

## **ESTRATÉGIA DE DISCRETIZAÇÃO E REFINAMENTO DE PAINÉIS TRIANGULARES APLICADA A FORMULAÇÃO H ADAPTATIVA NO MÉTODO DOS PAINÉIS EM 3D**

<sup>1</sup>Felipe Augusto Ventura de Bragança Alves, [felipe.avba@gmail.com](mailto:felipe.avba@gmail.com)

<sup>2</sup>Raul Bernardo Vidal Pessolani, [raul@vm.uff.br](mailto:raul@vm.uff.br)

(1)Aluno de Iniciação Científica e (2) Professor. Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Mecânica, R. Passo da Patria, 156, 24230-000

**Resumo** Uma estratégia de refinamento utilizando painéis triangulares constantes é proposta para a resolução de problemas H-adaptativos no Método dos Painéis em 3D. O Método dos Painéis utilizado é a da combinação das singularidades das fontes e Dipolos que aplicados ao redor de uma superfície genérica e utilizando a condição de contorno de Dirichlet, calcula o escoamento ao redor da superfície genérica. O medidor de erros utilizado é a posteriori, ou seja, calcula a divisão dos elementos baseado na diferença entre duas iterações sucessivas. Apresentam-se duas estratégias de refinamento e seleciona-se uma delas, e por meio de dois exemplos pode-se ver a sensibilidade do medidor de erro, a suavidade do refinamento e a aplicabilidade dessa formulação

*Palavras Chave: Método dos Painéis, Procedimentos Adaptativos, Métodos Numéricos*

### **1. INTRODUÇÃO**

O Método dos Painéis é indicado para a resolução de velocidades e pressão em superfícies submetidas a velocidades com baixo número de Reynolds. Resolve-se a equação de Laplace, subdividindo-se a superfície em Painéis e posicionando no seu exterior singularidades que podem ser fontes, dipolos ou vórtices. Calculam-se essas incógnitas e a distribuição de velocidade final e a soma da influência de cada singularidade com a do fluxo livre.

No caso do método dos Painéis das fontes e dos dipolos, as singularidades são os dipolos, e as velocidades são calculadas pela derivada do dipolo em relação à direção desejada, acrescida do fluxo livre.

A principal vantagem do Método dos Painéis sobre as outras técnicas é que, por ser uma formulação de contorno, o domínio infinito não necessita ser discretizado, mas somente os painéis do contorno. Isto traz uma grande economia computacional na dimensão final do sistema de equações, e no cálculo das velocidades, pois não é necessário o cômputo dos valores do domínio.

Por outro lado, as técnicas adaptativas sempre foram de grande interesse dos pesquisadores, pela possibilidade de se automatizar procedimentos de cálculo. De fato, o usuário entra com o mínimo de informações para descrever a geometria e as condições de contorno do problema, e, através de sucessivas iterações o próprio programa refina a malha, concentrando elementos nas regiões mais problemáticas, que podem ser pontos onde há um gradiente razoável de pressão ou de velocidade. Diversos trabalhos foram publicados nessa área tanto em Elementos Finitos (Zienkiewicz et alii (1988)), como no Método dos Elementos de Contorno (Pessolani 2002).

As técnicas podem ser H, que refina a malha, P que aumenta o grau de interpolação dos painéis ou R que reposiciona os painéis. Pode haver também combinações dessas técnicas. A técnica H possui uma vantagem sobre as demais na maior velocidade de convergência mesmo em regiões com grande singularidade. Nessa técnica podem ser utilizados medidores de erro como o de Rencis e Mullen (1988) ditos “a-posteriori”, que resolvem várias vezes o problema com malhas diferentes e comparam as soluções.

Este trabalho é voltado à implementação de uma estratégia H adaptativa que utiliza painéis triangulares constantes no Método dos Painéis de Fontes e Dipolos em 3D. O indicador de erro utilizado também é “a-posteriori” baseado na porcentagem da diferença da solução num mesmo elemento entre duas iterações sucessivas. São propostas e testadas duas estratégias de refinamento, com a escolha de uma que fornece uma discretização mais suave e sem a presença de painéis deformados. Finalmente, através de dois exemplos, mostra-se a eficiência da estratégia de refinamento.

