

## FUNÇÕES DE ESCOAMENTO PARA MATERIAIS POROSOS

Carlos Cezar de La Plata Ruiz, [delaplata Ruiz@uol.com.br](mailto:delaplata Ruiz@uol.com.br)<sup>1</sup>  
José Luís L. Silveira, [jluis@mecanica.ufrj.br](mailto:jluis@mecanica.ufrj.br)<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Deptº Eng. Mecânica, UERJ, Av. São Francisco Xavier, 524 Maracanã, Sala 5026 Bloco A.

<sup>2</sup>Deptº Eng. Mecânica, COPPE e POLI – UFRJ, Cidade Universitária, Centro de Tecnologia, Sala G-204.

**Resumo:** *Este trabalho revisita o artigo clássico de Doraivelu (1984) onde um modelo clássico de função de escoamento é apresentado utilizando o critério de Von Mises. Em seguida, são apresentadas várias maneiras de como os pesquisadores da atualidade tem manipulado essa forma clássica para adaptá-la a seus interesses no estudo da compactação de pós metálicos e cerâmicos.*

**Palavras-Chave:** *Material poroso, Deformação Plástica, Função de Escoamento.*

### 1. INTRODUÇÃO

A metalurgia do pó é um processo tecnológico de moldagem de material onde se obtém peças de contornos complexos, com ótimo acabamento, elevada tolerância dimensional e com um mínimo de perdas. Permite através da deformação de um compactado a obtenção de peças com propriedades que seriam praticamente impossíveis de serem obtidas, caso se utilizasse um material denso convencional.

Ultimamente, muitas peças na indústria automobilística, aeroespacial, naval, etc. são fabricadas por esse processo. Elementos tais como engrenagens, pinos, filtros, mancais e bielas dentre outros, são exemplos de peças que podem ser confeccionadas a partir dessa tecnologia, onde a deformação permanente se faz sempre presente.

Assim como ocorre no estudo da deformação plástica de materiais densos, é necessário conhecer como a combinação de tensões atuantes no corpo pode levá-lo ao escoamento e, por conseguinte, às deformações permanentes. Os efeitos da combinação de tensões podem ser modelados a partir dos chamados critérios de escoamento, onde o de Von Mises é o mais utilizado.

Uma maneira de simular ou modelar o comportamento dos materiais no processo de compactação de pós (principalmente no que diz respeito à deformação plástica) é através da análise da função de escoamento do material a ser compactado. Muitos autores e pesquisadores utilizam inúmeras fórmulas, muitas delas equivalentes, para descrever matematicamente o escoamento de um material poroso.

Com o intuito de facilitar a predição do comportamento e das propriedades mecânicas dos materiais porosos nos processos de compactação, este artigo apresenta um meio de se obter um modelo clássico de função de escoamento a partir da energia de deformação. Além disso, mostra como nos últimos anos os pesquisadores têm alterado este modelo clássico para estudar a compactação de pós de diversos materiais tais como ferro, cobre, alumínio, etc.

### 2. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os componentes do tensor de tensão podem ser expressos da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} \quad (1)$$

onde

$\sigma'_{ij}$  é a componente  $ij$  do tensor desviador de tensão;

$I_1$  é o primeiro invariante do tensor de tensão;

$\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

Supondo que o material seja elástico linear, isto é, pode ser modelado pela lei de Hooke, os componentes do tensor de deformação elástica podem ser expressos por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} I_1 \delta_{ij} \quad (2)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson.

Definindo a densidade relativa  $R$  como a razão entre a massa específica do material poroso e a massa específica do material denso, pode-se escrever empiricamente uma relação entre o coeficiente de Poisson e essa densidade relativa. Na maioria dos artigos consultados na literatura essa relação é expressa através da seguinte fórmula (Doraivelu, 1984):

$$\nu = 0.5R^n \quad (3)$$

onde  $n$  é uma constante que depende do material.

### 3. TRABALHO OU ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

O trabalho específico de deformação (trabalho por unidade de volume)  $u$  é dado por:

$$u = \frac{1}{2} T \cdot \varepsilon \quad (4)$$

onde  $T$  e  $\varepsilon$  são respectivamente os tensores de tensão e de deformação.

Substituindo as Eq. (1) e (2) na Eq. (4), pode-se concluir que:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{1-\nu}{3E} I_1^2 \right] \quad (5)$$

O trabalho específico de deformação  $u$  pode ser pensado como a soma de duas parcelas distintas de energia: a primeira  $u_d$ , responsável pela sua mudança de forma e a segunda  $u_v$ , responsável pela variação de volume do elemento. Pode-se demonstrar que a primeira parcela da Eq. (5) é  $u_d$  e a segunda  $u_v$ .

### 4. CRITÉRIOS DE ESCOAMENTO

#### 4.1. Critério Clássico de escoamento para materiais porosos

Diferentemente dos materiais densos em que somente a mudança forma causa o escoamento, nos materiais porosos tanto a mudança de forma quanto a mudança de volume promovem o escoamento do material. Portanto, no estudo da deformação de materiais porosos, ambas as parcelas de energia  $u_d$  e  $u_v$  são consideradas nos modelos matemáticos de escoamento.

De acordo com o critério de Von Mises, a energia específica de deformação  $u$  necessária para escoar um material poroso num estado geral de tensão é igual à energia específica de deformação para escoar o mesmo material quando submetido a apenas um esforço uniaxial.

