2001.

DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis pelo material impresso contido neste artigo.