

SIMULAÇÃO DE MATERIAIS HIPERELÁSTICOS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Waldemar de Carvalho

Eduardo Alberto Fancello

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Trindade - Florianópolis - Santa Catarina - Brasil - CEP 88040-900

Fone: +55 (48) 3721-9000 - FAX: +55 (48) 3234-4069 - CNPJ: 83.899.526/0001-82

wc_carvalho@yahoo.com.br

fancello@grante.ufsc.br

Resumo: *A utilização de ferramentas de simulação via Mecânica dos Sólidos e Método dos Elementos Finitos (MEF) na descrição do comportamento mecânico de Tecidos Biológicos Moles requer modelos constitutivos capazes de considerar deformações finitas e grandes deslocamentos, fontes de não-linearidades. Modelos utilizados nesses casos são hiperelásticos, viscoelásticos, entre outros. Este trabalho tem por finalidade o estudo dos modelos de comportamento mecânico de materiais hiperelásticos e o desenvolvimento de um código computacional (de características didáticas) para simulação destes quando submetidos a deformações finitas. Para tanto, estudou-se a Teoria de Hiperelasticidade, em particular o modelo constitutivo Neo-Hookean compressível. O problema de equilíbrio é descrito pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais, através de sua formulação variacional na configuração deformada. A discretização via Elementos Finitos do PTV permite obter-se um sistema algébrico não linear de equações, cuja solução são os deslocamentos nodais do problema (que servem de base para o cálculo das tensões). O programa desenvolvido atende a problemas planos de tensão e os resultados obtidos são o estado de tensões nos elementos e o comportamento da estrutura em função dos carregamentos aplicados.*

Palavras-chave: *Hiperelasticidade, Elementos Finitos, Simulação, Biomecânica.*

1. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos é uma poderosa ferramenta utilizada na resolução aproximada de equações diferenciais, com aplicações, particularmente, na Mecânica do Contínuo. Nesta, é usual a presença de não linearidades devidas tanto ao material quanto à geometria.

A utilização de ferramentas de simulação via Mecânica dos Sólidos e MEF na descrição do comportamento mecânico de tecidos biológicos moles (pele, ligamentos, tendões, etc. no campo da Biomecânica) requer modelos constitutivos capazes de considerar deformações finitas e grandes deslocamentos, fontes de não linearidades. Na sua grande maioria, são utilizados modelos constitutivos hiperelásticos e viscoelásticos, dentre outros, para a simulação do comportamento desses materiais.

As equações constitutivas que modelam um material hiperelástico apresentam-se em grande número na literatura. São exemplos: modelos Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Ogden, Varga, Yeoh, Arruda e Boyce. Estes, em geral, permitem diferentes formas de se impor compressibilidade, quando necessário.

Modelos hiperelásticos são aqueles em que a tensão resultante da deformação pode ser derivada de uma função de energia potencial de deformação, cuja expressão depende do tipo de material a ser simulado. Os materiais viscoelásticos, diferentemente dos hiperelásticos, dependem não somente do valor final da deformação, como também da taxa de deformação (velocidade em que a deformação ocorre).

O presente trabalho visa tratar do estudo das formulações da Mecânica do Contínuo e das técnicas numéricas (Elementos Finitos) adequadas para lidar com grandes deslocamentos e deformações, assim como modelos de material adequados para a simulação de tecidos biológicos moles como ligamentos. Além desse, pretende-se implementar uma rotina computacional para a visualização dos procedimentos estudados na teoria. Ressalta-se que características didáticas são priorizadas em relação à performance, esperando-se facilitar a compreensão de aspectos teóricos e técnicos de codificação.

Estudou-se a teoria de Hiperelasticidade, especialmente o modelo constitutivo *Neo-Hookean Compressível*. O problema de equilíbrio é descrito mediante o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) aplicado à configuração deformada, incorporando a relação constitutiva mencionada. A aproximação por Elementos Finitos ao PTV permite a obtenção de um sistema algébrico não linear de equações, cuja solução representa os deslocamentos nodais do problema.