### **2. O MÉTODO DOS PAINÉIS**

A formulação fundamental para obter a solução da equação que determina o potencial de um fluxo é obtida considerando um corpo físico submerso num fluxo potencial. A possibilidade do fluxo ser incompressível ( $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ ,

onde  $\mathbf{V}$  é o vetor velocidade) e irrotacional é justificada pelo fato da espessura da camada limite ser muito pequena. Portanto, a viscosidade não influencia nos cálculos dos coeficientes de pressão e sustentação da superfície.

A equação que descreve o fluxo irrotacional, sem viscosidade e incompressível, é a de Laplace (Anderson, 1994) é dada pela Eq.(1):

$$\nabla^2 \Phi^* = 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Onde  $\Phi$  é o potencial.

O Método dos Painéis resolve a equação de Laplace, posicionando, em painéis distribuídos no contorno, singularidades que podem ser fontes, dipolos ou vórtices, conforme ilustra a Fig. 1. Calculam-se essas incógnitas e a distribuição de velocidade final e a soma das influências de cada singularidade com a do fluxo livre. Para o caso do método dos Painéis das fontes e dos dipolos, as singularidades são os dipolos e as velocidades são calculadas pela derivada do dipolo em relação à direção desejada, acrescida do fluxo livre.

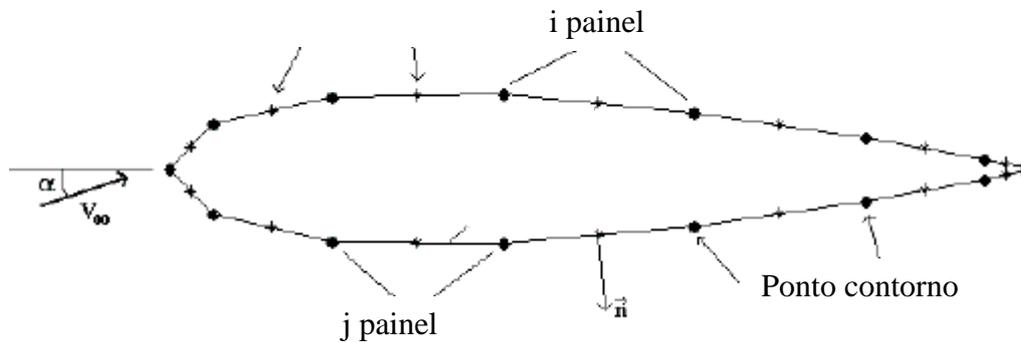


Figura 1. Painéis na superfície do corpo em 2D.

Onde  $V_{00}$  é a velocidade do fluxo,  $\alpha$  é o ângulo que o fluxo faz com a corda e “n” é o vetor normal exterior do painel

Utilizando a identidade de Green, é possível obter a solução geral do potencial. Essa solução é dada pela soma da distribuição local de dipolos  $\mu$  e fontes  $\sigma$  em cada painel (Katz e Plotkin 2002):

$$\Phi^*(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{S+w} \mu n \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma \left( \frac{1}{r} \right) dS + \Phi_\infty \quad (2)$$

Onde “S” representa a área da superfície, “w” a esteira, “r” o vetor posição e “n” o vetor normal exterior do painel.

A condição de contorno de Dirichlet diz que o potencial interno de um corpo físico é constante:

$$\Phi_i^* = (\Phi + \Phi_\infty)_i = const \quad (3)$$

Escolhendo um ponto P(x,y,z) dentro do corpo, e usando a condição de contorno de Dirichlet, o potencial interno em termos da distribuição de singularidade sobre a superfície é dada pela Eq.(4):

$$\Phi_i^*(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{S+w} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int_S \sigma \left( \frac{1}{r} \right) dS + \Phi_\infty = const \quad (4)$$

A eq. (4) é discretizada para N painéis, distribuídos na superfície:

$$\sum_{j=i}^N \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma \ln r dS - \sum_{j=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_S \mu \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) dS + \Phi_\infty = const \quad (5)$$

