

APLICAÇÃO DE TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO NA REDUÇÃO DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO EM PLACA COM FURO SOB TRAÇÃO.

Paulo Rogério Franquetto.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
Av. Sete de Setembro, 3165. Curitiba. Paraná
CEP: 80230-901
paulofranquetto@yahoo.com.br

Jucélio Tomás Pereira.

jucelio@utfpr.edu.br

Resumo: Este trabalho tem como objetivo buscar a redução no valor do fator de concentração de tensão em uma chapa retangular com furo central, de dimensões fixas, sob o carregamento de tração. Para isso, são utilizadas quatro formas geométricas de alívio: um furo, dois furos, elipse e triângulo. Cada forma é modelada parametricamente sendo realizado a determinação dos valores ótimos dos parâmetros, através da utilização do Método dos Elementos Finitos aliado aos métodos de otimização matemática disponíveis no módulo de otimização do software comercial ANSYS.

Palavras-chave: concentração de tensão, otimização paramétrica, Método dos Elementos Finito.

1. INTRODUÇÃO

1.1. Problema

O avanço da tecnologia vem aprimorando constantemente os processos de fabricação e as técnicas de projeto de componentes mecânicos. Porém, apesar deste aprimoramento contínuo, alguns elementos continuam presentes nos projetos, tais como: furos para colocação de parafusos ou pinos, escalonamento de eixos para acomodar rolamento, rasgos para anel elástico, entalhes, entre outros, e, segundo NORTON (2004), estes elementos são freqüentes. Eles têm em comum a característica de deixar a peça com seção transversal não-uniforme ou descontínua.

Inúmeros autores (HIBBELER, 2000; PILKEY, 1997; TIMOSHENKO, 1976) apontam as discontinuidades como regiões críticas da peça, em virtude do aparecimento de valores de tensões superiores ao valor nominal calculado através da teoria da elasticidade. Com isso, têm-se pontos de grande possibilidade de nucleação de trincas e, conseqüentemente, de falha, como apontam ZAHAVI (1996) e NORTON (2004). A Figura 1 ilustra qualitativamente a distribuição de tensão em uma placa com furo central sujeita a um carregamento de tração uniaxial. Próximo a descontinuidade (furo), a tensão apresenta um aumento abrupto caracterizado pelo pico de tensão σ_{max} , no ponto A.

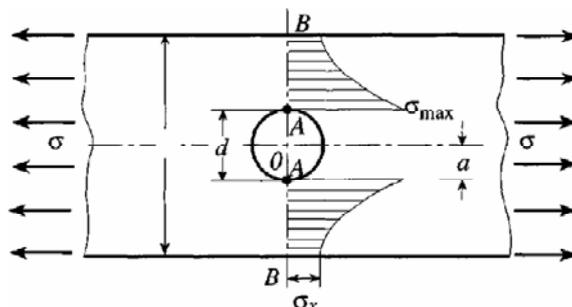


Figura 1 – Distribuição qualitativa de tensão em placa sob tração. Fonte: PILKEY (1997).

Dessa maneira, PILKEY (1997) afirma que descontinuidades ou variações na seção transversal ao longo de um componente mecânico apresentam picos de tensões localizados. Esse fenômeno é definido como concentração de tensão que é caracterizado e quantificado através do fator de concentração de tensão, usualmente indicado por K_t , e avaliado em relação a tensão nominal σ , como

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} \quad (1)$$

A presença de concentração de tensão, em geral, é inevitável. Entretanto, existem várias formas de reduzir o valor do K_t , dentre as quais algumas são propostas por NORTON (2004). Um exemplo é através da adição de elementos de alívio ao redor do concentrador de tensão, como mostra esquematicamente a Figura 2.

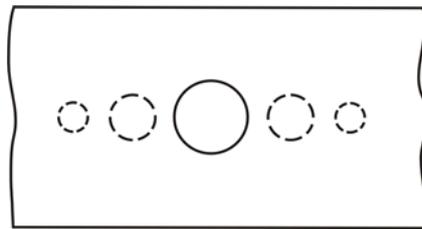


Figura 2 – Furos de alívio de tensão indicados com linha tracejada.

