



SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO EM UMA CAVIDADE BIDIMENSIONAL COM TAMPA DESLIZANTE

Guilherme Duarte de Menezes

Guilherme_756@hotmail.com

Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Avenida João Naves de Ávila, S/N, 38400-902, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil.

Flávio Érico dos Santos

flavio_erico@yahoo.com.br

Aristeu da Silveira Neto

aristeus@mecanica.ufu.br

Solidônio Rodrigues de Carvalho

srcarvalho@mecanica.ufu.br

Resumo: *No presente trabalho, apresenta-se o programa “LTCM_vs01” para a solução numérica do problema clássico do escoamento bidimensional incompressível em uma cavidade com tampa deslizante. Na solução numérica foi utilizado o método das diferenças finitas centradas com o esquema da malha deslocada. O acoplamento pressão-velocidade foi obtido por meio do método dos passos fracionados. Para a análise do escoamento foi utilizado a metodologia DNS (Direct Numerical Simulation), que consiste na solução direta das equações de Navier-Stokes, e a metodologia LES (Large Eddy Simulation) proposta por Smagorinsky(1963) para a solução de escoamentos turbulentos. O objetivo é analisar o escoamento no interior da cavidade e o desempenho de cada metodologia na solução do problema. Ressalta-se que os resultados obtidos são comparados a dados da literatura.*

Palavras-chave: DNS, cavidade bidimensional, turbulência, LES, Smagorinsky.

1. INTRODUÇÃO

A grande maioria dos escoamentos encontrados na natureza é em sua essência turbulento, entre os fatores que fazem com que o escoamento venha a se tornar turbulento estão: a rugosidade superficial, a atuação de forças de campo, perturbações na corrente livre entre outros. Atualmente, a compreensão deste tipo de escoamento é um desafio, e por este motivo este tema de pesquisa tem sido estudado por diversos pesquisadores da área de dinâmica dos fluidos.

Segundo Silveira Neto (2003) é importante ressaltar que os escoamentos turbulentos possuem algumas características marcantes tais como as flutuações de velocidade nas três dimensões (x,y,z) e fortes gradientes de velocidade, o que acentua o processo de transformação de energia cinética em dissipação viscosa.

Os escoamentos turbulentos são também caracterizados por apresentarem não linearidades. Nesse sentido a repetição de um escoamento turbulento em base experimental é uma tarefa muito difícil, uma vez que qualquer perturbação externa pode alterar sobremaneira o comportamento do escoamento. Outro fato a ser considerado é que os escoamentos turbulentos apresentam uma grande quantidade de escalas, ou seja, apresentam estruturas com baixas e altas frequências e por isso possuem um grande espectro de energia.

Mesmo com tais características que fazem com que os escoamentos turbulentos tenham um elevado grau de complexidade, teorias têm sido desenvolvidas para simular computacionalmente o comportamento deste tipo de escoamento. Dentre estas teorias, pode-se citar: DNS (Simulação Numérica Direta), RANS (Equações Médias de Reynolds), LES (Simulação das Grandes Escalas) e mais recentemente alguns pesquisadores vêm estudando modelos híbridos de simulação.

A Simulação Numérica Direta (DNS) consiste em resolver as equações de Navier-Stokes diretamente, ou seja, sem a imposição de um modelo de turbulência. Dessa forma seria necessário impor uma malha suficientemente fina que captasse todas as estruturas presentes no escoamento, o que nos dias atuais, mesmo com o avanço computacional, é impraticável.

Uma alternativa encontrada foi o conceito da decomposição das escalas através de um processo de médias. Essa metodologia, denominada RANS (Equações Médias de Reynolds), proporcionou um avanço na determinação de um comportamento médio para o escoamento turbulento através da solução das equações médias de Navier-Stokes.

