

SOLUÇÃO ANALÍTICA APROXIMADA PARA A ENTRADA TÉRMICA LAMINAR TRANSIENTE DE FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS

Jacques Cesar dos Santos, jacquesles@yahoo.com.br¹

Jean Pierre Veronese, jpveronese@hotmail.com⁴

Jailson Charles dos Santos, jsurca@yahoo.com.br²

Wilson Luciano de Souza, wilson@ufs.br³

Lesso Benedito dos Santos, lessosantos@yahoo.com.br¹

Romberg Rodrigues Gondim, romberg@les.ufpb.br¹

¹Laboratório de Energia Solar(LES) da UFPB, Cidade Universitária -Campus I, 58059-900, João Pessoa/PB.

²Universidade Regional do Cariri, Departamento de Engenharia de Produção, Juazeiro do Norte, Ceará, Brasil.

³Universidade Federal de Sergipe (UFS), Av. Marechal Rondon, s/n, Jardim Rosa Elze, 49100-000, São Cristóvão-SE, Brasil.

⁴Instituto Federal do Piauí (IFPI), Pç. Liberdade, 1596, Centro, 64000-040, Teresina-PI, Brasil.

Resumo: No presente trabalho a convecção forçada laminar transiente, hidrodinamicamente desenvolvida e em desenvolvimento térmico, é estudada em canais de placas planas e no duto circular, para fluidos não-newtonianos considerando o modelo power-law. A Técnica da Transformada Integral Generalizada é utilizada para eliminar as variáveis espaciais nas quais a difusão é predominante, resulta um sistema de equações diferenciais parciais acopladas, que é solucionado com aproximações através da transformada clássica de Laplace. A solução apresentada permite uma análise apurada em todo o domínio ao longo do tempo.

Palavras-chave: Entrada Térmica, Fluido Não-Newtoniano, Transformada Integral.

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas o avanço dos computadores tem possibilitado o uso de ferramentas computacionais no auxílio de diversas tarefas presentes na engenharia, matemática, física e outras ciências. Neste aspecto a denominada computação algébrica tem crescido e se tornado uma ferramenta útil, em diversos ramos da ciência. Existem programas de computador comerciais que apresentam uma elevada capacidade na realização de operações aritméticas e algébricas, como desenvolver e simplificar expressões, resolver equações e operar com matrizes. Também permitem calcular limites, derivadas e primitivas, além de representações gráficas, entre outras tarefas. Entretanto o custo com licenças de programas computacionais pode ser um fator importante na escolha de uma ferramenta computacional. Neste aspecto o GNU Maxima apresenta uma alternativa ao uso de programas comerciais, pois possibilita a distribuição livre, oferece uma linguagem de programação de alto nível e diversas ferramentas para a execução de tarefas da computação algébrica.

O estudo dos fenômenos relativos à transferência de calor na convecção forçada interna tem sido realizado essencialmente para atender a uma necessidade prática, uma vez que a maioria das soluções encontradas para este tipo de fenômeno, notadamente na região de entrada térmica e desenvolvimento simultâneo, podem ser úteis no projeto de dispositivos térmicos de melhor desempenho. Portanto, componentes eletrônicos, condensadores, evaporadores, trocadores de calor, entre outros, são exemplos da possível utilização. Com a crescente miniaturização e a necessidade de otimização destes equipamentos, este estudo tem se tornado uma necessidade mundial. Assim, a motivação da pesquisa deixa de ser um exercício puramente acadêmico, em decorrência do crescimento da sua importância prática nos diversos processos industriais e em outros segmentos da economia, onde os fluidos apresentam comportamento Não-Newtoniano. Exemplos típicos de substâncias com este comportamento são: suspensão de sólidos em líquidos, polímeros, plásticos, petróleo, fluidos biológicos e farmacêuticos. Notadamente em diversas áreas da engenharia, tais como engenharia nuclear, espacial, petroquímica entre outros.