Entretanto, a adição de elementos geométricos de alívio de forma aleatória, não garante a máxima redução do K_t . Assim, o problema geral deste trabalho é determinar a configuração ótima para diferentes elementos geométricos de alívio aplicados ao problema de placa plana com furo, a fim de obter a máxima redução do K_t para cada forma de alívio estudada.

1.2. Objetivo

Esse trabalho tem por objetivo obter a máxima redução no fator de concentração de tensão em uma placa retangular de 300 mm por 75 mm com um furo central de diâmetro 30 mm, utilizando quatro diferentes tipos de elementos geométricos de alívio: um furo, dois furos, elipse e triângulo.

1.3. Justificativa

A redução nos picos de tensão tem impacto direto em itens cruciais de projeto:

1. Produção de produtos menos robustos;
2. Aumento da vida a fadiga (NORTON, 2004);
3. Aumento dos coeficientes de segurança;
4. Redução de ocorrência de corrosão sob tensão (GENTIL 2003).

Assim, a redução no fator de concentração de tensão, facilita a busca por projetos mais racionais evitando o desperdício de material e energia, além de aumentar a confiabilidade do componente produzido.

2. DESENVOLVIMENTO

2.1. Mecânica dos sólidos

Um dos conceitos fundamentais no estudo da mecânica dos sólidos é o de tensão. Para um dado elemento sujeito a um carregamento qualquer, pode-se obter a força resultante deste carregamento em uma seção qualquer do sólido, a razão da força resultante pela área desta seção é definida como tensão. Matematicamente, a definição fica (SADD, 2005),

$$\sigma = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \quad (2)$$

sendo, ΔF o valor da força no elemento de área; e,

ΔA o valor da área.

Ampliando a análise, pode-se adotar um cubo de tamanho infinitesimal dentro do sólido em estudo. O estado de tensões que é obtido neste cubo fornece dois tipos de tensões: normais e cisalhantes, Figura 3. As tensões normais atuam na direção perpendicular a face do cubo e as cisalhantes atuam paralelamente a estas faces tendendo a rasgar (cisalhar) o material.

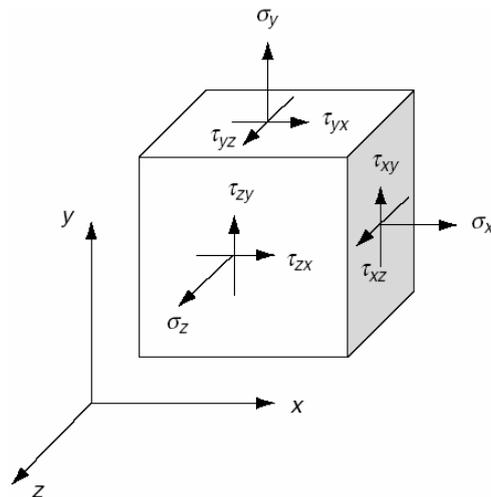


Figura 3 – Estado de tensões em cubo de dimensões infinitesimais. Fonte: SADD 2005.

Pode-se relacionar o valor da tensão com a deformação do material através da equação constitutiva, para materiais isotrópicos (SÁNCHEZ, 2000),

$$\sigma_{ij} = G(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}) \quad (3)$$

sendo, ν o coeficiente de poisson;

G o módulo de elasticidade transversal;

ε_{ij} o tensor deformações; e,

δ_{ij} é o operador delta de Kronecker;

Calculado o valor das tensões em um componente é possível prever se o material irar falhar ou não, aplicando algum critério de falha. O mais empregado para materiais dúcteis, isotrópicos em carregamento estático é o critério de energia de distorção de von Mises-Hencky. Nele, o material escoar caso a tensão equivalente de von Mises

$$\sigma' = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}} \quad (4)$$

seja inferior a tensão de escoamento do material. O critério de von Mises foi o adotado para as análises do corrente trabalho.