Para validar os resultados, foi utilizado um exemplo simples representando uma placa submetida a esforços trativos. Na fase de pós-processamento, o programa fornece informações da configuração deformada e do estado de tensões do componente.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

2.1 Formulação de Equilíbrio e Princípio dos Trabalhos Virtuais

Considere um corpo B ocupando uma região Ω_0 no espaço e que, após a deformação, passa a ocupar a região Ω_t , Figura 1. A fronteira $\partial\Omega_t$ é dividida de tal maneira que $\partial\Omega_t = \Gamma_{tf} \cup \Gamma_{tu}$ e $\Gamma_{tf} \cap \Gamma_{tu} = \emptyset$, onde Γ_{tf} é a região da superfície submetida às condições de contorno naturais (esforços de superfície) e Γ_{tu} a região submetida às condições de contorno essenciais (deslocamentos prescritos).

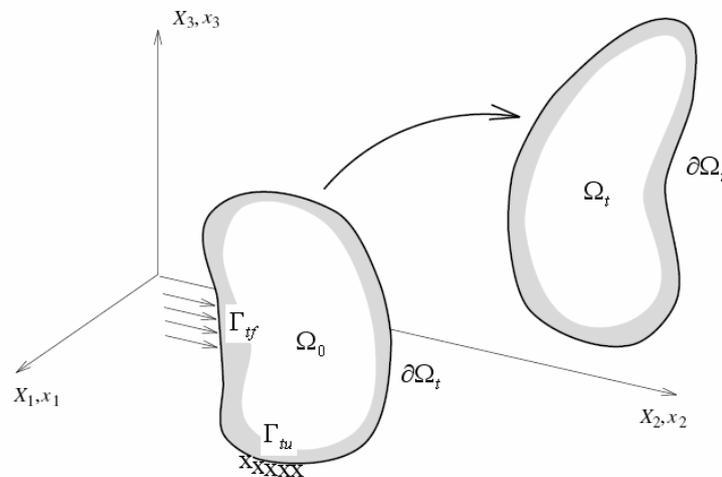


Figura 1: Corpo B.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais postula que as tensões, $\sigma(u)$, produzidas por um campo de deslocamentos $u \in Kin$, estão em equilíbrio com os esforços externos f (forças de corpo) e T (forças de superfície) se, e somente se, os trabalhos interno e externo são iguais para qualquer variação de deslocamento virtual $v \in Var$, isto é, satisfaz

$$\int_{\Omega_t} \sigma(u) \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Omega_t} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} T v dS \quad \forall v \in Var \quad (1)$$

onde $Kin = \{u: \text{suf. regular; } u = \bar{u} \text{ em } \Gamma_u\}$ é o conjunto de deslocamentos cinematicamente possíveis e $Var = \{v: \text{suf. regular; } v = 0 \text{ em } \Gamma_u\}$ é o conjunto de deslocamentos virtuais ou variações. A condição de regularidade suficiente diz respeito às propriedades das funções u e v permitirem as operações de derivação e integração.

Nesta equação é preciso definir a relação constitutiva, dependente do material, que vincula tensões e deformações. Em outras palavras, relação $\sigma(u)$ necessária para se alcançar o equilíbrio.

2.2 Hiperelasticidade

Equações que caracterizam a cinemática e as tensões são aplicáveis a todos os corpos contínuos, não distinguindo um material de outro. Deve-se, então, estabelecerem-se meios que auxiliem a determinação da resposta do material: suas Leis Constitutivas [Holzapfel, 2000].

Um material hiperelástico (também chamado de Material Green-Elástico) postula a existência de uma Função de Energia Livre de Helmholtz, Ψ , que é definida em termos de unidade de volume. As tensões resultantes da deformação podem ser derivadas da função, cuja expressão depende do material a ser simulado.

As equações constitutivas que modelam um material hiperelástico apresentam-se em grande número na literatura. São exemplos: modelos Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Ogden, Varga, Yeoh, Arruda e Boyce. Estes, em geral, permitem diferentes formas de se impor compressibilidade, quando necessário.

Conforme Bonet, 1997; a relação constitutiva do modelo Neo-Hookean Compressível é:

$$\sigma(u) = \frac{\mu}{J}(b - I) + \frac{\lambda}{J}(\ln J)I \quad (2)$$

onde σ é o Tensor de Tensões de Cauchy, μ e λ são constantes do material, b é o Tensor Esquerdo de Cauchy-Green, J é o determinante do Tensor Gradiente de Deformação F e I é a matriz Identidade.