Smagorinsky (1963), por sua vez, propõe a captura e simulação de apenas parte das estruturas turbilhonares a partir de um processo de filtragem das equações de Navier-Stokes. Neste sentido foi desenvolvida a metodologia denominada LES (Simulação das Grandes Escalas), a partir da qual torna-se possível separar as escalas, de forma que as maiores estruturas (grandes escalas) são calculadas a partir das equações de Navier-Stokes, enquanto as menores estruturas (pequenas escalas) são simuladas a partir da metodologia LES.

Com o objetivo de se estudar e compreender a dinâmica dos escoamentos turbulentos apresenta-se neste trabalho a simulação numérica do problema clássico do escoamento em uma cavidade bidimensional com tampa deslizante. O objetivo é analisar o escoamento no interior da cavidade e o desempenho das metodologias DNS e LES na solução do problema. Ressalta-se que os resultados obtidos são comparados aos de Guia et al., (1982).

2. DESENVOLVIMENTO

Na Figura 1 apresenta-se o modelo esquemático do problema a ser estudado,

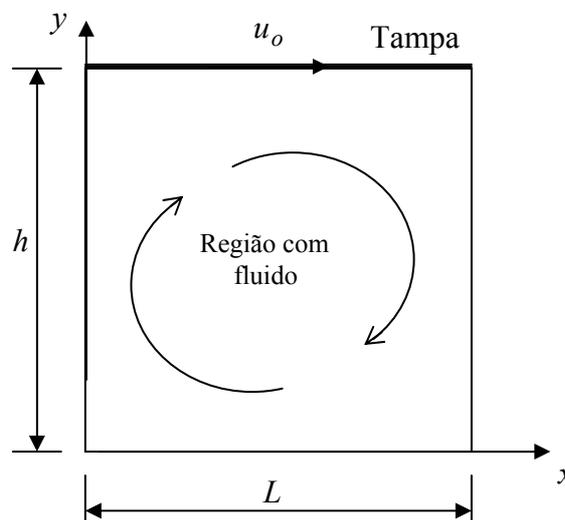


Figura 1: Modelo físico: escoamento bidimensional em uma cavidade com tampa deslizante

onde L é largura da cavidade, h a altura e u_0 a velocidade da tampa.

Como já mencionado anteriormente, o presente trabalho é dedicado ao estudo do escoamento no interior de uma cavidade bidimensional com tampa deslizante. Uma vez estabelecido o modelo físico para o problema a ser estudado é importante estabelecer o modelo matemático.

2.1 Modelo Matemático:

O modelo matemático é baseado nas equações da continuidade e de quantidade de movimento para um fluido incompressível (equações de Navier-Stokes). Neste caso, usando a notação tensorial, a equação da continuidade para fluidos incompressíveis assume a seguinte forma:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

Já a equação da quantidade de movimento para um fluido incompressível é definida por:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2)$$

onde ρ_o é a densidade do fluido, P a pressão no interior da cavidade, ν a viscosidade dinâmica do fluido e \vec{u} o vetor velocidade do fluido nas direções x e y .

A partir do modelo matemático, são por conseguinte definidas as condições iniciais e condições de contorno para o problema. As condições iniciais definem o primeiro instante do escoamento. No caso de uma partícula em movimento, deve-se impor inicialmente um campo de velocidade tal que $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Já para o campo de pressão não existe nenhum valor de referência a ser adotado no primeiro instante de tempo, neste caso, adota-se $P(x, y) = 0$.

As condições de contorno, por sua vez, definem o domínio de cálculo que pode ser composto por paredes sólidas, sólidos imersos, simetria, entrada de fluido, etc. No caso do problema da cavidade com tampa deslizante, considera-se que as paredes laterais e a parede inferior são sólidas. Nesse sentido, a velocidade nestas paredes deve ser nula. Na parede superior, por sua vez, considera-se uma velocidade igual u_o . Já para o cálculo do campo de pressão, considera-se que o gradiente de pressão na parede é nulo. As condições de contorno são apresentadas na Figura 2, onde u é a velocidade na direção x e v na direção y .