2.2. Métodos dos Elementos Finitos (MEF)

A base do MEF consiste em substituir um contínuo com infinitos pontos por um número finito de subdomínios onde a solução é aproximada internamente por funções simples. Estes elementos são conectados uns aos outros pelas suas faces e arestas, as quais são geralmente definidas por funções polinomiais e um número finito de pequeno de pontos conhecidos como nós (SADD, 2005).

Neste trabalho, temos uma configuração de estado plano de tensões, o que simplifica a análise numérica, visto que os deslocamentos fora do plano são desprezíveis.

2.3. Problema geral de otimização

O problema de otimização pode ser escrito de forma genérica. Minimizar (ou maximizar) uma dada função,

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5)$$

conhecida como função objetivo, para um dado vetor de variáveis, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, denominado vetor de variáveis de projeto, sujeito a p restrições de igualdade,

$$h_j(x) = h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad j=1 \text{ até } p \quad (6)$$

e m restrições de desigualdade,

$$g_i(x) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad j=1 \text{ até } m \quad (7)$$

Neste trabalho a função objetivo adotada refere-se a minimização da tensão máxima na placa. As variáveis de projeto são os parâmetros ou cotas utilizados em cada forma de alívio. Utilizaram-se também algumas restrições de desigualdade que serão mais a frente descritas.

2.4. Métodos de otimização

O *software* ANSYS possui dois métodos de otimização: o subproblema e o método de primeira ordem. Ambos foram utilizados neste trabalho.

O método do subproblema estabelece uma relação entre a função objetivo e as variáveis de projeto determinando uma função de aproximação. Para isto, é realizada a avaliação da função objetivo em $n+2$ pontos de forma randômica, sendo n o número de variáveis de projeto. Posteriormente são determinados os coeficientes da parábola que passa por estes pontos, através do método dos mínimos quadrados. O resultado é uma função que aproxima a função objetivo do problema. A forma mais complexa que esta aproximação pode ser adotada no software é a quadrática com termos cruzados, da seguinte forma,

$$\bar{f} = a_0 + \sum_i^n a_i x_i + \sum_i^n \sum_i^n b_{ij} x_i x_j \quad (8)$$

sendo, \bar{f} a função aproximação; e,

a_i, b_{ij} os coeficientes da parábola.

As restrições do problema, definidos no *software* como variáveis de estado, sofrem o mesmo tratamento da função objetivo, ou seja, também é determinada uma função que aproxima as restrições em função das variáveis de projeto.

A técnica dos mínimos quadrados ponderada para a determinação dos coeficientes da parábola, é escrito na forma,

$$E^2 = \sum_{j=1}^{n_d} \phi^{(j)} (f^{(j)} - \bar{f}^{(j)})^2 \quad (9)$$

onde, $\phi^{(j)}$ é um pesos calculado internamente pelo *software* associado ao projeto j ; e,

n_d é número corrente de projeto.

Posteriormente, as restrições do problema são introduzidas na função objetivo através da adição de uma função penalidade nas restrições, convertendo o problema em sem restrições. Para isto a nova função objetivo fica

$$F(x, p_k) = \bar{f} + p_k \left[f_1 \sum_{j=1}^n X(x_i) + f_2 \sum_{j=1}^p H(h_i) + f_3 \sum_{j=1}^m G(g_i) \right] \quad (10)$$

onde, $F(x, p_k)$ é a nova função objetivo com as restrições incorporadas,

X, H e G são as funções penalidade;

f_1, f_2, f_3 são valores introduzidos para padronização de unidades; e,

p_k é um parâmetro de resposta do problema, valor que aumenta continuamente durante o processo de otimização, sendo $p_1 < p_2 < p_3, \text{ etc.}$

Feita esta conversão, é calculado o mínimo da função objetivo. Atingindo a tolerância adotada, ou o número de iterações máximo, o programa pára. Caso contrário, a função de aproximação é atualizada com base no ponto de mínimo encontrado anteriormente sendo então reiniciado o processo. A vantagem deste método é sua rapidez, visto que não utiliza o cálculo de gradientes da função, porém não garante que o mínimo encontrado é o global.

