

# PREVISÃO DO ESCAPE DE COLUNAS PARCIALMENTE ENTERRADAS ATRAVÉS DE MÉTODOS DE PERTURBAÇÃO: O MÉTODO DO EQUILÍBRIO DOS HARMÔNICOS

## Thiago Alves de Queiroz

Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal de Goiás – UFG/CaC  
Av. Lamartine Pinto de Avelar, nº 1120, 75705-220, Catalão – GO – Brasil  
th.al.qz@gmail.com

## Donald Mark Santee

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Goiás – UFG/CaC  
donald@catalao.ufg.br

**Resumo:** *A análise dinâmica de uma coluna parcialmente enterrada quando submetida a um carregamento periódico é um processo bastante complexo, pois envolve um modelo matemático em que a obtenção da solução exata é difícil, a não dizer, impossível. Assim, partindo de um modelo matemático que descreve o comportamento dinâmico deste elemento estrutural em um solo não-linear e, pela dificuldade em obter sua solução exata, aplica-se o método do Equilíbrio dos Harmônicos, que é um método de perturbação, para obter uma solução analítica aproximada para tal modelo, visando analisar o comportamento de tal elemento estrutural. Com isso, determinam-se relações algébricas que envolvem os diversos parâmetros da coluna, do solo e do carregamento externo aplicado, com o intuito de obter condições suficientes para que a solução obtida para tal modelo matemático seja estável. Uma vez que a estabilidade desta solução obtida através dos métodos do Equilíbrio dos Harmônicos implica na estabilidade do elemento estrutural. Além, de este ser um critério de análise de soluções aplicável a uma grande gama de problemas e de importante relevância para a estruturação de projetos seguros e confiáveis.*

**Palavras-chave:** *Colunas parcialmente enterradas, Métodos de perturbação, Método do Equilíbrio dos Harmônicos, Escape da solução.*

## 1. INTRODUÇÃO

A utilização de colunas parcialmente enterradas nos mais diversos problemas reais tem feito deste elemento estrutural um objeto de estudo importante, visto que todos os critérios de dimensionamento devem ser cuidadosamente estabelecidos para que seja mantida a segurança e a economia da estrutura.

Analisa-se um modelo proposto na literatura (Queiroz e Santee, 2007). O elemento estrutural é uma coluna que se encontra enterrada em um solo não-linear e sujeito a ação de forças externas periódicas. A obtenção de uma solução exata é quase que impraticável. Outros modelos de coluna podem ser observados em Santee e Gonçalves (2006), Queiroz e Santee (2006) e Sampaio (2004).

Como existe uma enorme dificuldade em obter uma solução exata para tal modelo de estudo, parte-se para a aplicação de métodos de perturbação (Nayfeh, 1973), a saber, o método do Equilíbrio dos Harmônicos, com o intuito de obter uma solução analítica aproximada.

Obtida tal solução, utiliza-se o critério da teoria de bifurcações, baseado na verificação da estabilidade da solução aproximada, para estabelecer uma relação algébrica que permita prever, dado os parâmetros de controle, a situação em que ocorrerá o escape da solução (tender ao infinito) que leva a instabilidade da coluna.

Assim, a aplicação deste critério é de grande valor para a engenharia, já que serve de base para a elaboração de projetos seguros e confiáveis.

## 2. O MODELO MATEMÁTICO DA COLUNA

O modelo matemático obtido de Queiroz e Santee (2007) que representa o comportamento da coluna parcialmente enterrada é apresentado na Figura 1, sendo os parâmetros presentes na figura: a altura  $H$ ; o comprimento total  $L$ ; a força axial  $P$ ; a rigidez a flexão  $EI$ ; a força transversal  $F$ .