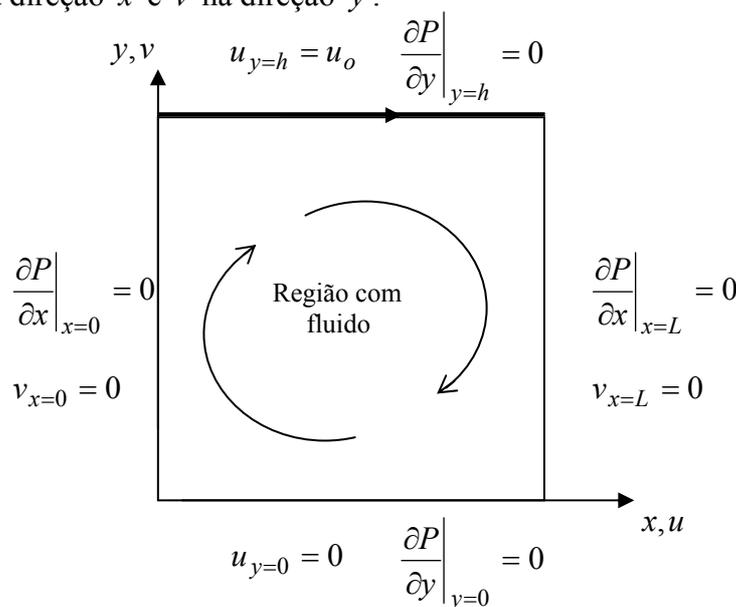


Figura 2: Condições de contorno para o problema da cavidade com tampa deslizante

Com o objetivo de se estudar e compreender a dinâmica dos escoamentos turbulentos propõe-se implementação da metodologia LES (Simulação das Grandes Escalas), proposta por Smagorinsky (1963). Na metodologia LES a decomposição das escalas é feita através de um processo de filtragem das equações de Navier-Stokes e de separação das escalas. Para tanto as variáveis presentes no escoamento são separadas em grandes escalas e pequenas escalas também denominadas sub-malha. Aplicando-se o processo de filtragem nas Equações 1 e 2, obtêm-se as seguintes equações.

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i u_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (4)$$

Na Equação (4), nota-se que o termo não linear se apresenta na forma de um produto filtrado. Assim, para resolver este problema, faz-se a decomposição das escalas em uma parte filtrada e em uma flutuante, o que resulta na seguinte equação

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{u}_i \bar{u}_j - \tau_{ij} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (5)$$

onde τ_{ij} é o tensor de Reynolds sub-malha.

A Equação (5), no entanto, se apresenta na forma de um sistema indeterminado que têm sua origem no termo não linear da equação da quantidade de movimento. **Boussinesq (1877)**, por sua vez, propôs uma maneira de se resolver este problema expressando o tensor de Reynolds sub-malha em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidade filtrado e da energia cinética turbulenta, assim como apresentado na Equação (6),

$$\tau_{ij} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (6)$$

onde ν_t é viscosidade turbulenta e k a energia cinética turbulenta .

A proposta de Boussinesq (1877) consiste em incorporar a energia cinética turbulenta à pressão estática e adotar uma metodologia para calcular a viscosidade turbulenta assim como apresentado na Equação (7).

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{u}_i \bar{u}_j \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{ef} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (7)$$

Onde $\nu_{ef} = \nu + \nu_t$ é a viscosidade efetiva do fluido.

Nesse sentido, Smagorinsky (1963), baseando-se na hipótese do equilíbrio local para as pequenas escalas, propôs uma metodologia para captura e simular parte das estruturas turbilhonares na qual

$$v_t = (C_s \cdot l)^2 \cdot \|\bar{S}\| \quad (8)$$

onde C_s é a constante de Smagorinsky, cujo valor é 0,18. $l = \sqrt{\Delta x \Delta y}$ é o comprimento característico sub-malha e $\|\bar{S}\| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$ é o tensor de deformação do campo filtrado, no qual,

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right).$$

A metodologia de Smagorinsky apresentada anteriormente propõe, basicamente, que a produção de turbulência é função da taxa de cisalhamento do campo filtrado e a dissipação é função da escala de velocidade e do comprimento característicos sub-malha.