Já o método de primeira ordem, utiliza a avaliação do gradiente das variáveis de projeto no ponto, determinando assim, uma direção que minimize a função objetivo, definida como direção de descida. Este método também converte o problema com restrição e um sem restrição na forma

$$F(x, p_k) = \frac{f}{f_0} + \sum_{i=1}^n P_x(x_i) + p_k \left[\sum_{j=1}^{m1} P_g(g_i) + \sum_{i=1}^{m2} P_h(h_i) \right] \quad (11)$$

onde, P_x é um penalidade exterior aplicada as variáveis de projeto; e,

P_g e P_h são penalidades aplicadas as restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente.

Durante o processo de otimização, o *software* determina o próximo ponto, x^{k+1} , através da direção e do passo de descida calculados anteriormente, assim o novo ponto fica,

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^k \quad (12)$$

sendo, α_k o passo de descida; e,

d^k a direção de descida.

Os métodos utilizados na determinação desta direção são o *steepest descent* e o gradiente conjugado. Então, para a direção encontrada, é realizada uma pesquisa unidirecional para a determinação do passo de descida, que corresponde a distância do ponto calculado até o ponto de mínimo na direção calculada. Os métodos utilizados para a determinação do passo de descida são o *golden section* e método de aproximação quadrática. Dessa forma, cada iteração deste método corresponde a um número de subiterações para o cálculo da direção e do passo de descida, o que torna este método mais oneroso computacionalmente.

. O critério de para o término do processo de otimização é o mesmo tanto para o subproblema quanto para o método de primeira ordem e é definido como

$$|f^j - f^{j-1}| \leq \rho \quad (13)$$

$$|f^j - f^b| \leq \rho \quad (14)$$

$$|x_i^j - x_i^{j-1}| \leq \rho \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (15)$$

$$|x_i^j - x_i^b| \leq \rho \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (16)$$

sendo ρ o valor da tolerância; e,

x_i^b e f^b são a coordenada i e o valor da função objetivo no melhor projeto obtido até a corrente iteração j , respectivamente.

2.5. Materiais e métodos

Para a forma de alívio com um furo, foram utilizados como variáveis de projeto o diâmetro, D , e a posição do furo, L , indicados na Figura 4. Para o caso com dois furos de alívio, as variáveis de projeto foram os diâmetros, $D1$ e $D2$, e as posições, $L1$ e $L2$, mostrados na Figura 5. O alívio elíptico teve como parâmetros a posição da elipse L e suas dimensões A e B , Figura 6. Finalmente, para o alívio triangular, foram empregados quatro variáveis de projeto, $L1$, $L2$, D e H , Figura 7.

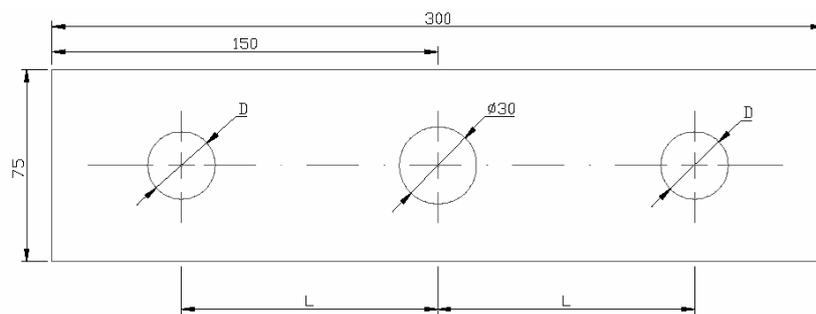


Figura 4 – Variáveis de projeto para o caso de alívio com um furo.

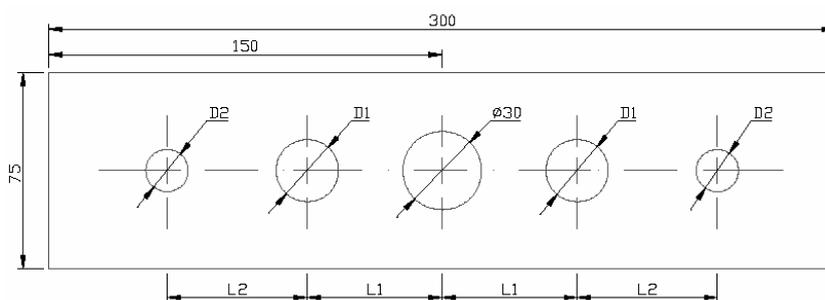


Figura 5 – Variáveis de projeto para o caso de alívio com dois furos.