O Tensor Esquerdo de Cauchy-Green é expresso como:

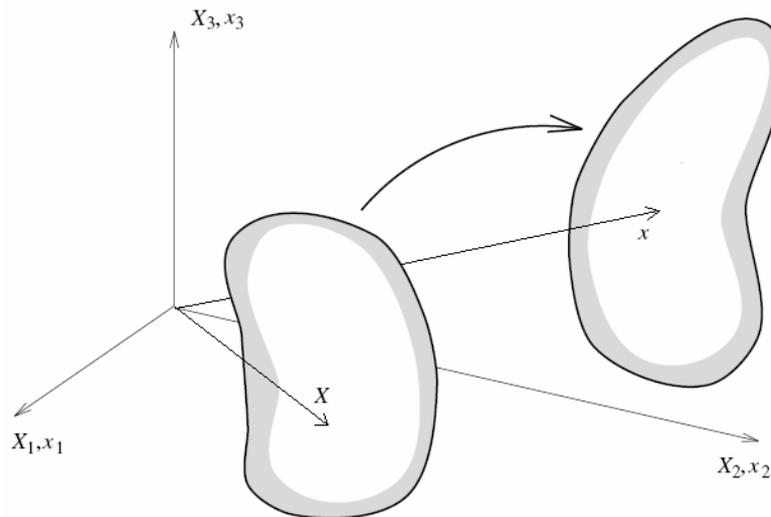
$$b(u) = FF^T \quad (3)$$

onde F é o Tensor Gradiente de Deformação.

O tensor F relaciona a configuração deformada com a de referência através de

$$F(u) = \frac{\partial \bar{x}(u)}{\partial X} \quad (4)$$

onde x é a coordenada deformada de um ponto qualquer do corpo (que depende do campo de deslocamentos u), X é a coordenada indeformada de um ponto qualquer do corpo, Figura 2.

Figura2: Coordenada indeformada (X) e deformada (x)

2.3 Discretização pelo Método dos Elementos Finitos

Pela aproximação por elementos finitos propõe-se redefinir o campo de deslocamentos através do uso de funções de forma

$$u(\bar{X}) \cong \sum_{i=1}^{nos} u_i \varphi_i(\bar{X}) \quad (5)$$

$$v(\bar{X}) \cong \sum_{j=1}^{nos} v_j \varphi_j(\bar{X}) \quad (6)$$

onde u_i e v_j são coeficientes a determinar e as funções $\varphi_i(X)$ são automaticamente construídas de tal forma que seu valor é igual a 1 no nó i e zero no nó $j \neq i$.

Matricialmente, o campo de deslocamentos é escrito como

$$\bar{x} = N\bar{X}; u = NU \quad (7)$$

$$v = NV \quad (8)$$

onde N é a matriz das funções de forma dos elementos, U é a matriz de deslocamentos nodais e V é a matriz de deslocamentos virtuais.

É possível mostrar que dado um campo de deslocamento aproximado por Elementos Finitos, o gradiente de deformação F pode ser calculado segundo a expressão (Bonet, 1997):

$$F = \bar{x}(\nabla_{\xi}N)^T \left[(\nabla_{\xi}N)\bar{X}^T \right]^{-T} \quad (9)$$

onde x é a matriz de coordenadas nodais da malha deformada, $\nabla_{\xi}N$ é a matriz com as derivadas paramétricas das funções de forma, X é a matriz de coordenadas da malha indeformada.

Assim dado, o Gradiente de Deformação permite o cálculo de σ segundo a expressão constitutiva anteriormente mencionada e é utilizado para a determinação das forças internas de cada elemento.

As forças internas surgem de modo a equilibrar o deslocamento causado pela aplicação das forças externas. Seu vetor global é calculado a partir da integração do vetor de forças internas elementares ($F_{int,el}$), [Bonet, 1997].

$$F_{int,el} = \int_{\Omega_{el}} B_{el}^T \sigma d\Omega \equiv \sum_{i=1}^{NPInt} B_{el}^T(i) \underline{\sigma}(i) W_i \quad (10)$$

onde B_{el} é a matriz cujos componentes são as derivadas espaciais das funções de forma, $\underline{\sigma}$ é o vetor de tensões a que está submetido o elemento i e W_i é o peso do ponto de integração i .