Aplicando-se a condição de Kutta, chega-se finalmente ao sistema final de equações, onde as fontes são arbitradas, e os dipolos são as incógnitas:

$$\sum_{j=1}^N B_j \sigma_j + \sum_{j=1}^N C_j \mu_j = 0 \quad (6)$$

A Velocidade tangencial em cada painel é determinada derivando o Dipolo em relação à direção desejada:

$$Q_i = \frac{\partial \Phi_u^*}{\partial l} \quad (7)$$

### 3. O MEDIDOR DE ERRO ADAPTATIVO

Para automatizar o cálculo do potencial, uma rotina adaptativa que inclui um indicador de erro foi introduzida. O indicador de erro tem como função identificar quais elementos precisam ser refinados.

O indicador de erro usado baseia-se na diferença percentual do dipolo de um painel em duas iterações sucessivas

$$R = \frac{|\mu_j^i - \mu_j^{i-1}|}{|\mu_j^i|} \leq Tol \quad (8)$$

Onde  $R$  é a diferença percentual,  $Tol$  é tolerância (0 a 1,0),  $\mu$  é o dipolo do painel  $j$  na  $i$ (ésima) e na  $(i-1)$ (ésima) iteração, computado pela expressão:

$$\mu^2 = \sum_{j=1}^N \mu_j^2 \cdot S_j \quad (9)$$

Onde  $S_j$  é a área do painel. Com base no valor de  $R$  e numa tolerância pré-estabelecida, o programa refina a malha e realiza a próxima iteração. O programa realiza quantas iterações forem necessárias e aplica o indicador de erro até uma convergência satisfatória ser obtida.

### 4. ESTRATÉGIA DE REFINAMENTO

Foram implementadas duas estratégias de refinamento para elementos triangulares.

#### 4.1. Primeira Estratégia de Refinamento:

Como pode ser visto na fig. 2, o elemento é dividido em três partes a partir do centróide do triângulo. Desta maneira os elementos vizinhos do triângulo dividido não são alterados, pois não são gerados nós intermediários.

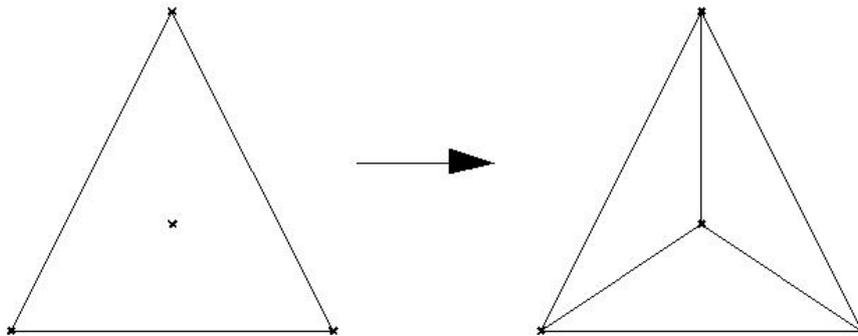


Figura 2 – Divisão do elemento segundo a 1ª estratégia de refinamento

Foi feita uma tentativa de resolver numericamente um paralelepípedo, onde cada face do paralelepípedo foi dividida em dois painéis triangulares. Todos os painéis do paralelepípedo foram discretizados duas vezes. Na figura 3 podemos ver o paralelepípedo inicial e o discretizado duas vezes.