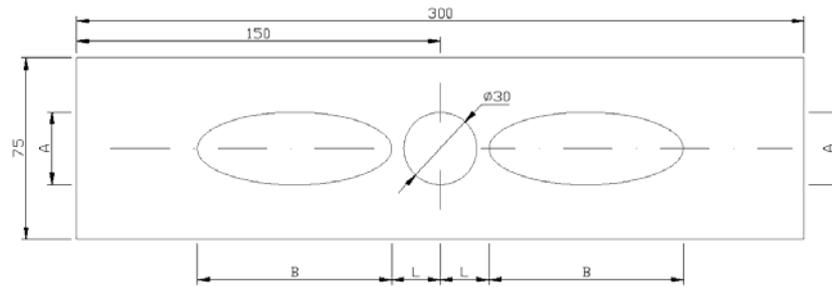


Figura 6 – Variáveis de projeto para o caso de alívio elíptico.

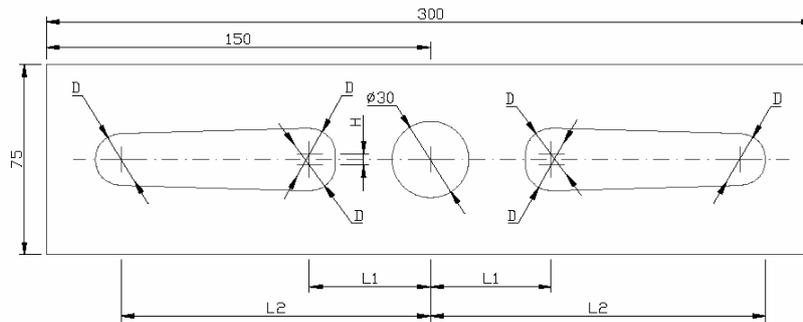


Figura 7 – Variáveis de projeto para o caso de alívio triangular.

Como os casos estudados são simétricos, e visando maior rapidez na análise numérica, os mesmos foram resolvidos apenas tomando a quarta parte da chapa.

Para todos os casos, adotou-se como restrição no processo de otimização que a espessura mínima de material entre os elementos de alívio (no caso de dois furos) e entre o elemento de alívio e o furo central fosse de no mínimo 5 mm. Outra restrição, aplicada nos casos de alívio triangular e elíptico, é de que a distância do elemento de alívio até extremidade esquerda da chapa fosse de no mínimo 20 mm.

As restrições adotadas nas variáveis de projeto estão listadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Restrições aplicadas as variáveis de projeto.

Forma de alívio	Limite inferior (mm)	Variável	Limite Superior (mm)
Um furo	1	D	30
	31	L	130
Dois furos	1	D1	30
	1	D2	30
	31	L1	65
Elipse	31	L2	65
	20	L	40
	1	A	20
Triangular	1	B	45
	20,5	L1	50
	60	L2	129,5
	1	D	30
	1	H	30

Para a geração da malha utilizou-se o elemento plano quadrático de oito nós, Figura 8, sendo que seu tamanho variou de 2 mm em regiões da chapa de menor interesse até 0,5mm em pontos ao redor do furo central e dos elementos de alívio.

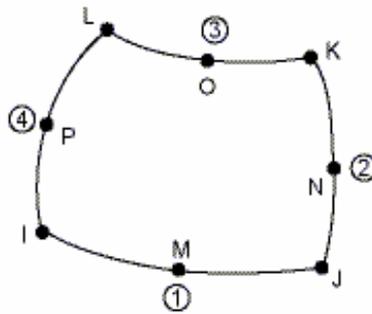


Figura 8 – Elemento plano quadrático utilizado nas análises.

As condições de contorno do problema estão apresentadas na Figura 9. Aplicou-se uma pressão de 1 MPa na extremidade esquerda do modelo e condições de simetria nas linhas correspondentes a redução do problema.