Enfim, a partir da solução numérica das equações anteriores, pode-se analisar e compreender o escoamento na cavidade bidimensional considerando o fluido incompressível.

2.2 Modelagem Numérica

A partir da discretização numérica das Equações 3, 7 e 8, tem-se a solução para o problema proposto. No presente trabalho, utilizou-se o esquema da malha deslocada (Figura 3) e o método das diferenças finitas centradas. O acoplamento $P \times \vec{V}$, por sua vez, foi obtido a partir do método dos passos fracionados.

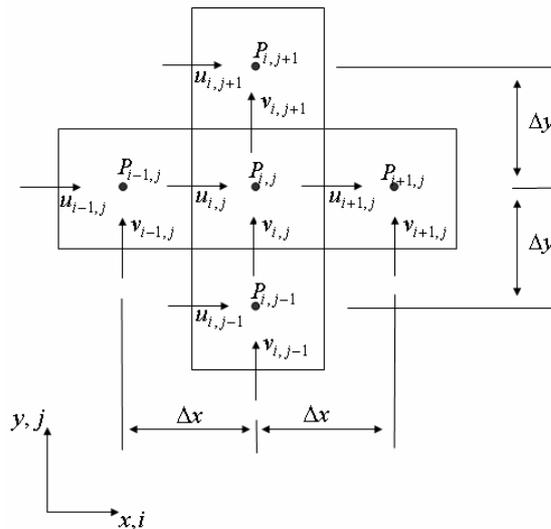


Figura 3: Método da malha deslocada

A solução numérica é obtida a partir dos passos descritos a seguir. O primeiro consiste no cálculo do valor inicial da viscosidade efetiva dada pela equação

$$v_{ef} = \nu + (C_s \cdot l)^2 \cdot \|\bar{S}\| \quad (9)$$

O segundo passo é obter a estimativa do campo de velocidade filtrado a partir de uma formulação explícita, assim como apresentado nas Equações 10 e 11,

$$\bar{u}^{*n+1} = \bar{u}^n + \Delta t \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^{*n}}{\partial x} - \left(\frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} \right)^n + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu_{ef} \left(2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right]^n + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_{ef} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right]^n \right] \quad (10)$$

$$\bar{v}^{*n+1} = \bar{v}^n + \Delta t \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^{*n}}{\partial y} - \left(\frac{\partial(\bar{v}\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}\bar{v})}{\partial y} \right)^n + \frac{\partial}{\partial x} \left[\nu_{ef} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right]^n + \frac{\partial}{\partial y} \left[\nu_{ef} \left(2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right]^n \right] \quad (11)$$

onde o índice $n+1$ representa o valor da variável no passo tempo atual e n o valor no passo de tempo anterior. \bar{u}^* , \bar{v}^* e \bar{P}^* são as estimativas do campo de velocidade e de pressão filtrados.

O terceiro passo, por sua vez, consiste em resolver a equação de Poisson obtida a partir do método dos passos fracionados (Equação 12).

$$\frac{\partial^2 \bar{P}^{*n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{P}^{*n+1}}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left(\frac{\partial \bar{u}^{*n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^{*n+1}}{\partial y} \right) \quad (12)$$

Note que a Equação 12 se apresenta na forma implícita, neste caso, deve-se resolver um sistema linear para se obter a estimativa do campo de pressão filtrado (\bar{P}^*). Neste trabalho, optou-se pelo método iterativo S.O.R (Successive Over Relaxation).