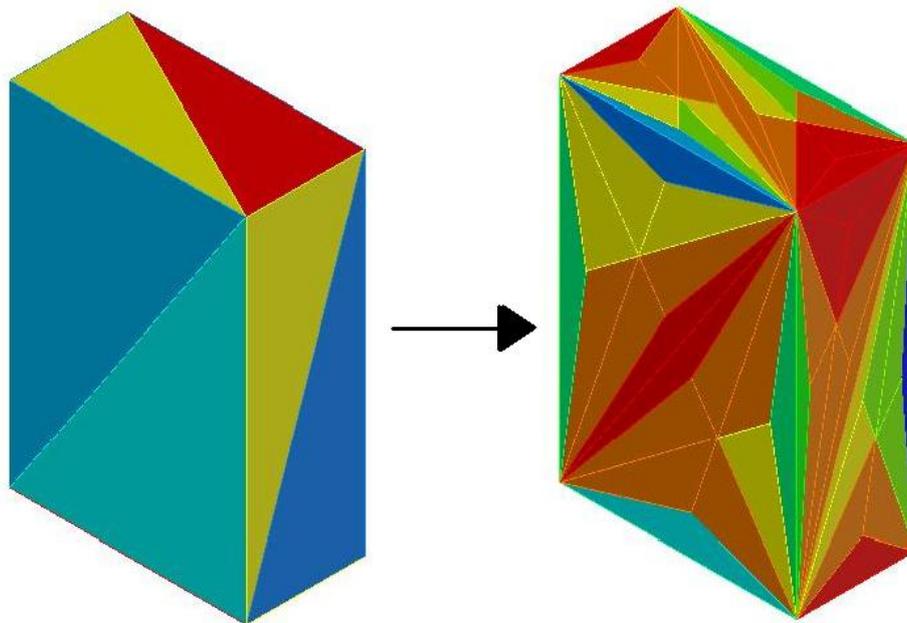


Figura 3 – Malha inicial e malha final

Como pode ser visto, esta estratégia gerou elementos alongados, especialmente os painéis que mantiveram o mesmo lado dos triângulos originais. De fato, quando um painel é dividido muitas vezes, os novos elementos tendem a ficar alongados, pois como uma lateral do painel original não é modificada, o ângulo do vértice oposto tende a ficar obtuso, como pode ser visto na fig. 4.

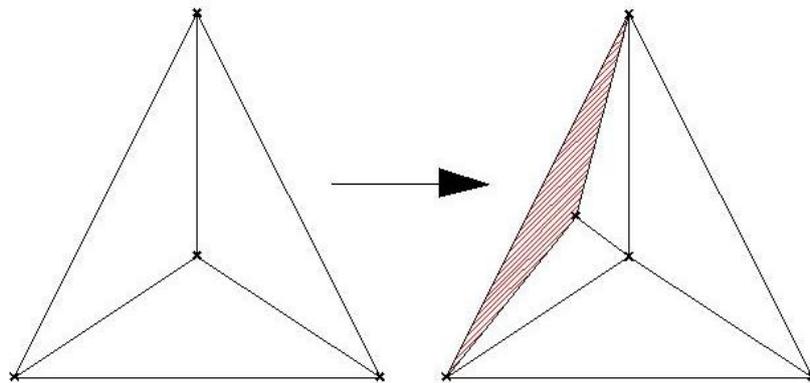


Figura 4 – Segunda divisão do elemento com a presença de um painel alongado

Com o alongamento, a integração do painel pode ficar comprometida. Sendo assim, é necessária outra estratégia de refinamento.

#### 4.2. Segunda Estratégia de Refinamento:

São criados três novos nós no ponto médio dos lados do triângulo e o mesmo é dividido em quatro partes, como pode ser visto na Fig. 5

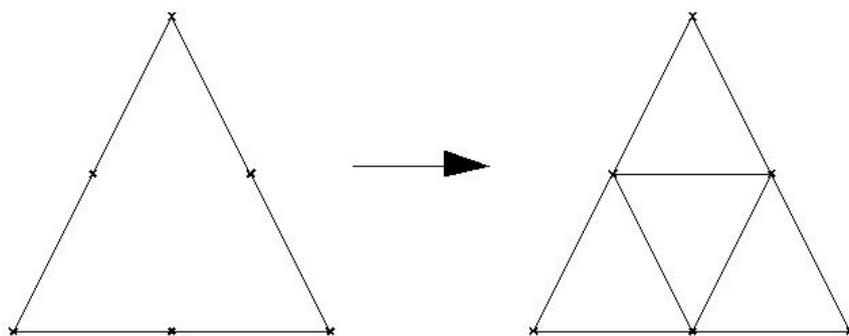


Figura 5 – Discretização de um painel triangular, segundo a 2ª estratégia.