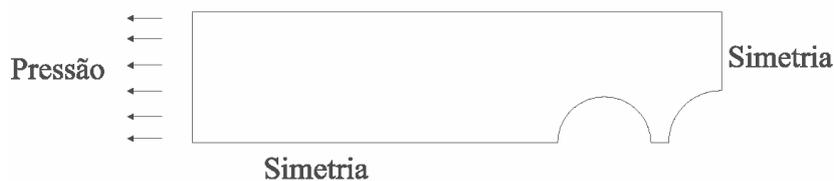


Figura 9 – Condições de contorno aplicadas no modelo numérico.

Para cada processo de análise, foi tomado como ponto inicial um vértice do hiper-cubo n -dimensional definido pelos limites simples sobre as variáveis de projeto. A região viável ainda foi dividida em três partes iguais sendo assim, definido um outro hiper-cubo e o ponto médio da região. Dessa forma, o número total de casos analisados é dado por $2 \times (2^n) + 1$. Esta metodologia foi adotada devida a dispersão dos resultados obtidos.

Para a determinação do ponto de ótimo, foi executado inicialmente o método do subproblema e posteriormente, com base no ponto obtido, foi executado o método de primeira ordem. Esta metodologia foi adotada com o intuito de reduzir o tempo de processamento visto que a execução somente do método de primeira ordem é muito onerosa.

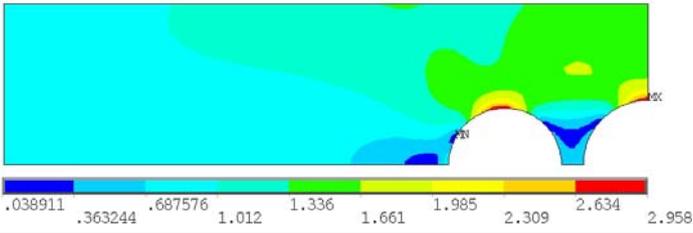
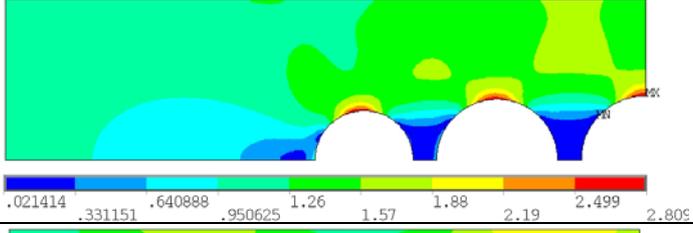
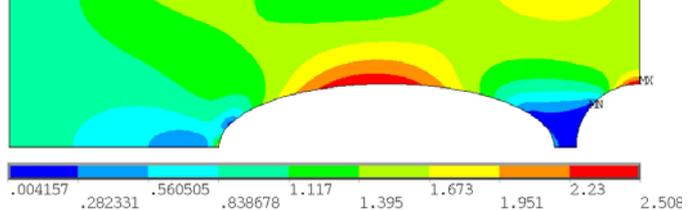
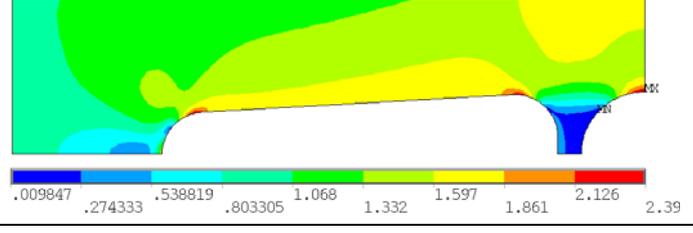
A tolerância, ρ , adotada como critério de parada do processo de otimização foi de 10^{-3} .

2.6. Resultados

Os vetores ótimos estão listados na Tabela 2, e referem-se ao mínimo valor obtido de todas as análises realizadas. A comparação dos dados, para efeito do cálculo da porcentagem de redução, foi realizado com base no K_t de uma chapa sem nenhum elemento de alívio, que, para as dimensões adotadas é de 3,744, de acordo com PILKEY (1997).