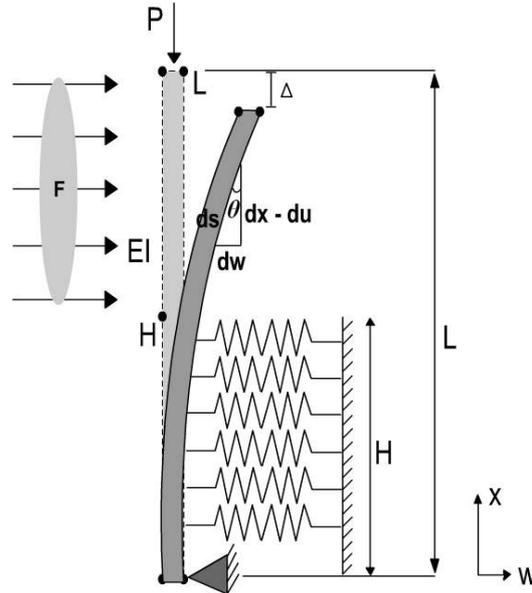


Figura 1: Modelo obtido de Queiroz e Santee (2007).

Para obter a equação de movimento que representa tal modelo, é utilizado o Princípio de Hamilton e as ferramentas do cálculo variacional, juntamente com a teoria de Euler-Bernoulli (Butkov, 1968; Sampaio, 2004). Assim, a equação de movimento que descreve o comportamento dinâmico da coluna é descrita como:

$$\ddot{A} + c\dot{A} + \omega_0^2 A - \beta A|A| = f \cos(\Omega t) \quad (1)$$

onde,

$$c = \frac{\left( 5H^9(\beta_e - \beta_d) + 45H^8L(\beta_d - \beta_e) + 180H^7L^2(\beta_e - \beta_d) \right) + 360H^6L^3(\beta_d - \beta_e) + 324H^5L^4(\beta_e - \beta_d) + 104L^9\beta_d}{104mL^9} \quad (2)$$

$$\omega_0^2 = \frac{\left( 9072EIL^5 + 35H^9E_{ii} - 315H^8LE_{ii} + 1260H^7L^2E_{ii} \right) - 2520H^6L^3E_{ii} + 2268H^5L^4E_{ii} - 3240L^7P}{728mL^9} \quad (3)$$

$$f = \frac{27A_0(-H^5 + 5H^4L - 10H^3L^2 + 6L^5)}{52mL^7} \quad (4)$$

$$\beta = \frac{3H^7 \left( E_{ii} - E_{if} \right) \begin{pmatrix} 35H^6 - 455H^5L + 2730H^4L^2 \\ -9464H^3L^3 + 20020H^2L^4 \\ -24570HL^5 + 14040L^6 \end{pmatrix}}{18928 mL^{11} P_u} \quad (5)$$

E, os coeficientes acima são: o fator de amortecimento ( $c$ ), a rigidez ( $\omega_0^2$ ), a não-linearidade do sistema ( $\beta$ ), a amplitude da força de excitação externa ( $f$ ) e a frequência da força de excitação externa ( $\Omega$ ). Já os parâmetros presente nestes coeficientes são: a massa por unidade de comprimento da coluna ( $m$ ), o módulo de elasticidade ou módulo de Young ( $E$ ), o momento de inércia da seção transversal ( $I$ ), resultando na rigidez a flexão da coluna ( $EI$ ), a carga axial aplicada ( $P$ ); o módulo de elasticidade tangente inicial ( $E_{ii}$ ), o módulo de elasticidade tangente final ( $E_{if}$ ), a resistência última do solo ( $P_u$ ), o parâmetro de amortecimento para a parte enterrada da coluna ( $\beta_e$ ), o parâmetro de amortecimento para a parte desenterrada da coluna ( $\beta_d$ ) e a amplitude do carregamento harmônico ( $A_0$ ).

Logo, dado o modelo acima, obtém-se uma solução analítica aproximada na próxima seção considerando o método do Equilíbrio dos Harmônicos.

