

ANÁLISE DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DE PLACAS PARA FORMULAÇÃO REGULAR.

André Pereira Santana, andre@ifma.edu.br¹

Samuel Santos Silva, samuel.santos31@yahoo.com.br¹

Rubens Soeiro Gonçalves, soeiro@ifma.edu.br¹

Francisco de Assis Borges Lima Martins, francisco.ablm@gmail.com¹

Karlos Braga Martins, karlos@fem.unicamp.br²

Jean Robert Pereira Rodrigues, jean@ifma.edu.br¹

Keyl Carlos Ribeiro Martins, kmartins@ifma.edu.br¹

Anderson Nobate Morgado, andermorgado0@gmail.com¹

¹Instituto Federal do Maranhão, Avenida Getúlio Vargas N° 04, Monte Castelo, São Luis, MA.

²Universidade Estadual de Campinas, Rua Mandeleiev, 200, Cidade Universitária, Campinas, SP.

Resumo: Neste trabalho é analisado o método dos elementos de contorno para o problema de flexão de placas finas isotrópicas empregando a teoria de Kircchoff. São utilizadas duas formulações: a formulação regular e a formulação singular. A primeira utiliza a equação integral tomando o ponto fonte fora do contorno e as integrais são calculadas numericamente. A segunda aplica a equação integral para o ponto fonte no contorno e as integrais singulares são calculadas analiticamente. As equações integrais são discretizadas utilizando-se o elemento constante, desse modo, transformam-se em equações algébricas. Após a montagem do sistema algébrico de equações foi analisada a variação da resposta para diferentes posições do ponto fonte, para a formulação regular, em seguida comparamos os resultados com a respectiva formulação singular e com os resultados analíticos e numéricos encontrados na literatura.

Palavras-chave: método dos elementos de contorno, placas, singularidades.

1. INTRODUÇÃO

O método dos elementos de contorno teve seu desenvolvimento depois que os chamados métodos dos domínios, diferenças finitas e elementos finitos, já tinha suas formulações consolidadas e com vasto campo de aplicações (Paiva, 1987). Ao contrário do método de domínio, que tem incógnitas em pontos do domínio e do contorno, o método dos elementos de contorno (MEC) tem incógnitas apenas em pontos do contorno (Katsikadelis, 2002). Suas principais características, desde as primeiras formulações são: a diminuição da ordem do sistema de equações lineares a serem resolvidas e a redução e simplificação dos dados de entrada (Kane, 1994). Todas essas características são basicamente decorrentes da diminuição da dimensão do problema. Por exemplo, em um problema tridimensional, a análise recairá no estudo de sua superfície. O método consiste na solução de equações integrais, as quais são obtidas utilizando-se as soluções fundamentais (Brebbia e Domingues, 1989). Essas equações possuem integrais apenas no contorno, o qual é discretizado em elementos, definindo-se nós onde os valores são aproximados por funções de interpolação, dessa forma a equação integral é transformada em uma equação algébrica. Agrupando todas as equações algébricas para os pontos do contorno obtém-se um sistema linear, cuja solução fornece a resposta para os valores desconhecidos no contorno (Beer et. al, 2008).

2. METODOLOGIA

2.1. Placas

Segundo Paiva (1987) as placas são elementos estruturais limitadas por duas superfícies planas e paralelas, sendo a distância entre elas designada espessura. No caso da espessura ser muito menor que as dimensões das superfícies planas limitantes, as placas são denominadas finas. O fato da espessura ser pequena permite que introduzam simplificações na formulação dos problemas de placas. O plano equidistante das superfícies planas externas é designado por plano médio da placa Fig. 1. Considerando as propriedades do material, uma placa pode ser anisotrópica, com diferentes propriedades em diferentes direções, ou isotrópica, com propriedades iguais em todas as direções.

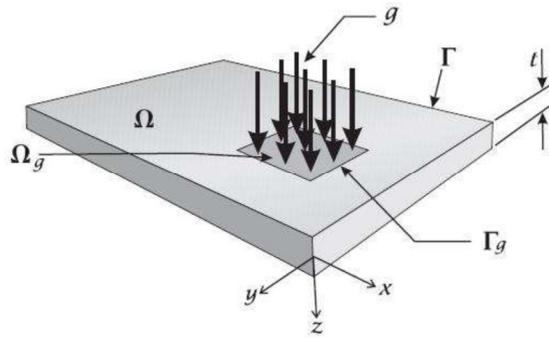


Figura 1. Placa fina submetida a um carregamento uniformemente distribuído g .