Utilizou-se a técnica da Transformada Integral, que é um método que pode apresentar soluções completamente analíticas, ou para casos de maior complexidade apresenta soluções híbridas, analítico-numéricas, onde se tem um controle preestabelecido sobre o erro, aliada a Transformada Clássica de Laplace. A idéia básica consiste na

transformação de um sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias, através da eliminação de dependências espaciais, com a vantagem de produzir uma solução analítica aproximada mais econômica em relação aos métodos numéricos, além de não necessitar da geração de malha e permitir ainda o acompanhamento e a variação dos parâmetros de interesse práticos determinantes presentes na solução. O presente trabalho pode ser inserido no contexto dos problemas de convecção forçada transiente, sendo considerado uma extensão dos trabalhos realizados por Cotta(1994), Gondim(1997), Castellões (2004) e outros; na resolução da equação da energia com condição de entrada em degrau e considerando condição de contorno do terceiro tipo.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Para ilustrar a aplicação da solução, este procedimento será aplicado ao problema da entrada térmica, no escoamento laminar hidrodinamicamente desenvolvido no interior de dutos, como é o caso do canal de placas planas e tubos circulares. A temperatura de entrada será assumida como uma função do tempo. Serão desprezados os efeitos da condução axial, da dissipação viscosa e da convecção livre na parede, e as propriedades físicas serão consideradas constantes. Segundo Cotta & Gerk (1994) a equação da energia é dada por:

$$r^n \frac{\partial \theta(r, z, \tau)}{\partial \tau} + r^n \frac{u(r)}{2^{4-2n}} \frac{\partial \theta(r, z, \tau)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial \theta(r, z, \tau)}{\partial r} \right) \quad 0 < r < 1, \quad z > 0, \quad \tau > 0 \quad (1)$$

Com condição inicial, de entrada e condições de contorno dadas, respectivamente por:

$$\theta(r, z, 0) = 0 \quad 0 < r < 1, \quad z > 0 \quad (2)$$

$$\theta(r, 0, \tau) = 1 \quad 0 \leq r \leq 1, \quad \tau > 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(r, z, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta(r, z, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=1} + Bi \theta(1, z, \tau) = 0, \quad z > 0, \quad \tau > 0 \quad (4-5)$$

Segundo Mikhailov & Özisik (1984, p.343) o perfil de velocidade adimensional para o escoamento completamente desenvolvido de um fluido Não-Newtoniano em Lei de Potência é dado por :

$$u(r) = \frac{1+(n+2)c}{1+c} \left(1 - r^{\frac{1+c}{c}} \right) \quad (5)$$

Onde c é um parâmetro do modelo, segundo Mikhailov & Özisik (1984), c é igual a 1 para fluido newtoniano, $c < 1$ para fluido pseudoplástico e $c > 1$ para fluido dilatante. Grupos adimensionais:

$$r = \frac{R}{b}, \quad z = \frac{\alpha \cdot Z}{\bar{U} D_h^2}, \quad D_h = 2^{2-n} b, \quad \tau = \frac{\alpha \cdot t}{b^2}, \quad u(r) = \frac{U(R)}{\bar{U}}, \quad \theta(r, z, \tau) = \frac{T(R, Z, t) - T_w}{\Delta T_0},$$

$$\Omega = \frac{\omega b^2}{\alpha} \quad W(r) = r^n \frac{u(r)}{2^{4-2n}} \quad Bi = \frac{h_e b}{k} \quad (6-14)$$

3. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

Seguindo os passos apresentados por Gondim (1997), aplica-se a Transformada Clássica de Laplace sobre a variável tempo no sistema de Eqs. 1-5, obtém-se :

$$s r^n \theta^L(r, z) + r^n u(r) \frac{\partial \theta^L(r, z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n \frac{\partial \theta^L(r, z)}{\partial r} \right), \quad 0 < r < 1, \quad z > 0 \quad (15)$$

$$\theta^L(r, z) = \frac{1}{s}, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \theta^L(r, z)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad z > 0 \quad (17)$$

$$Bi \theta^L(z, 1) + \frac{\partial \theta^L(z, r)}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0 \quad , \quad z > 0 \quad (18)$$

$$\theta^L(r, \infty) = 0 \quad , \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (19)$$

Onde $\theta^L(r, z)$ é a transformada de Laplace do potencial $\theta(r, z, \tau)$.

3.1. Problema de Autovalor

$$-\frac{d}{dr} \left(r^n \frac{d\psi_i(r)}{dr} \right) + \mu_i^2 r^n \psi_i(r) = 0, \quad \frac{d\psi_i(r)}{dr} \Big|_{r=0} = 0, \quad \frac{d\psi_i(r)}{dr} \Big|_{r=1} + Bi \psi_i(1) = 0 \quad (20-22)$$

Cujas autofunções normalizadas $\tilde{\psi}_i(r)$ e os autovalores μ_i são obtidos da solução deste problema de autovalor.