### 3. SOLUÇÃO APROXIMADA PELO MÉTODO DO EQUILÍBRIO DOS HARMÔNICOS

No presente artigo de Queiroz e Santee (2007) tem-se uma solução para a equação (1) através do método do Equilíbrio dos Harmônicos. E, um estudo sobre a aplicação deste método pode ser encontrado em Nayfeh (1973) e Nayfeh e Mook (1979), em que se supõe que a solução da equação é descrita em uma série de Fourier. Assim, a solução, já encontrada, é descrita como:

$$A(t) = A_0 + A_1 \cos(\Omega t) + B_1 \sin(\Omega t) + A_2 \cos(2\Omega t) + B_2 \sin(2\Omega t) \quad (6)$$

Sendo que  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  e  $B_2$  possuem seus valores obtidos da resolução do sistema de equações não-lineares a seguir:

$$\frac{2\beta A_0^2 + |2A_0\omega_0^2| + \beta(A_1^2 + B_1^2 + A_2^2 + B_2^2)}{2} = 0 \quad (7)$$

$$|-c\Omega B_1 + f + \Omega^2 A_1| + 2\beta A_0 A_1 + \beta(B_1 B_2 + A_1 A_2) + |A_1 \omega_0^2| = 0 \quad (8)$$

$$|c\Omega A_1 + \Omega^2 B_1| + 2\beta A_0 B_1 + \beta(A_1 B_2 - B_1 A_2) + |B_1 \omega_0^2| = 0 \quad (9)$$

$$|-2c\Omega B_2 + 4\Omega^2 A_2| + 2\beta A_0 A_2 + \beta \left( \frac{A_1^2}{2} - \frac{B_1^2}{2} \right) + |A_2 \omega_0^2| = 0 \quad (10)$$

$$|2c\Omega A_2 + 4\Omega^2 B_2| + 2\beta A_0 B_2 + \beta A_1 B_1 + |B_2 \omega_0^2| = 0 \quad (11)$$

Para a resolução deste sistema de equações não-lineares, pode se empregar, dentre os métodos possíveis, o método de Newton-Raphson (Burden e Faires, 2003), sendo as condições iniciais obtidas do sistema linear que é obtido a partir do sistema não-linear e, tal método é iterado até atingir a convergência da solução.

Assim, com o modelo matemático e a solução para o mesmo, parte-se para o estudo da estabilidade da solução (previsão do escape) empregando certos critérios da teoria de bifurcações, sendo estes discutidos adiante.

#### 4. PREVISÃO DA ESTABILIDADE DA SOLUÇÃO

A estabilidade da solução dada pela Equação (6) é constatada pela linearização do sistema em torno da solução periódica (Santee, 1999). Com isso, seja  $A(t)$  a solução periódica obtida pelo método do Equilíbrio dos Harmônicos para a Equação (1). Supondo uma pequena perturbação  $y(t) \ll 1$  e, substituindo na Equação (1) a nova solução formada por  $A(t) + y(t)$ , obtém-se um novo problema de valor inicial linear, em que os termos de mais alta potência de  $y(t)$  foram desprezados, a saber:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + c\dot{y} + (\omega_0^2 - 2\beta(A_0 + A_1 \cos(\Omega t) + B_1 \sin(\Omega t) + A_2 \cos(2\Omega t) + B_2 \sin(2\Omega t)))y &= 0 \\ y(t_0) &= y_0 \\ \dot{y}(t_0) &= y_1 \end{aligned} \quad (12)$$

Em que  $y_0$  e  $y_1$  são perturbações iniciais, respectivamente, na posição e na velocidade da solução permanente.

O estudo do comportamento da perturbação  $y(t)$  e da estabilidade da solução  $A(t)$  é feito através da teoria de Floquet (Nayfeh e Balachandran, 1995). Assim, tem-se:

$$y(t) = e^{Bt} \varphi(t) \quad (13)$$

Onde  $\varphi(t)$  é uma função periódica e  $B$  é uma constante.