O quarto passo consiste em determinar os valores reais de \bar{u} , \bar{v} e \bar{P} a partir dos valores estimados de \bar{u}^* , \bar{v}^* e \bar{P}^* . Neste caso, são usadas as Equações 13, 14 e 15.

$$\bar{u} = \bar{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{P}^*}{\partial x} \right) \quad (13) \quad , \quad \bar{v} = \bar{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{P}^*}{\partial Y} \right) \quad (14)$$

$$\bar{P}^{n+1} = \bar{P}^{*n+1} + \bar{P}^n \quad (15)$$

No quinto e último passo, deve-se verificar se as velocidades filtradas \bar{u} e \bar{v} respeitam o critério da conservação da massa assim como apresentado na Equação 16,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} < \varepsilon \quad (16)$$

onde ε representa um erro pré-definido.

Na seqüência, apresenta-se o algoritmo computacional desenvolvido.

3. ALGORITMO COMPUTACIONAL E INTERFACE GRÁFICA

Todas as equações apresentadas no item 2 foram inseridas no programa denominado “LTCM_vs01”, desenvolvido por meio do C++Builder™ 5 para o sistema operacional Microsoft Windows™. Na Figura 4, apresenta-se a janela de entrada de dados, na qual o usuário deve fornecer as dimensões da cavidade (h e L), a velocidade da tampa deslizante (u_0), a quantidade de nós nas direções x e y (N_x e N_y), o passo de tempo (dt), o número de Reynolds (Re), o tempo final de simulação (t) e a densidade do fluido (ρ).

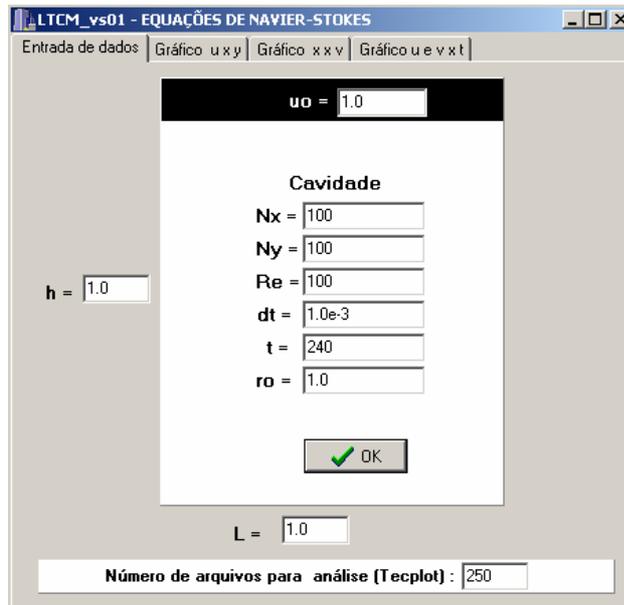


Figura 4: Janela de entrada de dados do programa LTCM_vs01.

A partir das informações anteriores, inicia-se o procedimento de cálculo do escoamento na cavidade com tampa deslizante clicando-se no botão “OK”. Durante o processo de simulação a interface gráfica do programa fornece uma estimativa do tempo para o fim do cálculo e apresenta o gráfico da velocidade *versus* tempo na posição $x = 0,7$ e $y = 0,3$, procedimento este que permite ao usuário verificar se o regime permanente será atingido.

Por fim, o usuário tem acesso instantâneo aos gráficos dos campos de velocidade: $u \times y$ e $x \times v$. Na seqüência são apresentados os resultados obtidos.