3.2. Par Transformado

$$\bar{\theta}_i(z, \tau) = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(r) r^n \theta(r, z, \tau) dr, \quad \theta(r, z, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(r) \bar{\theta}_i(z, \tau) \quad (23-24)$$

3.3. Problema Transformado

Aplicando a Técnica da Transformada Integral no problema 2.1.a-e, obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{nt} A_{ij} \frac{\partial \bar{\theta}_j(z)}{\partial z} = -(\mu_i^2 + s) \bar{\theta}_i(z) \quad (25)$$

$$\bar{\theta}_i(0) = \frac{1}{s} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(r) r^n \theta_e(r) dr, \quad A_{ij} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(r) r^n u(r) \tilde{\psi}_j(r) dr \quad (26-27)$$

Para se obter uma solução analítica aproximada para o problema 25-27, os termos não diagonais da matriz A_{ij} serão desprezados. Solucionado o problema desacoplado resultante, utilizando a Eq. 24 e invertendo a transformação de Laplace obtém-se:

$$\theta(r, z, \tau)_A = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(r) \int_0^1 \tilde{\psi}_i(r) r^n \theta_e(r) dr \text{Exp}\left(\frac{-\beta_i^2 z}{A_{ii}}\right) U\left(\tau - \frac{z}{A_{ii}}\right) \quad (28)$$

Onde $\theta(r, z, \tau)_A$ representa uma solução aproximada transiente para o problema 1.2.a-g.

3.4. Temperatura Média e Número de Nusselt

A temperatura média e o numero de Nusselt local são dados, segundo Cotta (1998, p. 267 seq.) por:

$$\theta_m(z, \tau) = 2^{4-2n} (n+1) \int_0^1 r^n W(r) \theta(r, z, \tau) dr, \quad Nu(z, \tau) = 2^{2-n} \frac{\frac{\partial \theta(r, z, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=1}}{\theta(1, z, \tau) - \theta_m(z, \tau)} \quad (29-30)$$

4. RESULTADOS

A Tab. 1. apresenta um estudo da convergência da temperatura na linha central do canal e da temperatura média ao longo de z para o canal de placas planas. Foi admitido $\tau=10$. Pode-se observar que há uma melhora na convergência com o aumento do número de termos. É realizada também uma comparação qualitativa com a solução numérica (MOL), apresentada por Santos *et al* (2010), observa-se que há uma diferença nos resultados, decorrente da presente solução ser aproximada. Na tabela 2 é realizado o mesmo estudo de convergência para o duto circular.

Tabela 1. Convergência da temperatura na linha central do canal de placas planas, e temperatura média $c=1$.

z	Temperatura na Linha central					Temperatura média				
	1 Eq	5 Eqs	10 Eqs	15 Eqs	Mol	1 Eq	5 Eqs	10 Eqs	15 Eqs	Mol
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9988
0,01	0,9406	0,9270	0,9270	0,9270	0,8784	0,6706	0,7284	0,7284	0,7284	0,6740
0,02	0,6949	0,6944	0,6944	0,6944	0,6565	0,4947	0,5379	0,5379	0,5379	0,4973
0,03	0,5133	0,5133	0,5133	0,5133	0,4858	0,3658	0,3973	0,3973	0,3973	0,3677
0,04	0,3792	0,3792	0,3792	0,3792	0,3593	0,2706	0,2935	0,2935	0,2935	0,2720
0,05	0,2802	0,2802	0,2802	0,2802	0,2657	0,2001	0,2168	0,2168	0,2168	0,2011
0,06	0,2070	0,2070	0,2070	0,2070	0,1965	0,1480	0,1602	0,1602	0,1602	0,1487
0,07	0,1529	0,1529	0,1529	0,1529	0,1453	0,1094	0,1183	0,1183	0,1183	0,1100
0,08	0,1129	0,1129	0,1129	0,1129	0,1075	0,0809	0,0874	0,0874	0,0874	0,0813
0,09	0,0834	0,0834	0,0834	0,0834	0,0795	0,0598	0,0646	0,0646	0,0646	0,0602
0,10	0,0616	0,0616	0,0616	0,0616	0,0588	0,0443	0,0477	0,0477	0,0477	0,0445