Assim, caso  $B < 0$ , a solução  $A(t)$  é assintoticamente estável, do contrário,  $B > 0$ , a solução é instável e, o valor de  $B = 0$  correlaciona à fronteira entre a estabilidade e a instabilidade da solução, chamada fronteira de escape.

Considerada a Teoria de Floquet, faz-se a expansão da função  $\varphi(t)$  em uma série de Fourier tomando apenas os dois primeiros modos, pois com apenas dois modos já se é capaz de obter uma boa aproximação das primeiras bifurcações (Szemplińska-Stupnicka, 1988). Logo, tem-se:

$$\varphi(t) = G + D \sin(\Omega t) + E \cos(\Omega t) \quad (14)$$

Com o intuito de obter a fronteira de escape ( $B = 0$ ), parte-se conceito de resíduo da equação diferencial para poder aplicar o método de Galerkin-Urabe, ou seja, toma-se:

$$R(y, t) = \ddot{y} + c\dot{y} + (\omega_0^2 - 2\beta(A_0 + A_1 \cos(\Omega t) + B_1 \sin(\Omega t) + A_2 \cos(2\Omega t) + B_2 \sin(2\Omega t)))y \quad (15)$$

Assim, se conhecida à solução exata  $y(t)$ , o resíduo acima seria identicamente nulo, visto que a Equação (1) passaria a ter solução exata. Como é desconhecido o valor de  $y(t)$ , aplica-se o método de Galerkin-Urabe que consiste em supor uma solução periódica aproximada para  $y(t)$  na forma de série de Fourier (Rezende, 2005). Logo, fazendo  $y(t) = \varphi(t)$ , obtém-se os valores das incógnitas  $G$ ,  $D$  e  $E$  de:

$$\int_0^{2\pi/\Omega} R(y, t) dt = 0 \quad (16)$$

$$\int_0^{2\pi/\Omega} R(y,t) \cos(\Omega t) dt = 0 \quad (17)$$

$$\int_0^{2\pi/\Omega} R(y,t) \sin(\Omega t) dt = 0 \quad (18)$$

Resolvendo as integrais acima, monta-se um sistema algébrico linear nas incógnitas  $G$ ,  $D$  e  $E$ , a saber:

$$\begin{bmatrix} \frac{2\pi(2\beta A_0 + \omega_0^2)}{\Omega} & \frac{2\pi\beta B_1}{\Omega} & \frac{2\pi\beta A_1}{\Omega} \\ \frac{2\pi\beta A_1}{\Omega} & \frac{\pi(c\Omega + |\beta B_2|)}{\Omega} & -\frac{\pi(\Omega^2 + |\beta(2A_0 + A_2)| - \omega_0^2)}{\Omega} \\ \frac{2\pi\beta B_1}{\Omega} & -\frac{\pi(\Omega^2 + |\beta(2A_0 - A_2)| - \omega_0^2)}{\Omega} & \frac{\pi(|\beta B_2| - c\Omega)}{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} G \\ D \\ E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Tal sistema linear, Equação (19), admite, geralmente, apenas a solução trivial, porém para admitir outras soluções, além da não-trivial, o determinante deste sistema expresso na equação seguinte, chamado de determinante de Hill, deve ser nulo. Assim:

$$\Delta_{Hill} = \frac{2\pi^3}{\Omega^3} \begin{bmatrix} c^2\Omega^2 (|2\beta A_0^2| - \omega_0^2) + \Omega^4 (|2\beta A_0| - \omega_0^2) \\ + 2\Omega^2 (\beta^2 (4A_0^2 - A_1^2 - B_1^2) + |4\beta A_0 \omega_0^2| + \omega_0^4) \\ + 2\beta^3 \left( 4A_0^3 - A_0(2A_1^2 + 2B_1^2 + A_2^2 + B_2^2) \right. \\ \left. + A_1^2 A_2 + 2A_1 B_1 B_4 - B_1^2 A_2 \right) \\ - \beta^2 \omega_0^2 (12A_0^2 - 2A_1^2 - 2B_1^2 - A_2^2 - B_2^2) \\ \left. + |6\beta A_0 \omega_0^4| - \omega_0^6 \right] = 0 \quad (20)$$