4. RESULTADOS

No teste realizado, adotou-se uma malha uniforme com 10.000 nós e número de Reynolds igual a 100. Para garantir o regime permanente, adotou-se um tempo de escoamento de 100 segundos físicos. Simulou-se inicialmente o escoamento usando DNS, ou seja, apenas as equações de Navier-Stokes. Em seguida, a partir da mesma malha e número de Reynolds, simulou-se o escoamento usando as equações filtradas com a metodologia LES sub-malha proposta por Smagorinsky. O objetivo foi comparar e analisar os resultados obtidos por cada metodologia. Para facilitar a notação, os campos filtrados (\bar{u} e \bar{v}) serão indicados apenas pelo símbolo do campo (u e v), ou seja, sem o símbolo de filtro que os caracterizam. Os resultados obtidos foram comparados aos resultados numéricos de Guia *et al.* (1982). Estas comparações foram realizadas a partir do perfil da componente de velocidade u , na linha vertical do centro da cavidade ($x = 0,5$) e o perfil da componente de velocidade v , na linha horizontal do centro da cavidade ($y = 0,5$). A Figura 4 apresenta os resultados para $Re = 100$.

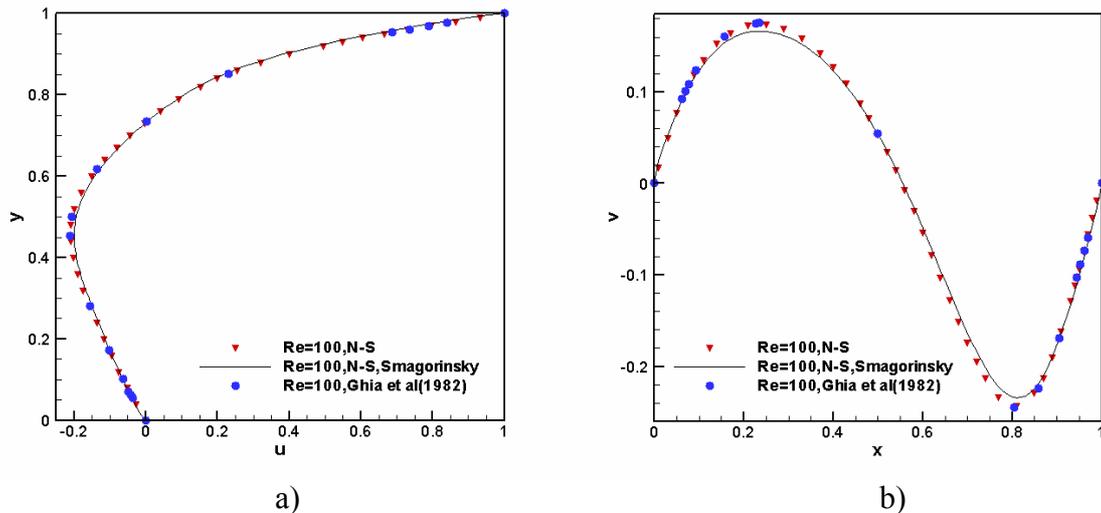


Figura 4: Comparação dos perfis das componentes de velocidade para $Re = 100$, com malha 100×100 . a) u em $x = 0,5$; b) v em $y = 0,5$.

Verifica-se na Figura 4 uma boa concordância entre os resultados obtidos e os apresentados para Guia et al., (1982). A Figura 5 apresenta o campo de velocidade u e v , e o campo de pressão P sobreposto por um conjunto de linhas de corrente que indicam o centro das estruturas formadas. Nota-se uma circulação central e duas pequenas circulações nos cantos inferiores. Topologia também prevista por Guia et al., (1982).