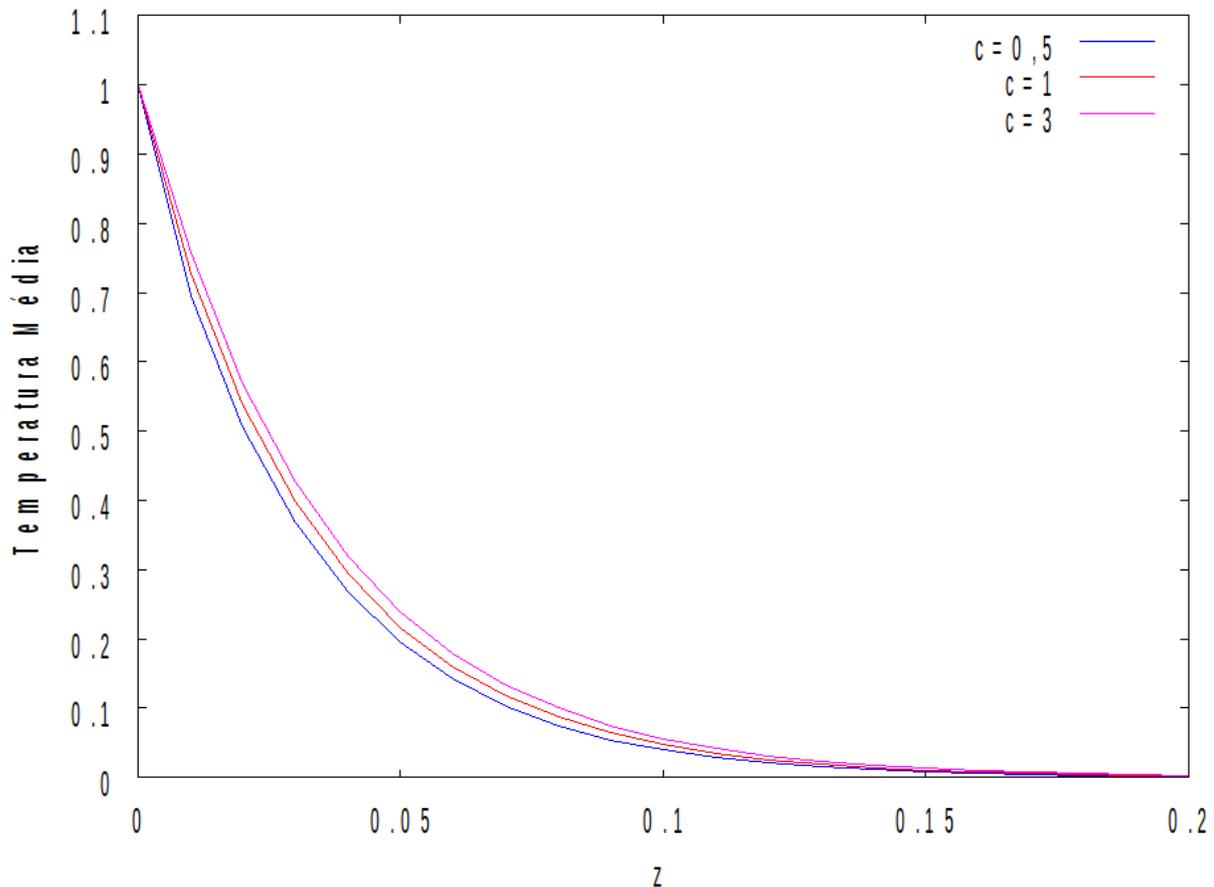


Figura 1. Temperatura média para o canal de placas planas.

Tabela 2. Convergência da temperatura na linha central do duto circular, e temperatura média $c=1$.

z	Temperatura na Linha central					Temperatura média				
	1 Eq	5 Eqs	10 Eqs	15 Eqs	Mol	1 Eq	5 Eqs	10 Eqs	15 Eqs	Mol
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,01	1,3817	1,0242	1,0242	1,0242	0,9994	0,8252	0,8401	0,8401	0,8401	0,7511
0,02	1,1917	1,0203	1,0203	1,0203	0,9726	0,7117	0,7177	0,7177	0,7177	0,6280
0,03	1,0278	0,9541	0,9541	0,9541	0,8971	0,6138	0,6163	0,6163	0,6163	0,5348
0,04	0,8865	0,8557	0,8557	0,8557	0,7997	0,5294	0,5304	0,5304	0,5304	0,4590
0,05	0,7646	0,7519	0,7519	0,7519	0,7012	0,4566	0,4570	0,4570	0,4570	0,3953
0,06	0,6595	0,6542	0,6542	0,6542	0,6100	0,3938	0,3940	0,3940	0,3940	0,3409
0,07	0,5688	0,5666	0,5666	0,5666	0,5287	0,3397	0,3398	0,3398	0,3398	0,2943
0,08	0,4906	0,4897	0,4897	0,4897	0,4575	0,2930	0,2930	0,2930	0,2930	0,2542
0,09	0,4231	0,4227	0,4227	0,4227	0,3955	0,2527	0,2527	0,2527	0,2527	0,2196
0,10	0,3649	0,3648	0,3648	0,3648	0,3418	0,2179	0,2179	0,2179	0,2179	0,1897