Apenas para o caso de alívio com um furo os nove casos executados convergiram para um mesmo ponto de mínimo. Os demais apresentaram grande dispersão dos resultados, sendo que alguns casos convergiram para pontos muito distantes dos listados na Tabela 2, indicando que as funções destes problemas possuem mínimos locais.

Tabela 2 – Resultados ótimos obtidos para cada forma de alívio utilizada.

Forma de alívio	Redução	Vetor ótimo (mm)		Estado de tensões de von Mises (MPa)
Um furo	21%	D	26,299	
		L	33,246	
Dois furos	25%	D1	28,340	
		D2	22,985	
		L1	34,775	
		L2	31,138	
Elipse	33%	L	20,097	
		A	15,034	
		B	40,043	
Triângulo	36%	D	20,319	
		H	4,189	
		L1	30,712	
		L2	104,260	

3. CONCLUSÕES

Observa-se que os métodos utilizados possuem dificuldade em convergir para um ponto de mínimo global, apesar de serem métodos robustos. Dessa forma foi necessário variar o vetor inicial de projeto para melhor acompanhar o comportamento da função. Os resultados obtidos, muito embora sejam pontos de mínimo, podem não ser pontos de mínimo global, mas estarem na vizinhança deste ponto, isto ocorre devido aos erros numéricos que o processo insere além da influência da tolerância adotada. Entretanto, percebe-se a grande aplicabilidade das técnicas de otimização que podem fornecer parâmetros para projetos ótimos sem grande dependência da experiência do projetista.

4. REFERÊNCIAS

- ANSYS Inc. ANSYS Documentation, Release 7.0. Documentação eletrônica disponível no aplicativo ANSYS.
- ARORA, Jasbir S., 2004, "Introduction to Optimum Design". 2ª ed. New York: Elsevier Academic Press.
- CHONG, Edwin e STANISLAW, Zak., 2001, "An Introduction to Optimization". 2ª ed. New York: John Wiley & Sons, Inc.,.
- DOYLE, James F., 2004, "Modern Experimental Stress Analysis". 1ª ed. New York: John Wiley & Sons, Inc.,.
- GENTIL, Vicente. 2003, "Corrosão". 4ª ed. Rio de Janeiro: LTC,.
- HIBBELER, Russell C., 2000, "Resistência dos Materiais". 1ª ed. Rio de Janeiro: LTC,.

- NORTON, Robert L., 2004, “Projeto de Máquinas: Uma Abordagem Integrada”. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman,.
- PILKEY, Walter D., 1997, “Peterson’s Stress Concentration Factors”. 2ª ed. New York: John Wiley & Sons, Inc.,.
- SADD, Martin H., 2005, “Elasticity - Theory, Applications, and Numerics”. 1ª ed. New York: Elsevier Academic Press.
- SÁNCHEZ, Emil. 2000, “Elementos de Mecânica dos Sólidos”. 1ª ed. Rio de Janeiro: Interciência Ltda.
- TIMOSHENKO, Stephen., 1976, “Resistência dos Materiais”. 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC,. Volume II.
- ZAHAVI, Eliahu., 1996, “Fatigue Design: Life Expectancy of Machine Parts”. 1ª ed. Boca Raton: CRC,.

APPLICATION OF OPTIMIZATION TECHNIQUES IN STRESS CONCENTRATION RELIEF IN A PLATE WITH HOLE UNDER TRACTION

Paulo Rogério Franquetto

Federal University of Technology of Parana
Av. Sete de Setembro, 3165. Curitiba. Paraná
CEP: 80230-901
paulofranquetto@yahoo.com.br

Jucélio Tomás Pereira

e-mail: jucelio@utfpr.edu.br

Abstract: *The objective of this paper is search a reduction of stress concentration factor in a rectangular plate with a circular central hole, which has fixed dimensions, subjective to pure traction. Are use four kind of geometrician’s relief shape: one hole, two holes, ellipse and triangle. For each shape, a parametric model is done and the determination of the values is getting though Finite Elements Method analysis with optimization methods of ANSYS software.*

Keywords: *stress concentration, parametric optimization, Finite Elements Method.*