A integração numérica é feita utilizando-se o método numérico da Quadratura de Gauss-Legendre (utilizaram-se três pontos de integração) [Hughes, 1987].

As forças externas são tomadas como condição de entrada do problema a ser resolvido e foram consideradas, por simplicidade, constantes e independentes da posição do corpo (independentes do deslocamento)

$$\frac{\partial F_{ext}}{\partial U} = 0 \quad (11)$$

A partir do cálculo da força interna, pode-se determinar o resíduo de equilíbrio, dado por:

$$R(\bar{x}) = F_{int}(\bar{x}) - F_{ext}(\bar{x}) \quad (12)$$

onde $R(\bar{x})$ são os resíduos, $F_{int}(\bar{x})$ são as forças internas, $F_{ext}(\bar{x})$ são os carregamentos externos.

O vetor de resíduos define um sistema algébrico de equações não linearmente dependentes da variável \bar{x} . Este sistema pode ser resolvido pela aplicação do Método de Newton-Raphson

3. MÉTODO NUMÉRICO DE NEWTON-RAPHSON

A técnica de Newton-Raphson é formulada a partir da linearização da equação de resíduo, fornecendo o sistema iterativo do tipo [Bonet, 1997]

$$K_k \bar{u}_k = -R(\bar{x}_k) \quad (13)$$

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{X} + \bar{u}_k \quad (14)$$

Graficamente, este método é visualizado através da figura 3

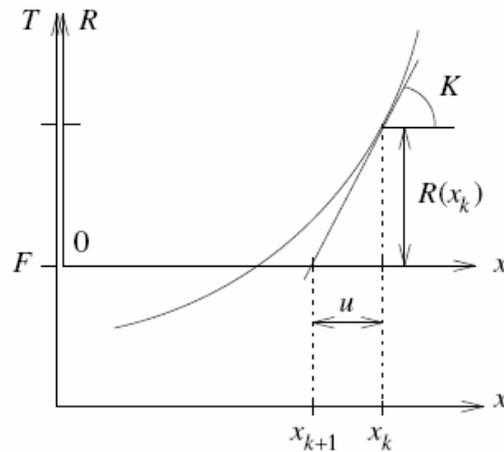


Figura 3: Iterações de Newton-Raphson

A matriz de rigidez (a matriz tangente), K , é definida como a derivada do Resíduo em relação a variável \bar{x} , da seguinte forma:

$$K = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial [F_{\text{int}}(x) - F_{\text{ext}}(x)]}{\partial x} \quad (15)$$

Matricialmente

$$K = \begin{bmatrix} \partial R_1 / \partial x_1 & \partial R_1 / \partial x_2 & \dots & \partial R_1 / \partial x_n \\ \partial R_2 / \partial x_1 & \partial R_2 / \partial x_2 & \dots & \partial R_2 / \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial R_n / \partial x_1 & \partial R_n / \partial x_2 & \dots & \partial R_n / \partial x_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

Uma forma simples de calcular esta matriz é utilizando a técnica de diferenças finitas. Assim, impondo uma perturbação ao resíduo, Δx , é possível calcular os valores de cada coluna da matriz de rigidez como segue:

$$K \equiv \frac{F_{\text{int}}(x + \Delta x) - F_{\text{int}}(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (17)$$

O critério de convergência é baseado na norma do Resíduo, menor o igual que uma a tolerância especificada:

$$R(\bar{x}) \leq \text{tol} \quad (19)$$

Com o objetivo de facilitar o processo de convergência, o carregamento pode ser aplicado em passos de carga, gerando assim uma seqüência de problemas não lineares a cada passo. Nestes, a força externa é dada por

$$F_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^l \Delta F_i \quad (19)$$

A solução do Método de Newton- para cada passo de carga é o incremento, u_k , que equilibra a carga aplicada.

4. ESTRUTURA PRINCIPAL DO PROGRAMA

O procedimento computacional foi implementado utilizando-se o programa OCTAVE.