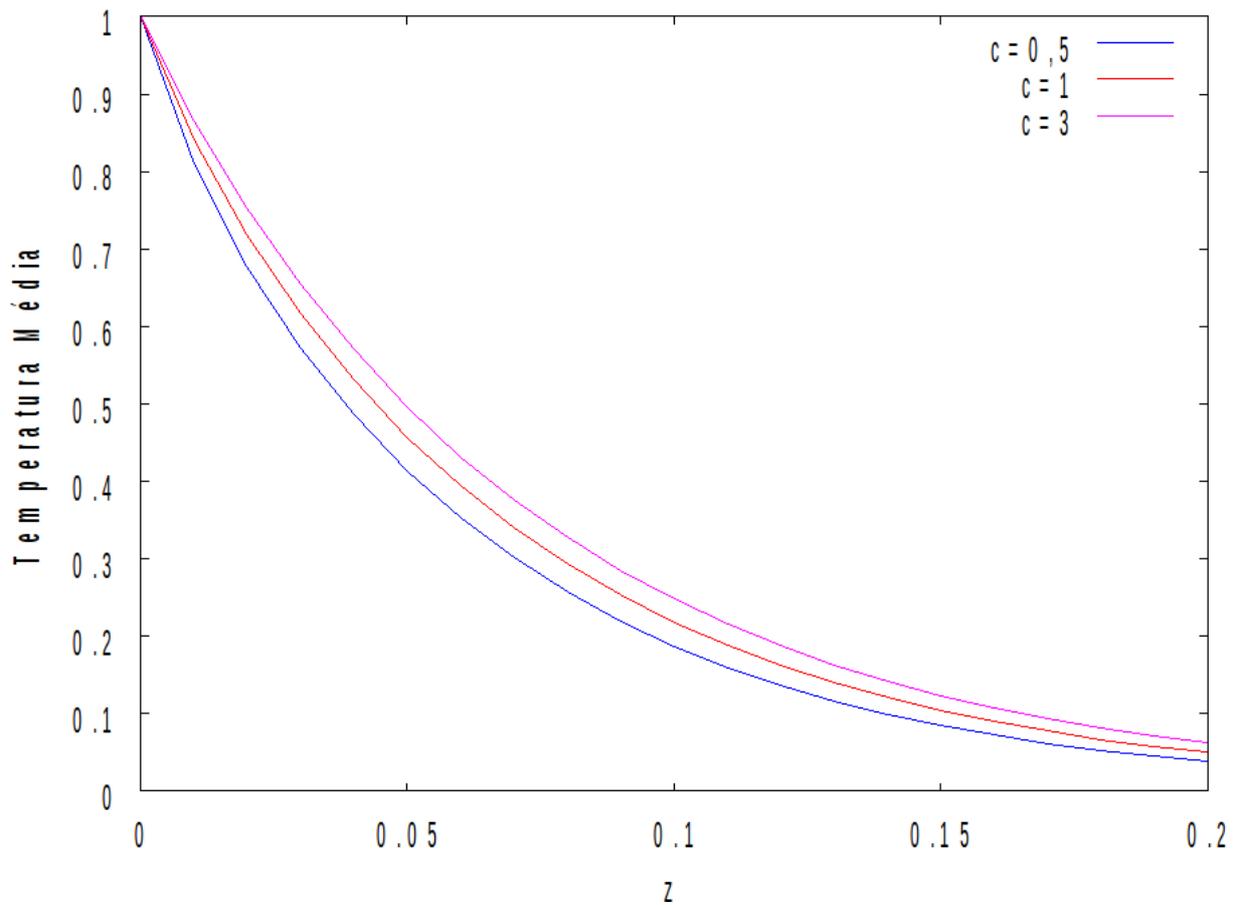


Figura 2. Temperatura média para o duto circular.

A Fig. 1. apresenta graficamente o comportamento da temperatura média ao longo da variável independente z , para diferentes valores do índice do modelo de lei de potencia no canal de placas planas. Observa-se que a temperatura média se eleva com o aumento do valor do índice. Nas simulações apresentadas foi adotado o número de Biot $Bi=10^{12}$ para simular o caso da temperatura prescrita na parede. A Fig. 2. apresenta graficamente o comportamento da temperatura média ao longo da variável independente z , para diferentes valores do índice do modelo de lei de potencia e duto circular. Observa-se um comportamento análogo ao caso anterior. Porém para o mesmo intervalo de z a temperatura no canal de placas planas se aproximou mais do equilíbrio térmico que no duto circular. A Fig. 3. apresenta graficamente o comportamento transiente da temperatura média ao longo da variável independente z , para diferentes instantes de tempo τ no interior do canal de placas planas. A Fig. 4. apresenta graficamente o comportamento transiente da temperatura média ao longo da variável independente z , para diferentes instantes de tempo τ no interior do duto circular.