Com essa estratégia evita-se o problema dos triângulos muito deformados. No entanto, esta técnica traz como inconveniente gerar nós intermediários nas laterais do triângulo, de forma que os elementos vizinhos devem ser também discretizados para manter a compatibilidade. Divide-se, então, os painéis vizinhos em dois, ligando o novo nó ao nó que ocupa o vértice oposto, como pode ser visto na fig. 6

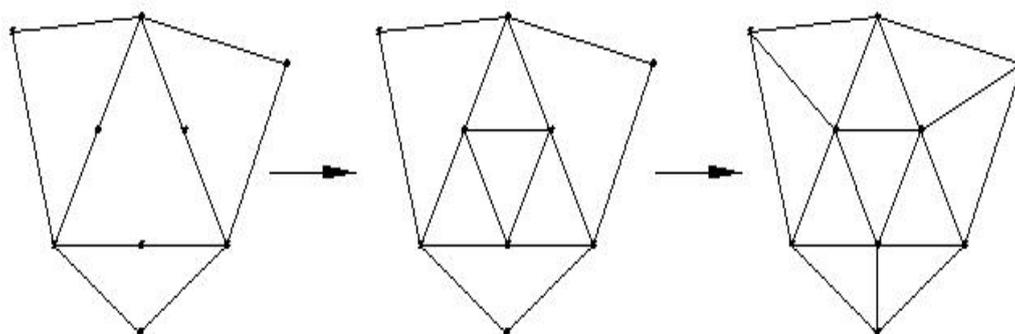


Figura 6 – Estratégia de discretização adotada.

Esta estratégia traz como vantagem o de evitar que o elemento fique deformado, e ao mesmo tempo suaviza a discretização, evitando a presença de elementos muito discretizados ao lado de outros pouco discretizados.

O mesmo paralelepípedo foi resolvido com a segunda estratégia, sendo discretizado duas vezes.

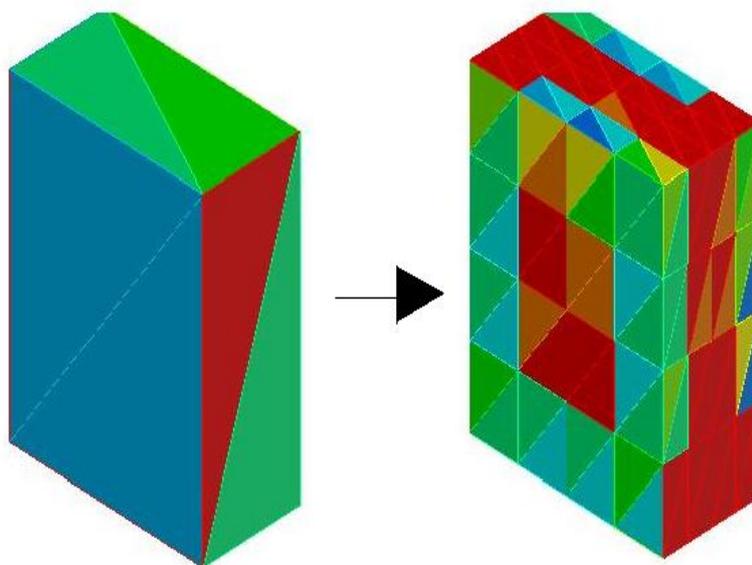


Figura 7 – Discretização do paralelepípedo usando a segunda estratégia

Como se pode ver na fig. 7, os elementos do paralelepípedo não ficam alongados, e mantém as proporções do triângulo original.

## 5. EXEMPLOS

### 5.1. Asa Trapezoidal

Como primeiro exemplo, foi discretizada uma asa trapezoidal submetida a um fluxo de ar horizontal, normal ao bordo de ataque. O aerofólio da asa é o Selig S1223. Partiu-se de uma discretização com 256 painéis triangulares. Após duas discretizações obteve-se 1366 painéis triangulares, conforme mostra a fig. 8. O programa calcula a velocidade do fluxo em cada painel. É feito, então, uma escala gradativa de cores em porcentagem da menor velocidade para a maior obtidas nos painéis. Essa escala pode ser vista nas fig 8 a 10.