O programa desenvolvido tem a seguinte estrutura a seguir:

1. Entrada de Dados: geometria, propriedades do material e parâmetros de solução
2. Inicialização das Variáveis do Problema: F_{ext} , ΔF_e , R , U
3. Laço de repetição sobre os incrementos de carga
 - 3.1 Cálculo do carregamento externo: $F_{ext} = F_{ext} + \Delta F_e$
 - 3.2 Cálculo do resíduo: $R = R - \Delta F_e$
 - 3.2.1 Laço de repetição até a convergência ou limite de iterações
 - 3.2.1.1 Cálculo de K
 - 3.2.1.2 Cálculo de u : $\Delta u = -(K^{-1}R)$
 - 3.2.1.3 Atualização do vetor deslocamento: $u = u + \Delta u$
 - 3.2.1.4 Cálculo do Resíduo: $R = F_i - F_{ext}$
 - 3.2.1.5 Se a convergência for alcançada, incrementa a carga
 - 3.2.1.5.1 Se não, iniciar bisseção: $F_{ext} = \frac{F_{ext}}{2}$
4. Apresentação da configuração deformada
5. Apresentação do estado de tensões dos elementos

5. EXEMPLO E RESULTADOS

Um exemplo simples foi utilizado para se apresentarem os resultados que podem ser obtidos pelo programa. O carregamento a que a estrutura está submetida é de 60N e as constantes da relação constitutiva 2 são: $\mu = 3$ e $\lambda = 2$. O elemento finitos utilizado é o triangular de 6 nós.

Este exemplo pretende demonstrar a capacidade de resolução do programa (que pode ser estendido para diversos casos planos).

A Figura 4 representa a placa engastada na sua extremidade esquerda sendo tracionada na direita. Utilizou-se simetria na linha superior, ou seja, os deslocamentos verticais da mesma são nulos.

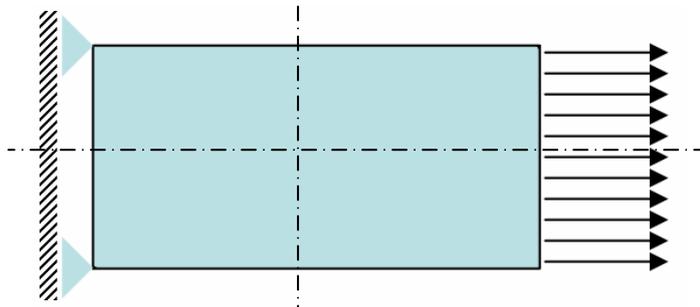


Figura 4: Modelo utilizado para a simulação. Placa engastada na extremidade esquerda sendo submetida à tração distribuída sobre a extremidade direita.

A Figura 5 apresenta as configurações indeformada e deformada da estrutura, enquanto a Figura 6 mostra a representação das tensões de von Mises.

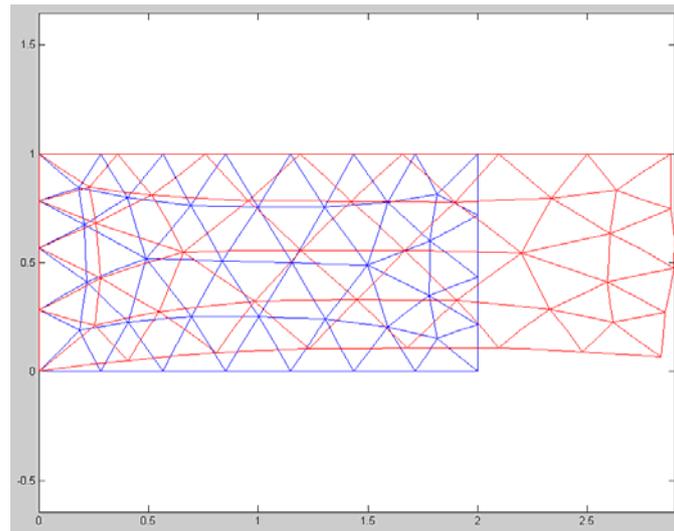


Figura 5: Comportamento da estrutura ao carregamento aplicado. Configuração Indeformada em azul e Deformada em vermelho.