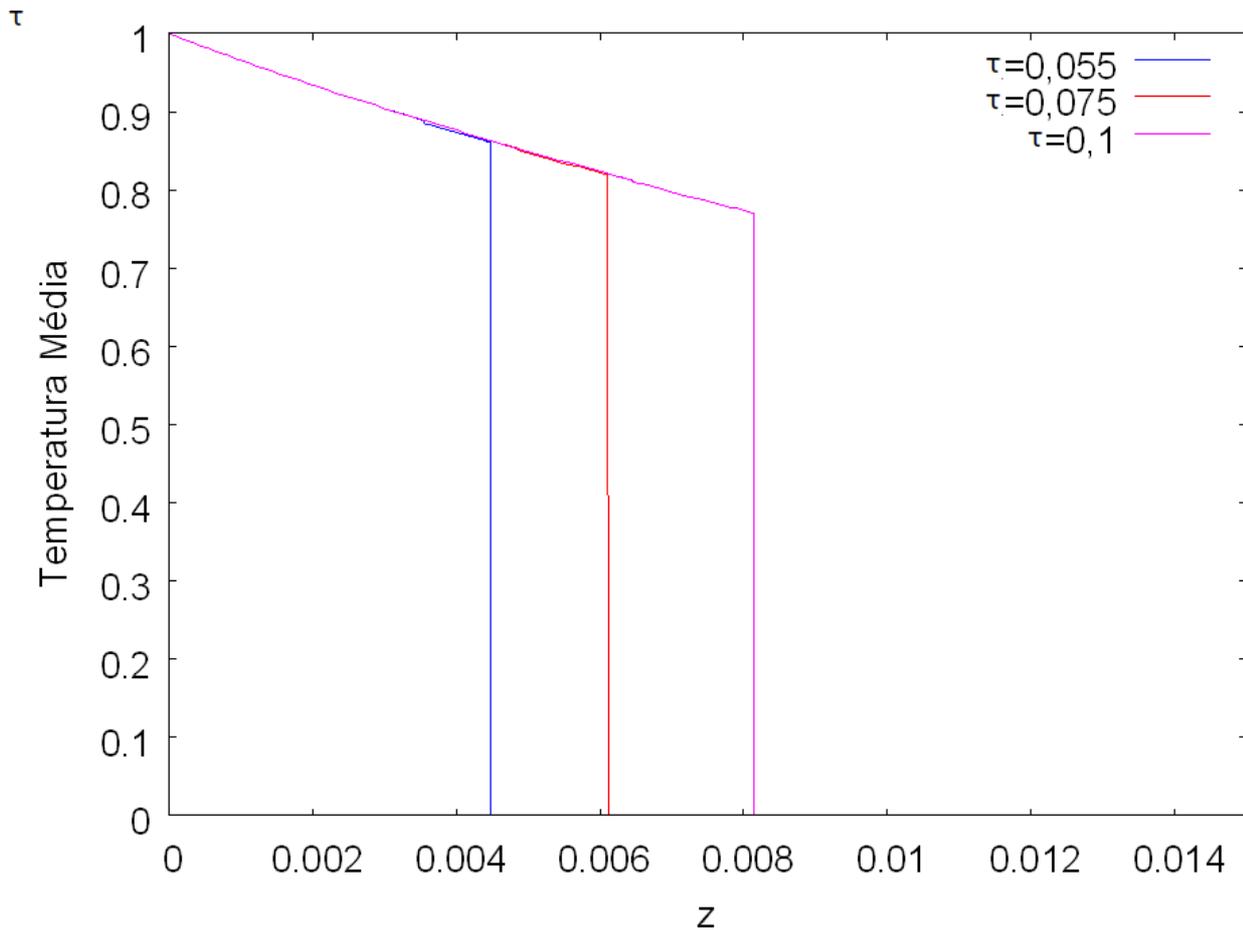


Figura 3. Temperatura média transiente para o canal de placas plana $c=1$.