2.2. Hipóteses de Kircchoff para placas

Para se escreverem as equações diferenciais considera-se que o material de que é feito a placa é elástico linear, e os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados com a espessura t da placa. Nessas condições as hipóteses de Kircchoff que são consideradas válidas para placas finas e submetidas a ações normais ao seu plano médio são:

1. A superfície média da placa é plana e indeformável, ou seja, as deformações no plano xy são nulas: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ para $z = 0$;
2. os pontos pertencentes à normal ao plano médio da placa antes da deformação permanecem na normal à superfície média fletida;
3. a tensão na direção normal ao plano médio, σ_z é irrelevante quando comparada com as tensões σ_x e σ_y pelo que se considera: $\sigma_z = 0$.

2.3. Equações de equilíbrio de placas

Segundo Paiva (1987) as equações de equilíbrio podem ser estabelecidas em termos dos esforços unitários que resultam das tensões atuantes em um elemento diferencial de placa de dimensões dx , dy , segundo os eixos x e y , e a dimensão ao longo do eixo Z é considerada igual à espessura t da placa, Fig.2.

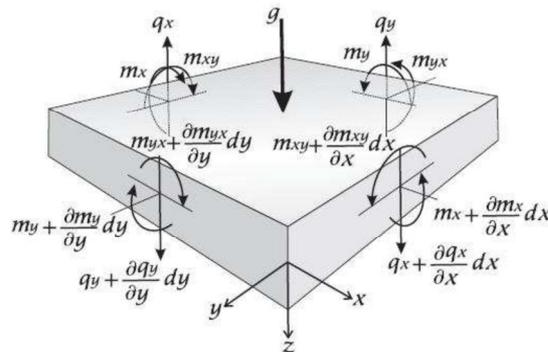


Figura 2. Forças e momentos em um elemento de placa.

Os esforços m_x , m_y e m_{xy} podem ser calculados a partir do deslocamento transversal W . Através de modelagem matemática (Paiva, 1987) chega-se a seguinte equação de placas:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{g}{D} \quad (1)$$

Está é a equação diferencial de placas, em que w é o deslocamento da superfície média.

2.4. Equação integral de contorno

A formulação integral de contorno para placas isotrópicas finas usa-se duas equações integrais, para deslocamento e rotação (Paiva, 1987). A equação de deslocamento transversal é dada por:

$$Kw(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q, P)w(P) - m_n^*(Q, P) \frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q, P)w_{c_i}(P) =$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)w_{c_i}^*(Q, P) + \int_{\Omega} g(P)w^*(Q, P)d\Omega(P) + \int_{\Gamma} \left[V_n(P)w^*(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial w^*(Q, P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) \quad (2)$$

Onde $\partial()/\partial n$ é a derivada na direção do vetor normal n_1 ao contorno Γ ; m_n e V_n são, respectivamente, o momento fletor e a força cortante de Kirchhoff no contorno Γ ; R_c é a reação nos cantos da placa; w_c é o deslocamento transversal nos cantos; P é o ponto fonte; Q é o ponto campo; e o asterisco ‘*’ denota a solução fundamental. A constante K é introduzida na ordem de entrada do ponto fonte, pois existem três possibilidades de alocação do ponto fonte: Q pode ser colocado fora do domínio, dentro do domínio ou no contorno suave. Se Q for colocado no contorno suave $K = 1/2$. Para um caso particular onde o ponto Q é colocado no contorno suave, a equação de contorno é dada por (Paiva, 1987):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial w(Q)}{\partial n_1} + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_n^*}{\partial n_1}(Q, P)w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q, P)w_{c_i}(P)$$

$$= \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P) \frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q, P) + \int_{\Omega} g(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q, P)d\Omega +$$

$$+ \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q, P) - m_n(P) \frac{\partial}{\partial n_1} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right\} d\Gamma(P) \quad (3)$$

onde $\partial()/\partial n$ é a derivada na direção do vetor normal n_1 ao contorno Γ no ponto fonte Q .

2.5. Solução Fundamental

“Para qualquer trabalho que tem como base o uso de equações integrais, é sempre necessário o estudo de soluções fundamentais” (Paiva, 1987). Entende-se como solução fundamental a resposta em um ponto genérico P de um domínio infinito, denominado domínio fundamental, devido à aplicação de uma carga unitária em outro ponto do domínio, Fig. 2. No caso particular de placas, a solução fundamental é o deslocamento transversal w em um ponto p qualquer de coordenadas $[x(p), y(p)]$, denominado ponto de deslocamento, ou também chamado ponto campo, devido a uma carga unitária aplicada em $[x(q), y(q)]$, denominado ponto de carregamento ou ponto fonte.