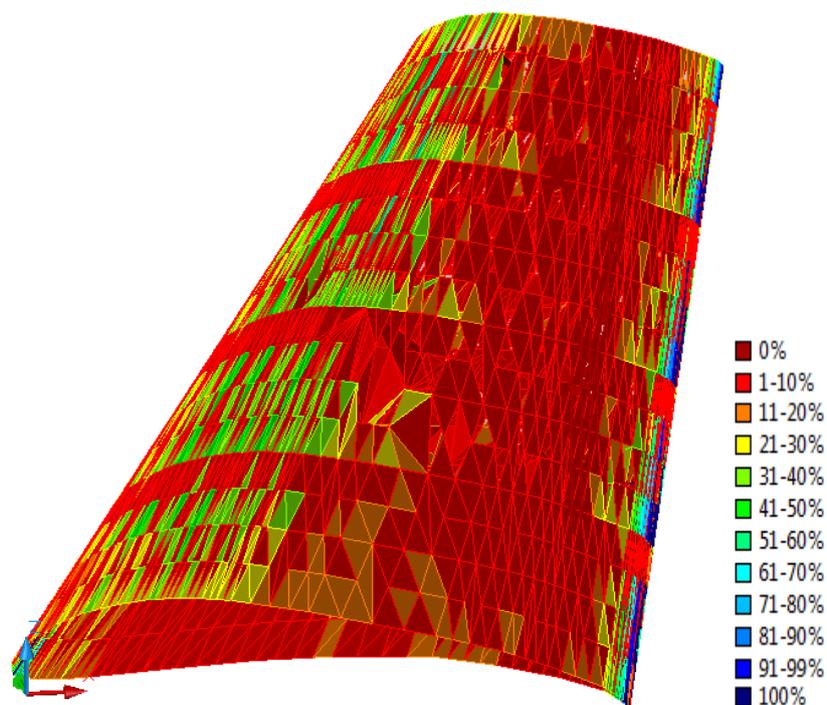


Figura 8 – Discretização da Asa Trapezoidal

A fig. 8 mostra o escoamento na parte superior da asa com a discretização. Conforme se pode ver a maior concentração de elementos foi na parte inicial da asa e próximo ao bordo de fuga. Isto é devido a que, nessas regiões, há um maior gradiente de velocidade, pois, na parte inicial o fluxo de ar é acelerado até se atingir o valor máximo na região de maior espessura do aerofólio, diminuindo então, gradativamente até próximo ao bordo de fuga, onde ocorre uma desaceleração acentuada.

Na fig. 9 mostra-se um detalhamento desses painéis. Conforme pode-se ver, há um gradiente de velocidades partindo de valores maiores na região de 1/3 da corda da asa, diminuindo gradativamente até o bordo de fuga. Este fato é comprovado pela teoria. Nota-se, contudo, alguns painéis com velocidade máxima no bordo de fuga. Isto é devido ao cálculo de velocidades, que, por ser calculado pela derivada dos dipolos, e pelos dipolos serem constantes em cada painel, a velocidade nesses painéis é influenciada pelas velocidades dos painéis da parte inferior da asa.

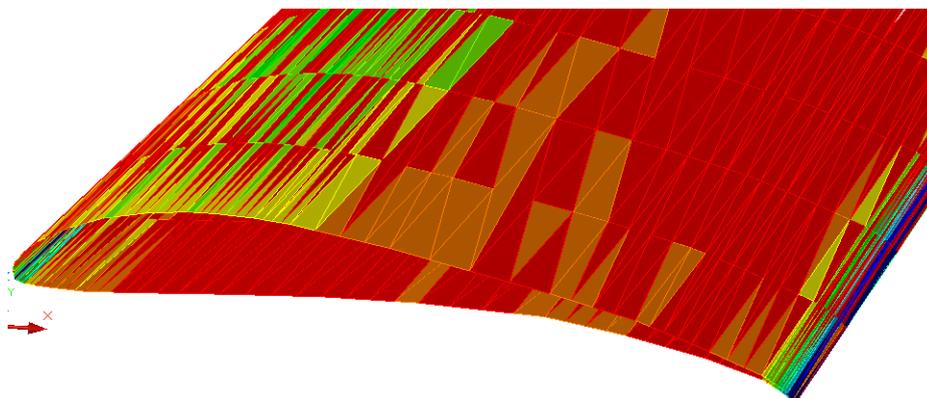


Figura 9 – Detalhamento da zona de velocidades da região de trás da asa.