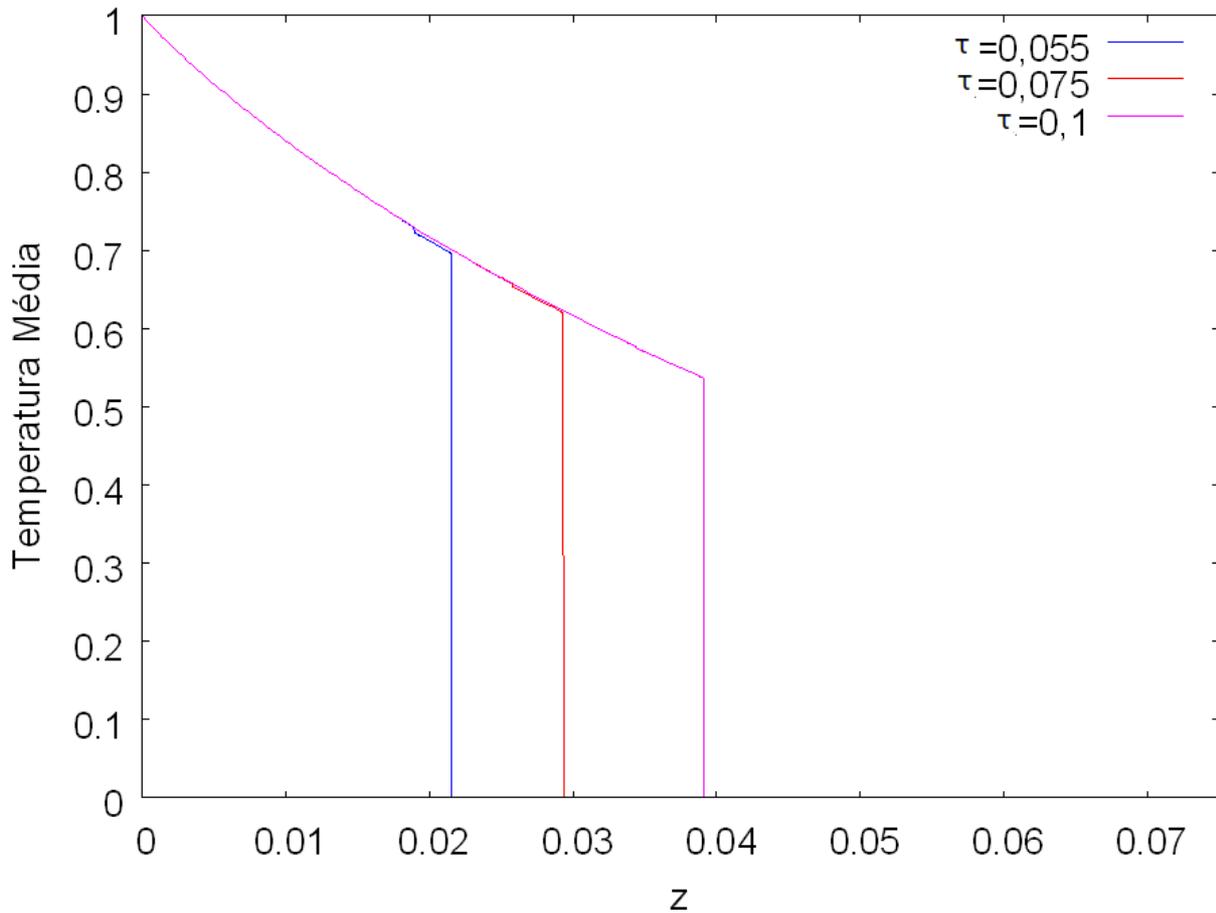


Figura 4. Temperatura média transiente para o duto circular $c=1$.

5. CONCLUSÃO

Uma solução aproximada para a entrada térmica transiente em um canal de placas planas paralelas e duto circulares foi obtida através da Técnica da Transformada Integral associada à transformada clássica de Laplace. Varias tarefas foram realizadas com o auxílio do programa computacional Maxima, o programa foi utilizado na simulação computacional do problema, foi utilizada a saída gráfica, permitindo uma melhor visualização da solução. A execução destas tarefas indica a possibilidade da utilização do Maxima como uma alternativa a outros programas computacionais comerciais. Uma das principais vantagens da utilização do Maxima reside na possibilidade de ser distribuído livremente para os interessados em geral. Foram apresentados resultados para a temperatura e temperatura média ao longo de z , para o canal de placas planas e o duto circular. Os resultados são comparados com a solução numérica apresentada por Santos *et al* (2010). A presente solução mostrou ser útil no estudo da entrada térmica permanente de fluidos Não-Newtonianos, apresentando uma boa concordância com os dados da literatura, representando uma alternativa aos métodos estritamente numéricos.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o financiamento do trabalho pelo MCT/CNPq(CT-Petro/CNPq), Processo : 550598/2007-3.