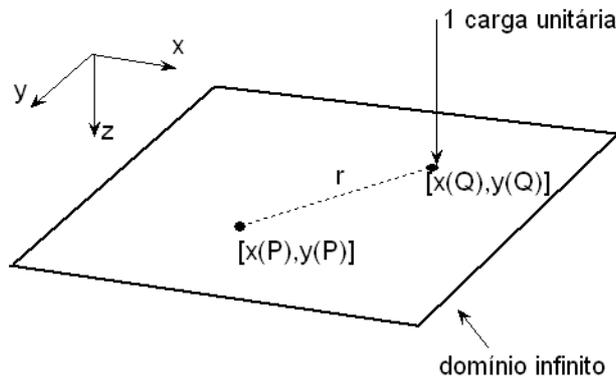


Figura 3. Carga unitária aplicada no ponto Q de um domínio infinito.

Considerando a equação diferencial de placas Eq. (1), a solução fundamental é a solução desta equação quando aplicamos como carregamento a função delta de Dirac no domínio fundamental, ou seja:

$$\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w^*}{\partial y^4} = \frac{\delta[x(p) - x(q), y(p) - y(q)]}{D} \quad (4)$$

Em que o símbolo * denota que a função é uma solução fundamental.

Paiva (1987) deduz a solução da equação diferencial Eq. (4), obtendo a seguinte expressão:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

A partir da Eq. (5) obtêm-se as expressões para a rotação e esforços em um ponto genérico P do domínio fundamental em relação a um sistema de coordenadas qualquer, Paiva (1987).

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*}{\partial n} &= \frac{1}{4\pi D} r(\ln r) \cos \beta \\ m_n^* &= -\frac{1}{4\pi} [(1 + \nu) \ln r + (1 - \nu) \cos^2 \beta + \nu] \\ m_{ns}^* &= \frac{(1 - \nu)}{8\pi} \sin 2\beta \\ V_n^* &= \frac{\cos \beta}{4\pi r} [2(1 - \nu) \sin^2 \beta - 3 + \nu] + \frac{(1 - \nu)}{4\pi R} \cos 2\beta \end{aligned} \quad (6)$$

Em que:

$$r = \sqrt{[x(p) - x(q)]^2 + [y(p) - y(q)]^2}$$

é a distância entre o ponto de carregamento Q e o ponto de deslocamento P, e R é o raio de curvatura do contorno da placa no ponto P, sendo, por isso, infinito para uma placa de lados retos.

3. RESULTADOS

Considere uma placa isotrópica engastada e uma carga distribuída g no seu domínio como mostrado na Fig. 4. Esta placa foi discretizada usando-se uma malha com 60 elementos no contorno e 225 pontos internos. Na Fig. 5 verifica-se a estabilidade da solução para o deslocamento do ponto central da placa para variações na posição do ponto fonte. Na Fig. 6 o comportamento da resposta para o deslocamento com o aumento do número de elementos de contorno, tanto para o MEC regular quanto para o MEC singular. O programa singular desta formulação de Elementos de Contorno foi desenvolvido pelo grupo de pesquisa do Prof. Eder Lima de Albuquerque da Universidade Estadual de Campinas.

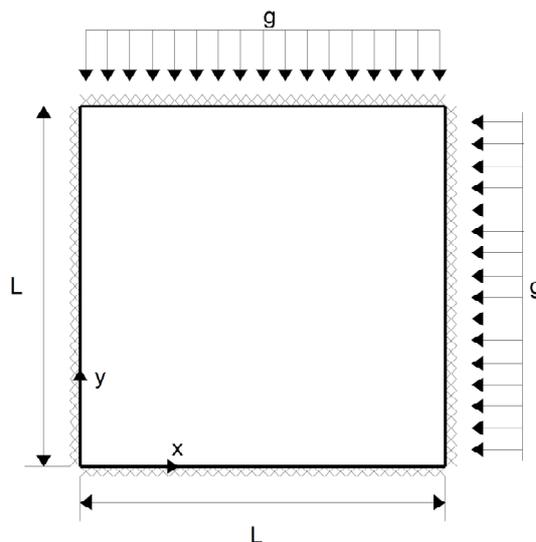


Figura 4. Placa engastada no contorno.