Na figura 10 mostra-se o gradiente de velocidade na região do bordo de ataque. Pode-se ver a aceleração gradativa do fluxo de ar de um valo próximo a zero até um valor máximo.

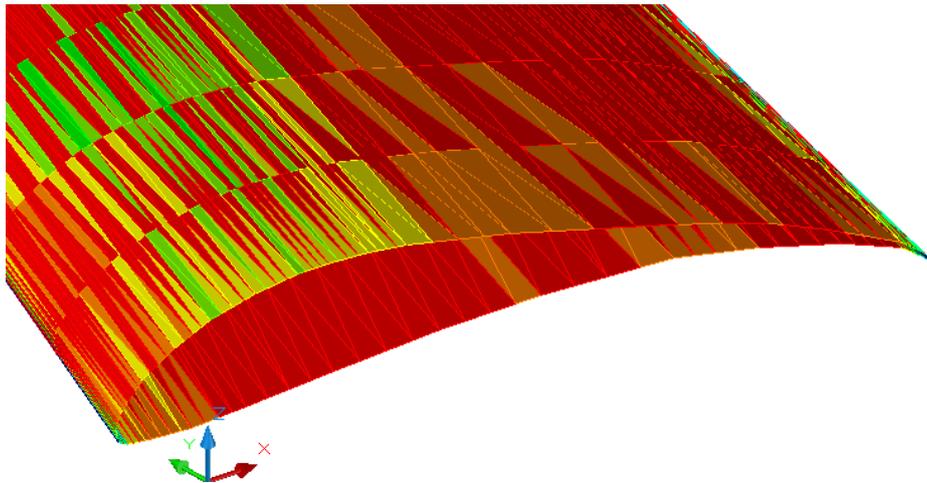


Figura 10 – Detalhamento da zona de velocidades da região frontal da asa.

## 5.2. Tubo Octogonal Submetido a um Fluxo Horizontal.

Como segundo exemplo foi discretizado um tubo octogonal. Inicialmente o tubo possuía 48 painéis triangulares. Depois de três discretizações, a malha final ficou com 1228 painéis, como mostra a fig. 11

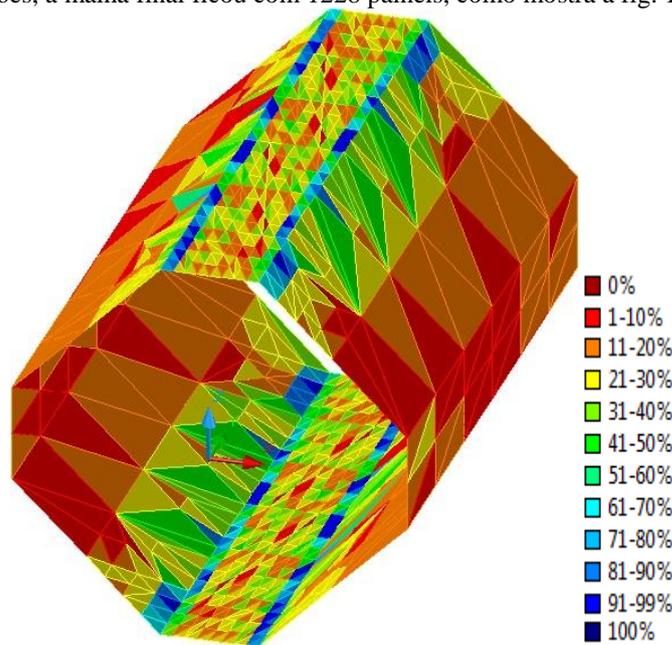


Figura 11 – Discretização do Tubo octogonal

Pela teoria os menores valores de velocidade do fluxo ocorrem na parte frontal do tubo, e os maiores, nas partes superior e inferior. Como podemos ver na fig. 11 o refinamento se concentrou nestas últimas partes, onde a velocidade do fluxo é maior.