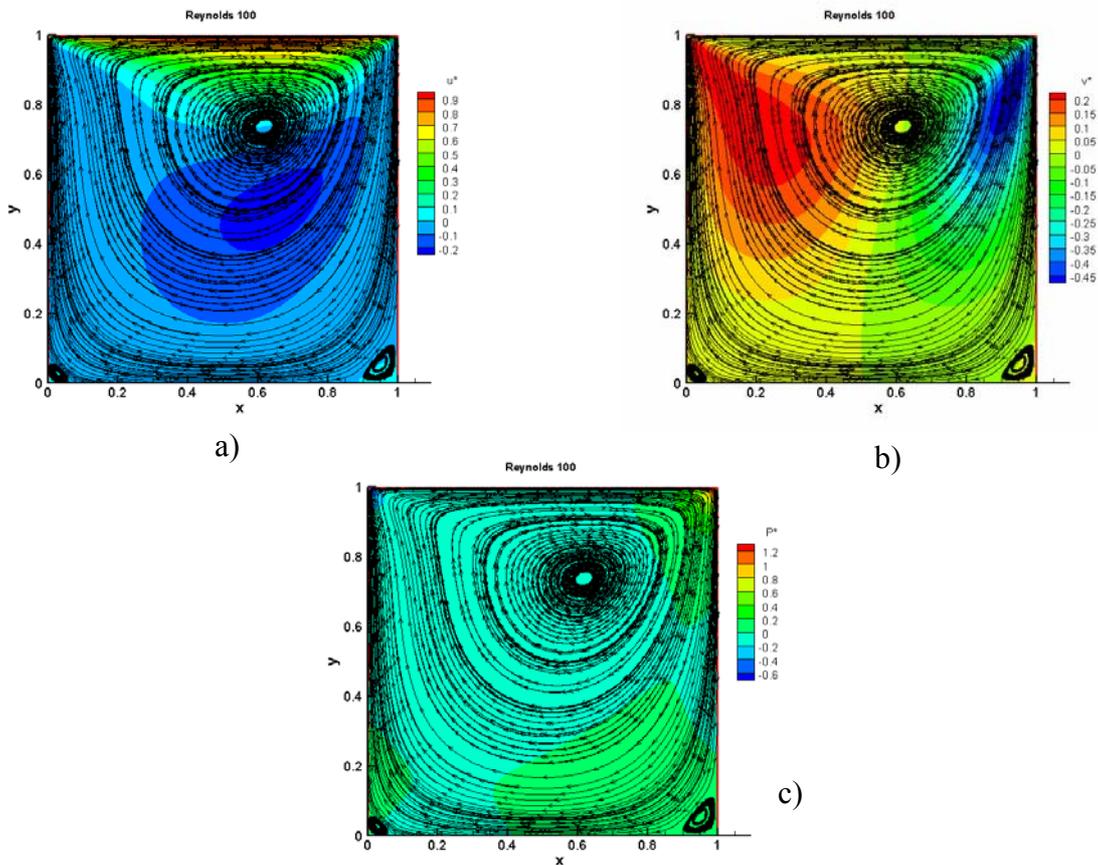


Figura 5: Linhas de corrente superpostas para $Re = 100$, com malha 100×100 . a) Campo de velocidade u ; b) Campo de velocidade v ; c) Campo de pressão P .

A Figura 6 mostra a evolução temporal das componentes de velocidade na posição x igual a 0,7 e y igual a 0,3 (canto direito inferior da cavidade).

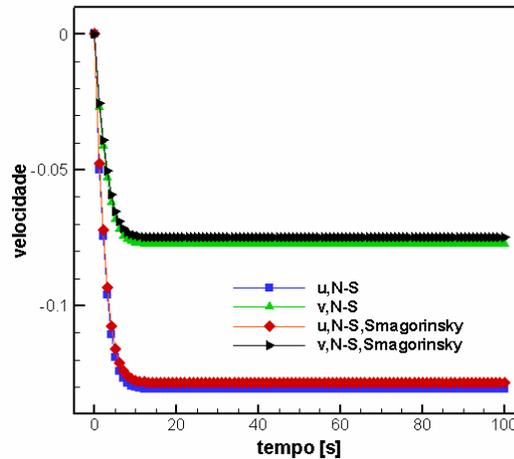


Figura 6: Evolução temporal das componentes de velocidade na posição x igual a 0,7 e y igual a 0,3 (canto direito inferior da cavidade).