Obtido o determinante de Hill, o critério adotado para analisar a estabilidade da solução utilizada e, assim, encontrar a região de fronteira entre uma solução estável e a instável (prever o escape), baseia-se em dado um conjunto de parâmetros de controle (parâmetros da equação) e a amplitude da solução sendo reconhecida estável, calcular o valor do determinante, Equação (20). Assim, ao variar alguns dos parâmetros de tal equação, a saber, a amplitude da força de excitação externa ( $f$ ) e a frequência da força de excitação externa ( $\Omega$ ), calcula-se o novo determinante. Logo, quando houver a inversão do sinal do determinante de Hill, considera-se que houve perda de estabilidade local da solução considerada periódica. Observe-se que a Equação (20) não depende explicitamente da amplitude da força de excitação externa ( $f$ ).

Na próxima seção, tem-se a realização de alguns testes para um exemplo real de coluna parcialmente enterrada em um solo considerado de argila rígida.

## 5. TESTES SOBRE A FORMULAÇÃO DESENVOLVIDA

Nesta seção realizam-se alguns testes com a formulação desenvolvida anteriormente para uma melhor caracterização e representação da mesma considerando um exemplo real de coluna.

Para tanto, tem-se os valores obtidos de Santee e Gonçalves (2006), Nayfeh e Mook (1979) e Queiroz e Santee (2007), em que se possui uma coluna cilíndrica circular de aço com  $L=20\text{ m}$ , densidade linear de massa  $m=20\text{ kg/m}$ , rigidez à flexão  $EI=5672067\text{ Nm}^2$ , diâmetro  $D=10\text{ cm}$  e espessura  $s=1\text{ cm}$ . Para o solo de argila rígida, tem-se:  $E_{ii}=4037\text{ Pa}$ ;  $E_{ij}=0\text{ Pa}$ ;  $n=1$ ;  $P_u=50\text{ N/m}$ . A carga aplicada é de  $P=0\text{ N}$ , o parâmetro de amortecimento corresponde à  $c \cong 0,05 \sqrt{4\omega_0^2}$ , que é de aproximadamente 5% do amortecimento crítico. E, o valor inicial para  $f$  é  $f=0,001\text{ N}$ , onde  $0,5\omega_0 < \Omega < 1,5\omega_0$ .

Assim, este primeiro exemplo considera a coluna enterrada 40% do seu comprimento total, isto é,  $H=40\%L$ . Logo,

$$\ddot{A} + 0,51\dot{A} + 26,18A - 2,88A|A| = f \cos(\Omega t) \quad (21)$$

Já este outro exemplo considera a coluna enterrada 80% do seu comprimento total, obtendo a seguinte equação:

$$\ddot{A} + 1,02\dot{A} + 104,89A - 178,71A|A| = f \cos(\Omega t) \quad (22)$$

Com isto, aplica-se o critério estabelecido anteriormente sobre estas duas equações, Equação (21) e (22), obtendo, respectivamente, as seguintes figuras, Figura (2) e (3), que mostram as regiões de estabilidade para um ambiente de evolução lenta no plano  $f \times \Omega$ .