Na figura 12, mostrada a seguir, os painéis diminuem ou aumentam de tamanho gradativamente. Podemos ver claramente, com esse exemplo do tubo, a vantagem da segunda estratégia de refinamento em relação à primeira, pois a discretização é suave. Não há a presença de painéis muito discretizados ao lado de outros poucos discretizados e nem painéis excessivamente deformados.

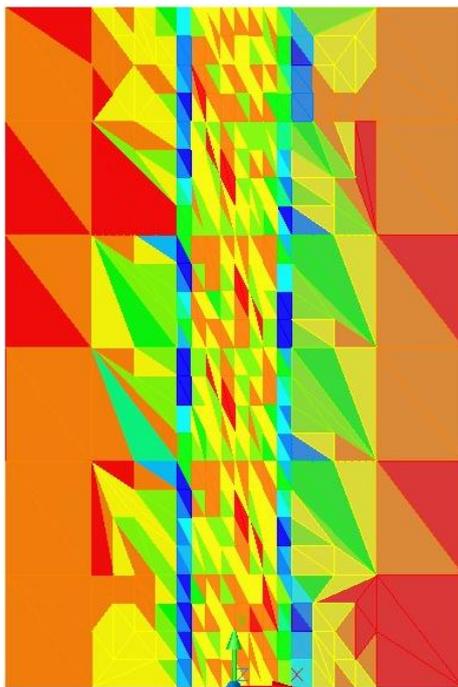


Figura 12 – Vista superior do tubo

## 6. CONCLUSÃO

Foi proposta uma estratégia H adaptativa de refinamento de painéis triangulares para o cálculo de escoamento ao redor de superfícies em três dimensões. Estes programas podem automatizar procedimentos, e poupar esforço humano e computacional.

Por meio de dois exemplos, comprovou-se a eficácia do medidor e a boa qualidade da malha gerada pela estratégia adotada, pois obteve uma maior suavidade no refinamento, e evitou uma concentração exagerada de elementos e também a excessiva deformação dos painéis triangulares

## 7. REFERÊNCIAS

- Anderson, 1994. "Theory of Aerodynamics", 2<sup>nd</sup> Edition, Springer Verlag.
- Katz, J., & Plotkin, A., 2002. "Low Speed Aerodynamics". Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> Edition
- Pessolani, R.B.V., 2002. "An HP-Adaptive Hierarchical Formulation for the Boundary Element Method Applied to Elasticity in Two Dimensions", Journal of the Brazilian Society Mechanical Sciences, Vol XXIV, march.
- Rencis J.J. e Mullen, R.L., 1988. "Self Adaptive mesh refinement for the Boundary Element solutions of Laplace Equation", Computational Mechanics.
- Zienkiewicz O.C., Zhu, J.Z., & Gong, N.G., 1989. "Effective and Practical H-P Version Adaptive Analysis Procedures goes the FEM", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 28, 879-891.

## 8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## TRIANGULAR MESH DISCRETIZATION AND REFINEMENT STRATEGY APPLIED TO AN H-ADAPTIVE FORMULATION FOR 3D PANEL METHOD

Felipe Augusto Ventura de Bragança Alves<sup>1</sup>, [felipe.avba@gmail.com](mailto:felipe.avba@gmail.com)

Raul Bernardo Vidal Pessolani<sup>2</sup>, [raul@vm.uff.br](mailto:raul@vm.uff.br)

(1) Undergraduated student and (2) Professor at Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Mecânica, R. Passo da Pátria, 156, 24230-000

**Abstract** A refinement strategy using constant triangular mesh is proposed for solving problems in 3D H-adaptive Panel Method. The Panel Method used is the combination of the source singularities and dipoles that, applied around a generic surface and using the Dirichlet boundary condition, calculates the flow around the surface. The error indicator used estimates which panels must be divided based on the difference between two successive iterations. Two mesh refinement strategies are shown and one is selected. By two examples, one can see the error estimator sensibility, the refinement smoothness and the applicability of the formulation.

### COPYRIGHT

The authors are the only responsible for the content included in his work.