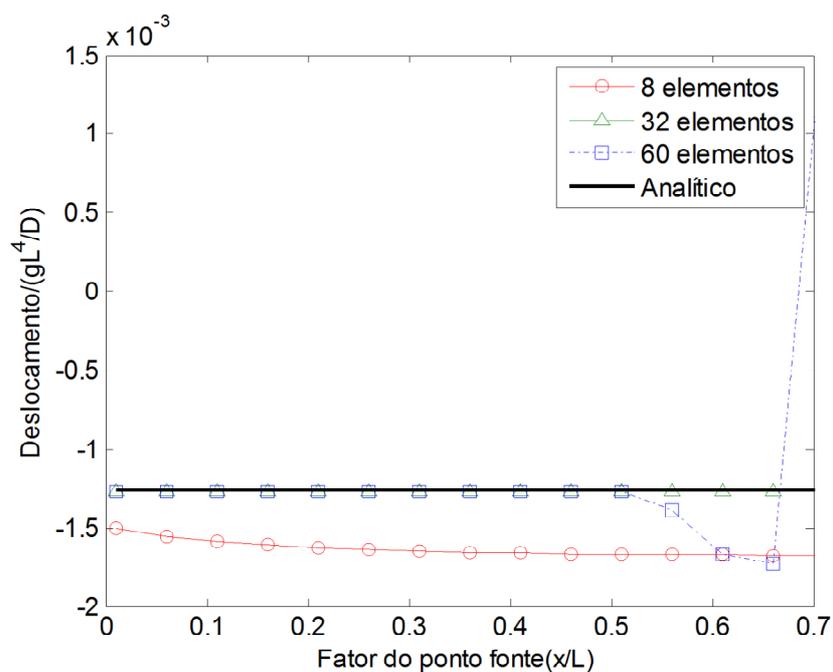


Figura 5. Estabilidade da solução, deslocamento do ponto central da placa.

A malha com maior número de elementos apresenta divergência do valor analítico a partir de determinada posição do ponto fonte, cerca de $0,5L$, e conforme esperado uma malha com poucos elementos apresentou maior diferença do valor analítico. Assim, para um fator do ponto fonte até $0,5$ a precisão da resposta está aliada a densidade da malha utilizada.

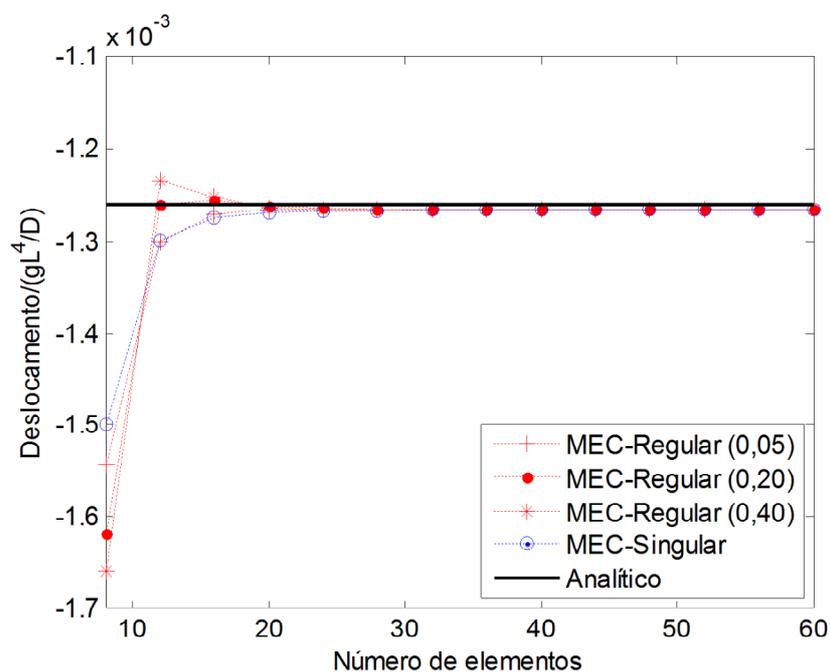


Figura 6. Convergência da solução para o deslocamento do ponto central.

Verificou-se boa convergência de ambas as formulações e a posição do ponto fonte foi influente apenas na malha para poucos elementos.

O mapcor da placa deformada é mostrada na Fig. 7.