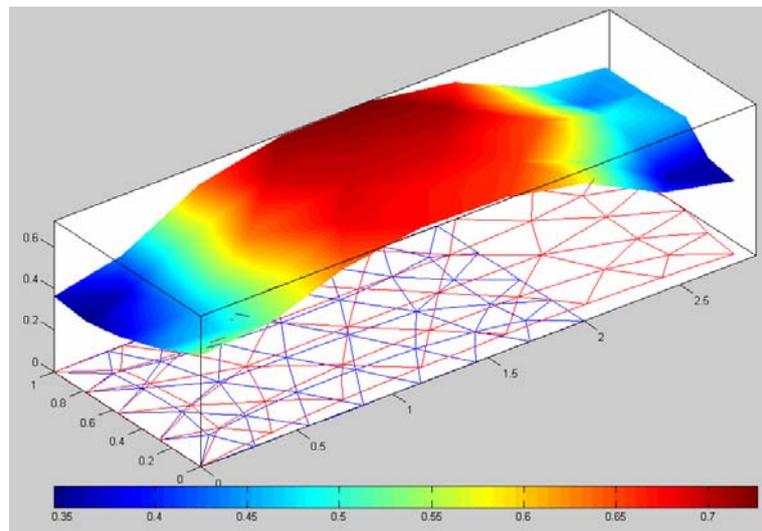


Figura 6: Tensões Equivalentes de Von Mises nos elementos finitos. Apresentação na configuração deformada.

A condição de simetria do problema pode ser prontamente verificada na Figura 5, pois não houve deslocamentos verticais na linha superior, nem horizontais na linha esquerda. Devido à deformação a que a estrutura está submetida e a maneira como está vinculada e carregada, o aspecto qualitativo da configuração deformada apresenta uma redução da seção transversal no meio da estrutura. Esse fato acarreta um aumento na intensidade de tensões, que pode ser visualizado na Figura 6.

A borracha pode ser considerada um material hiperelástico. Imaginando-se o comportamento da mesma quando tracionada, sua configuração deformada é como a apresentada na Figura 5.

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho se apresenta a implementação de um código de características didáticas para a simulação de problemas de hiperelasticidade em deformações finitas, como passo necessário para o uso e desenvolvimento de modelos próprios para a representação do comportamento mecânico de certos tecidos biológicos como ligamentos e tendões. Nestes será necessária a incorporação de outros efeitos como dependências na velocidade de deformação e anisotropias. Os resultados obtidos foram satisfatórios, reproduzindo adequadamente soluções analíticas e soluções numéricas obtidas com programas comerciais.

7. AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece ao professor Eduardo Alberto Fancello pelo apoio dado ao desenvolvimento deste trabalho, à Fundação de Ensino de Engenharia de Santa Catarina (FEESC) pela oportunidade dada ao aperfeiçoamento profissional e, especialmente, à minha família, pelo apoio e incentivo aos meus estudos.

8. REFERÊNCIAS

- Bonet, Javier, 1997, “Nonlinear Continuum Mechanics for the Finite Element Analysis”, Cambridge University Press, USA.
- Holzappel, Gerhard A., 2000, “Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering”, John Wiley & Sons, USA.
- Hughes, Thomas J. R., 1987, “The Finite Element Method”, Prentice-Hall, USA.

HYPERELASTIC MATERIALS SIMULATION BY FINITE ELEMENT METHOD

Waldemar de Carvalho

Eduardo Alberto Fancello

Federal University of Santa Catarina

Trindade – Florianópolis – Santa Catarina – Brazil – CEP 88040-900

Phone: +55 (48) 3721-9000 - FAX: +55 (48) 3234-4069 - CNPJ: 83.899.526/0001-82

wc_carvalho@yahoo.com.br

fancello@grante.ufsc.br

Abstract: *The use of simulation tools via Solid Mechanics and Finite Element Method (FEM) in describing mechanical behavior of Soft Tissues requires constitutive models capable of considering finite strain and large displacement, non-linearities source. In these cases, the constitutive models used are hyperelastic, viscoelastic, among others. This research has the purpose of studying hyperelastic mechanical behavior models and the development of a computer code in order to simulate these materials under finite strains. In addition to this, it intends to disseminate the use of FEM, because of its great power. The Theory of Hyperelasticity was studied (specially the Neo-Hookean Compressible Material). The equilibrium problem is described by the Virtual Works Principle (VWP), via its variational formulation, applied to the deformed configuration. The discretization of the VWP using Finite Elements allow us to obtain an algebraic system of non linear equations, wick solution is the nodal displacements. The simulations can be done for plane elements and the results that can be obtained are: the stress state of the elements, the structural behavior under applied loads.*

Keywords: *Hyperelasticity, Finite Elements, Simulation, Biomechanics.*