Este ponto foi escolhido por situar-se na região onde ocorrem as maiores oscilações. Nota-se na Figura 6 que o regime permanente em ambos os casos, no entanto, foi atingido após 10 segundos físicos de escoamento. Ressalta-se que a evolução temporal das componentes de velocidade foi obtida a partir de um passo de tempo de 10^{-3} segundos para o caso de DNS e 10^{-2} segundos para metodologia LES. Na realização dos testes foi usado um microcomputador Pentium 4 com 2.4Ghz e 1 Gb de memória RAM. No total foram necessárias 7 horas e 21 minutos de cálculos para simular o escoamento a partir da solução das equações de Navier-Stokes (DNS) e 7 horas e 9 minutos de cálculos para simular as equações filtradas com o modelo sub-malha (Smagorinsky).

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentou-se o programa “LTCM_vs01” para a solução numérica do problema clássico do escoamento bidimensional incompressível em uma cavidade com tampa deslizante. Para a análise do escoamento foi utilizada a metodologia DNS (Direct Numerical Simulation), que consiste na solução direta das equações de Navier-Stokes, e a metodologia LES (Large Eddy Simulation) proposta por Smagorinsky(1963) para a solução de escoamentos turbulentos. Ambas as técnicas foram implementadas usando-se uma discretização numérica de primeira ordem. Apesar disso, verificou-se nos resultados obtidos que ambas apresentaram ótimos resultados quando comparados à dados da literatura. Verificou-se apenas que na prática de DNS foi necessário um passo de tempo inferior àquele usado na metodologia LES. Fato este que acarreta em um maior custo computacional. Em trabalhos futuros, propõe-se a aplicação do programa “LTCM_vs01” para análise do escoamento no interior da cavidade para altos números de Reynolds e ainda a implementação de novas metodologias para simular a turbulência, como por exemplo o modelo a uma equação proposto por Spalart-Allmaras (1994).

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos órgãos de fomento CNPq, Fapemig e Capes pelo suporte financeiro.

7. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no trabalho.

8. REFERÊNCIAS

Boussinesq, J., 1877, “Theorie de lécoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section”, 2 vols., Fautiers-Villars, Paris.

Ghia, U., Guia, K. N. and Shin, C. T., 1982 “High-Re Solutins for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method”, Journal of Computacional Physics 48, pp 384-411.

Silveira Neto, A. 2003, “Introdução à Turbulência dos Fluidos.”, Apostila do Curso de Pós Graduação em Engenharia Mecânica. LTCM/FEMEC/UFU

Smagorinsky, J., 1963, “General circulation experiments with primitive equations.” Monthly Weather Review 91, pp 99-164.

Spalart, P., Allmaras S., 1994, “A one-equation turbulence model for aerodynamics flows”, La Recherche Aérospatiale 1 , pp 5-21.

NUMERICAL SOLUTION OF THE DRIVEN FLOW IN A SQUARE CAVITY PROBLEM

Guilherme Duarte De Menezes

Guilherme_756@hotmail.com

School of Mechanical Engineering, Federal University of Uberlândia, Avenida João Naves de Ávila, S/N, 38400-902, Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

Flávio Érico dos Santos

flavio_erico@yahoo.com.br

Aristeu da Silveira Neto

aristeus@mecanica.ufu.br

Solidônio Rodrigues de Carvalho

srcarvalho@mecanica.ufu.br

Abstract: *This work presents the software “LTCM_vs01” for the numerical solution of the classic lid-driven cavity flow problem. The numerical solution was obtained by the finite difference method with Staggered Grid. The pressure-velocity coupling was obtained through the fractional step method. For the analysis of the flow it was used the DNS methodology (Direct Numerical Simulation), that consists of the direct solution of the Navier-Stokes’ equations, and the LES methodology (Large Eddy Simulation), proposed by Smagorinsky(1963), for the solution of turbulent flows. The objective is to evaluate the flow inside the cavity and the performance of each methodology in the solution of the problem. It is pointed out that the obtained results are compared to literature data.*

Keywords: *DNS, square cavity, turbulence, LES, Smagorinsky.*