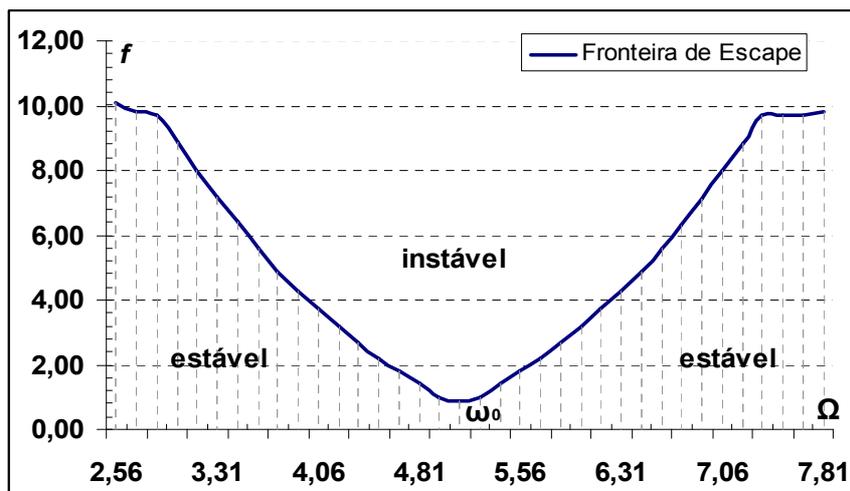


Figura 2: Regiões de Estabilidade para a Equação (21).

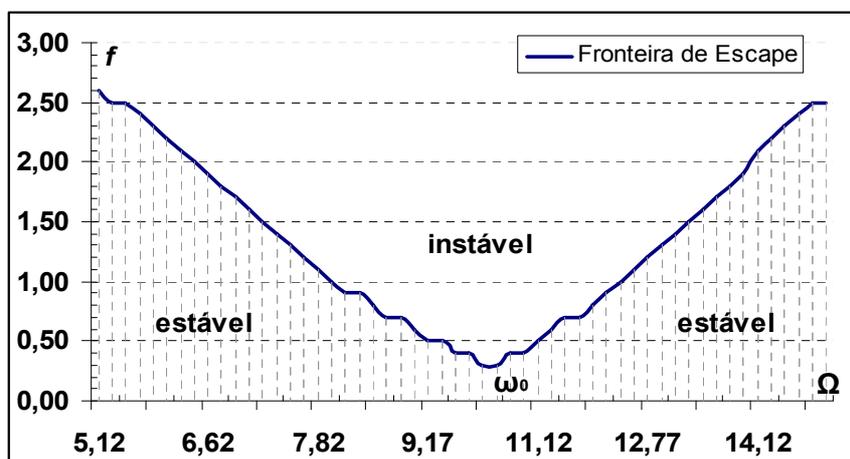


Figura 3: Regiões de Estabilidade para a Equação (22).

Observando as figuras acima, Figura (2) e (3), a solução apresentada pelo método do Equilíbrio dos Harmônicos é estável para pequenos valores de  $f$ , já com o aumento do valor de  $f$ , a solução perde estabilidade em uma pequena faixa de frequência abaixo da frequência natural e em outra faixa de frequência acima da frequência natural. Também, nota-se que quanto maior o valor dos coeficientes presente na equação de movimento tem-se que mais rapidamente a coluna perde estabilidade.

E, à medida que o nível de carregamento aumenta, a amplitude de vibração, também, aumenta e, em geral, a vibração do elemento estrutural torna-se mais complexa, até que ocorre a instabilidade do mesmo, isto é, a solução escapa, tende ao infinito.

## 6. CONCLUSÕES

O modelo matemático de uma coluna parcialmente enterrada em um solo não linear do tipo “com enfraquecimento” forneceu uma equação diferencial ordinária não-linear que descreve como tal elemento estrutural se comporta de acordo com os parâmetros utilizados, isto é, a profundidade da fundação, a amplitude e a frequência da força de excitação externa.

E, a aplicação dos critérios da teoria das bifurcações conduziu a análise da estabilidade da solução gerada pelo método do Equilíbrio dos Harmônicos com o intuito de prever o escape da coluna, mostrando que para valores próximos da frequência natural, tal solução está sujeita a bifurcações do tipo nó-sela variando segundo o valor da força externa que é aplicada.

Diante dos resultados, novos trabalhos têm sido propostos avaliando a estabilidade da solução obtida por outros métodos perturbação, como também, empregando outros critérios, como o critério de Melnikov. Também, pelo fato de aparecer à bifurcação nó-sela, esta é aparentemente confiável, pois a bacia de atração da solução estável pode ser muito pequena de modo que para pequenas perturbações dinâmicas finitas, tais perturbações podem levar a coluna à instabilidade.