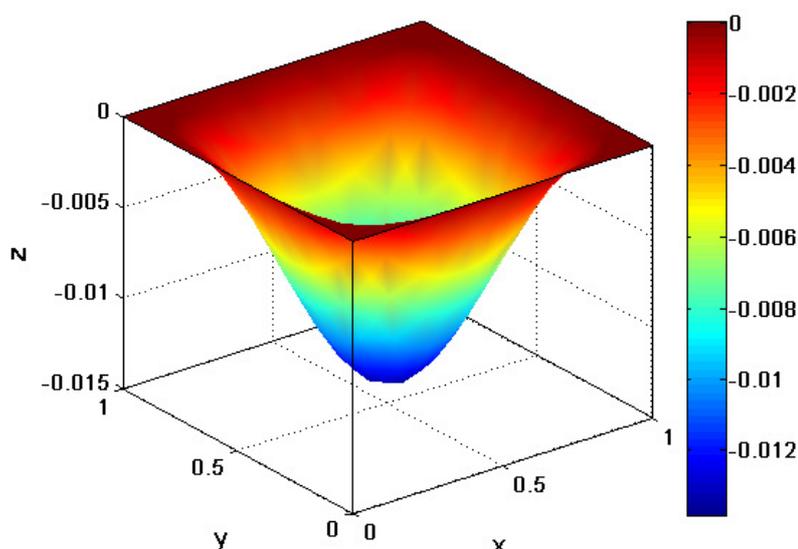


Figura 7. Forma deformada para placa engastada no contorno.

4. CONCLUSÃO

Constatou-se que a posição do ponto fonte é importante para garantir a convergência da solução para o MEC regular. Entretanto, não se observou que haja uma posição que otimize os resultados, contudo, há posições que tornam o sistema de equações estável, ou seja, para essas posições a precisão da resposta passa a depender da densidade da malha utilizada, utilizando malhas com muitos elementos a posição do ponto fonte, dentro da faixa de estabilidade, deixa de ter influência nos resultados.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão (FAPEMA) e o Instituto Federal do Maranhão (IFMA) pelo apoio financeiro.

6. REFERÊNCIAS

- Beer, G., Smith, I.M. and Duenser, C., 2008, "The Boundary Element Method with programming: for Engineers and Scientists". 1th ed. New York: Springer Wien.
- Brebbia, C.A; Domingues, J., 1989, **Boundary Elements: An Introductory Course**. 2nd ed. Southampton: Computational Mechanics Publications.
- Kane, J.H., 1994, **Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics**. New Jersey: Prentice Hall.
- Katsikadelis, J.T., 2002, **Boundary Elements: theory and applications**. 1th ed. Amsterdam: Elsevier.
- Paiva, J.B., 1987, **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas**. 195 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas), Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo.
- Timoshenko, S.P.; Goodier, J.N., 1970, **Teoria da Elasticidade**. Tradução: Sérgio Fernandes Villaça, Humberto Lima Soriano, Hierônimo Santos Souza. 3 ed. Rio de Janeiro, RJ: McGraw-Hill.

7. DIREITOS AUTORAIS

ANALYSE OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR PLATES BY REGULAR FORMULATION.

André Pereira Santana, andre@ifma.edu.br¹

Samuel Santos Silva, samuel.santos31@yahoo.com.br¹

Rubens Soeiro Gonçalves, soeiro@ifma.edu.br¹

Francisco de Assis Borges Lima Martins, francisco.ablm@gmail.com¹

Karlos Braga Martins, karlos@fem.unicamp.br²

Jean Robert Pereira Rodrigues, jean@ifma.edu.br¹
Keyl Carlos Ribeiro Martins, kmartins@ifma.edu.br¹
Anderson Nobate Morgado, andermorgado0@gmail.com¹

¹Instituto Federal do Maranhão, Avenida Getúlio Vargas N° 04, Monte Castelo, São Luis, MA.

²Universidade Estadual de Campinas, Rua Mandeleiev, 200, Cidade Universitária, Campinas, SP.

Abstract: This paper analyzed the method of boundary element to the problem of bending of thin plates using the isotropic theory of Kirchoff. They used two formulations: the formulation regular and singular formulation. The first uses the integral equation by taking the point source outside the boundary and the integrals are calculated numerically. The second applies the integral equation for the point source on the boundary and singular integrals are calculated analytically. The integral equations are discretized using the constant element, there by transformed into algebraic equations. After mounting the system algebraic equations was examined variation in response to different positions of the point source for the formulation regular then compared the results with its unique formulation and with analytic and numerical results in the literature.

Keywords: boundary element method, plates, singularities.

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.