7. REFERÊNCIAS

- Castellões, F.V., 2004, "Convecção Transiente em Microcanais Via Transformada Integral", Dissertação de Mestrado, PEM/COPPE/UFRJ, Brasil, 2004.
- Cavalcante, F.F.,2000, "Convecção Forçada Transiente Interna com Entrada Periódica: Solução Via Transformada Integral", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, Brasil.
- Cheroto, S.,1998,"Analysis of Unsteady Forced Convection in Channels by Integral Transform Technique", Doctor Thesis, University of Miami, Coral Gables, FL, USA.
- Cotta, R. M., 1993, "Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow", CRC Press, Boca Raton, FL, EUA.
- Cotta, R. M., 1998, "The Integral Transform Method in Thermal and Fluid Sciences and Engineering", Begell house, New York,EUA.
- Cotta, R.M, & Gerk, J.E.V.,1994,"Mixed Finite-Difference/Integral Transform Approach for Parabolic-hyperbolic Problems in Transient Forced Convection", Num. Heat Transfer, Vol. 25, pp. 433-448.
- Gondim, R.R.,1997,"Convecção Forçada Transiente Interna com Difusão Axial Solução Via Transformação Integral", Tese, UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, Brasil.
- Li, W,1990,"Experimental and Theoretical Investigation of Unsteady Forced Convection in Ducts", Ph. D. Dissertation, University of Miami, Coral Gables, FL, USA.
- Mikhailov, M. D. & Özisik, M.N.,1984, "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion"; John Wiley, New York.
- Santos, J.C.,2002,"Análise Teórica de Convecção Forçada Laminar Transiente com Entrada Térmica Periódica", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, Brasil.
- Santos, J.C.,2004, "Análise Teórica De Convecção Forçada Laminar Transiente De Fluido Não-Newtoniano Com Entrada Periodica", Anais do 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, ENCIT 2004, Rio de Janeiro.
- Santos, J.C., "Computaçã Algébrica Usando o XMaxima", VI ERMAC, Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, João Pessoa, PB, Brasil, Agosto 2006.
- Santos, J.C.,2010,"Theoretical Analysis for Laminar Thermal Entrance of Non-Newtonian Fluids via Method of Lines", anais 13th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, Encit-2010.(Submetido).
- Shelter, W., Manual do Máxima, <http://maxima.sourceforge.net> , visitado em 15/julho/2006.
- Veronese, J. P. ; Santos, J. C. ; Medeiros, M. J. ; Santos, C. A. C. ; Quaresma, J. N. N.,2006, "Análise Da Convecção Forçada Em Canais De Placas Planas No escoamento De Fluidos Não-Newtonianos Via Gitt". Anais Do Congresso Nacional De Engenharia Mecânica, Conem-2006, 2006, Recife.

8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION FOR TRANSIENT THERMAL ENTRY OF NON-NEWTONIAN FLUIDS

Jacques Cesar dos Santos, jacquesles@yahoo.com.br¹

Jean Pierre Veronese, jpveronese@hotmail.com⁴

Jailson Charles dos Santos, jsurca@yahoo.com.br²

Wilson Luciano de Souza, wilson@ufs.br³

Lesso Benedito dos Santos, lesso.santos@yahoo.com.br¹

Romberg Rodrigues Gondim, romberg@les.ufpb.br¹

¹Laboratório de Energia Solar(LES) da UFPB, Cidade Universitária -Campus I, 58059-900, João Pessoa/PB.

²Universidade Regional do Cariri, Departamento de Engenharia de Produção, Juazeiro do Norte, Ceará, Brasil.

³ Universidade Federal de Sergipe (UFS), Av. Marechal Rondon, s/n, Jardim Rosa Elze, 49100-000, São Cristovão-SE, Brasil.

⁴Instituto Federal do Piauí (IFPI), Pç. Liberdade, 1596, Centro, 64000-040, Teresina-PI, Brasil.

Abstract. *In the present work the transient laminar forced convection, hidrodinamically developed and thermally developing, it is studied in channels of flat plates and the circular duct for non-Newtonian fluids considering the power-low model. The Generalized Integral Transform Technique is used to eliminate the variables in which the spatial diffusion is prevalent, it follows a system of partial differential equations coupled, which is solved with approximations using the classical Laplace transform. The presented solution allows an accurate analysis for the problem, in all dominion, for different times.*

Keywords: *Thermal Entrance, Non-Newtonian fluids, Integral Transform.*