## 7. REFERÊNCIAS

- Burden, R. L. e Faires, J. D., 2003, “Numerical Analysis”, Pioneira Thomson Learning, São Paulo, Brasil.
- Butkov, E., 1968, “Mathematical Physics”, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Nayfeh, A. H., 1973, “Perturbation Methods”, John Wiley and Sons, New York, USA.
- Nayfeh, A. H. and Balachandran, B., 1995, “Applied Nonlinear Dynamics - Analytical, Computational, and Experimental Methods”. John Wiley and Sons, New York, USA.
- Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, “Nonlinear Oscillations”, John Wiley and Sons, New York, USA.
- Queiroz, T. A. and Santee, D. M., 2007, “Flambagem de Coluna Parcialmente Enterrada: Uma Análise entre a Solução Numérica e a Analítica”, Proceedings of 4to Congreso Internacional y 2do Congreso Nacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Morelia, Michoacán/México.
- Queiroz, T. A. and Santee D. M., 2006, “Modelagem Matemática e Comparação dos Métodos de Perturbação e Numéricos Aplicados a Vibração de Colunas Semi-Enterradas em um Solo Não-Linear”, Mecânica Computacional, Vol. 25, pp. 1013-1032.
- Rezende, V., 2005, “O Método de Galerkin”, Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Maringá/Paraná, Brasil.
- Sampaio, A. E. G., 2004, “Análise do Comportamento Dinâmico de Colunas Semi-Enterradas”, Dissertação de Mestrado, PUC-Rio/Rio de Janeiro, Brasil.
- Santee, D. M., 1999, “Vibrações Não-Lineares e Instabilidades de Elementos Estruturais Sensíveis a Imperfeições”, Tese de Doutorado, PUC-Rio/Rio de Janeiro, Brasil.
- Santee, D. M. and Gonçalves, P. B., 2006, “Oscillations of a Beam on a Non-Linear Elastic Foundation under Periodic Loads”, Shock and Vibration, Vol. 13, pp. 1-12.

Szemplińska-Stupnicka, W., 1988, “Bifurcations of Harmonic Solution Leading to Chaotic Motion in the Softening Type Duffing’s Oscillator”, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 23, pp. 257-277.

## 8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

### ESCAPE FORESEE OF PARTIALLY BURIED COLUMN BY PERTURBATION METHODS: THE HARMONIC BALANCE METHOD

#### **Thiago Alves de Queiroz**

Department of Computer Science, Federal University of Goiás – UFG/CAC  
Av. Lamartine Pinto de Avelar, nº 1120, 75705-220, Catalão – GO – Brazil  
th.al.qz@gmail.com

#### **Donald Mark Santee**

Department of Mathematics, Federal University of Goiás – UFG/CAC  
donald@catalao.ufg.br

**Abstract:** *The dynamic analysis of partially embedded column when submitted to periodic loads is a complex process, due to the fact that on mathematic model has a hard difficulty in obtain the exact solution. Thereby, we start of a mathematical model that represents the dynamic behavior of this structural element in a non-linear soil, and with the difficulty in obtain its exact solution, we apply the Harmonic Balance method which is a perturbation method to obtain a approximate analytical solution for such model, and then, to analyze the behavior of the structural element. Thus, we seek to define algebraic relations among the several parameters of the column, the soil and the applied external loading, with the purpose of obtain adequate conditions in order that the mathematical model solution will be stable. Once that the stability of the mathematic model solution obtained by Harmonic Balance method imply at structural element’s stability. Beyond, this is a criterion of solutions’ analysis applicable to many problems, and it is of important relevance to make safe and reliable projects.*

**Keywords:** *Partially buried columns, Perturbation methods, Harmonic Balance method, and Solution’s escape.*