Para um carregamento uniaxial e para materiais que podem modelados pela lei de Hooke,

$$u = \frac{1}{2E} \sigma^2 \quad (6)$$

e ao atingir o limite de escoamento  $Y$  do material poroso,

$$u = \frac{1}{2E} Y^2 \quad (7)$$

Igualando a Eq. (5) à Eq.(7), pode-se demonstrar que para materiais porosos vale a seguinte expressão:

$$AJ_2 + BI_1^2 = Y^2 \quad (8)$$

onde  $J_2$  é o segundo invariante do tensor desviador de tensão e

$$A = 2 + R^n \quad (9)$$

$$B = \frac{1-R^n}{3} \quad (10)$$

É possível demonstrar manipulando a Eq. (8) que:

$$\left[ 3J_2 + \left( \frac{1}{3} \frac{I_1}{f} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = Y \quad (11)$$

onde

$$\frac{1}{f} = 3 \left( \frac{1 - R^n}{R^n} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

isso mostra que  $f$  é uma função apenas da densidade relativa.

É importante salientar que o termo  $\frac{1}{f}$  representa o grau de influência do componente hidrostático  $\frac{I_1}{3}$  no início do escoamento dos corpos porosos. Note que a influência do componente hidrostático  $\frac{I_1}{3}$  é muito grande no início da densificação ( $R$  pequeno) e essa influência praticamente se anula à medida que a densidade relativa se aproxima da unidade. E isso está de acordo com o comportamento do material denso onde  $R = 1$ , indicando que o componente hidrostático não contribui para o escoamento desse material. Em suma, à medida que o material poroso se densifica, menor se torna a influência do componente hidrostático no escoamento.

Costuma-se relacionar o limite de escoamento  $Y$  do material poroso com o limite de escoamento  $Y_0$  do material de base através de uma expressão da forma:

$$\delta = \frac{Y^2}{Y_0^2} \quad (13)$$

Portanto, é comum se exprimir a forma clássica do critério de escoamento de materiais porosos através de:

$$AJ_2 + BI_1^2 = Y^2 = \delta Y_0^2 \quad (14)$$

#### 4.2. Critério de Escoamento segundo Doiravelu (1984)

Doraivelu utiliza diretamente a forma clássica da função de escoamento e para determinar a razão  $\delta$  aplica:

$$\delta = 2R^2 - 1 \quad (15)$$

Com base na expressão anterior pode-se concluir que a resistência do material poroso tende a zero à medida que a densidade relativa  $R$  e aproxima de 0,7. Muitos autores chamam de crítica a densidade na qual a resistência do material poroso se anula. Para encontrar a densidade crítica basta igualar a zero a razão  $\delta$  entre os quadrados dos limites de escoamento dos materiais. Assim, com base na fórmula anterior, a densidade crítica  $R_c = 0,707$  ou  $R_c^2 = 0,5$ .

Para relacionar o coeficiente de Poisson com a densidade relativa, Doraivelu (1984) adota a seguinte expressão:

$$\nu = 0.5R^n \quad (16)$$

e toma  $n = 2$  como o expoente de  $R$ .

Assim, para Doraivelu:

$$\nu = 0.5R^2 \quad (17)$$

#### 4.3. Critério de Escoamento Segundo Park (1995)

Park também utiliza a forma clássica da função de escoamento na análise da compactação de pó de ferro e de ligas Fe-36Ni e adota a seguinte expressão para encontrar a razão entre os quadrados dos limites de escoamento:

$$\delta = \frac{1.44R^5}{2.44 - R} \quad (18)$$

Sugere usar a seguinte fórmula para se exprimir o coeficiente de Poisson:

$$\nu = 0.5R^n \quad (19)$$

Park diz que  $n$  é um expoente que depende do material e pode ser obtido por um simples teste de compressão. Para pó de ferro  $n = 1,5$  e  $n = 1,7$  para pó de Fe-36Ni.

#### 4.4. Critério de Escoamento segundo Pavanachand et al. (1997)

Pavanachand et al. (1997) usa o seguinte critério para definir o escoamento de materiais confeccionados a partir de pó de cobre, de alumínio e de ferro:

$$Y = \left[ 3J_2 + \left( \frac{1}{3} \frac{I_1}{f} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

Como já visto, a expressão anterior é redutível ao critério clássico de escoamento. Pavanachand et al. (1997) adota:

$$\frac{1}{f} = a(1 - R)^m \quad (21)$$

como se pode ver  $f$  é uma função apenas da densidade relativa.

Pavanachand et al. (1997) adota ainda:

$$\delta = R^{2n} \quad (22)$$

Convém que se ressalte que as expressões usadas neste item são válidas apenas para densidades relativas entre 0,6 e 1,0. E para pó de cobre, de alumínio ou de ferro  $a = 2,49$ ,  $m = 0,514$  e  $n = 2,5$ .

#### 4.5. Critério de escoamento segundo Lippmann et al. (1997)

Analisando cuidadosamente a expressão para o critério de escoamento adotado por Lippmann et al. (1997) na densificação de pó de ferro, pode-se concluir que na verdade ele utiliza indiretamente o critério clássico.

#### 4.6. Critério de escoamento segundo Kim et al. (1998)

Kim et al. (1998) apresenta a seguinte expressão para estabelecer um critério de escoamento de materiais porosos:

$$(2 + R^2)J_2 + (1 - R^2)\frac{I_1^2}{3} = \delta Y_0^2 \quad (23)$$

Não é difícil mostrar que o critério de Kim é idêntico ao clássico. Para isso basta recorrer as Eq.(9) e (10).

Kim et al. (1998) ressalta o fato de que para baixas densidades relativas a resistência do material poroso tende a se anular. Assim, abaixo de uma densidade relativa crítica  $R_c$  o material não oferece resistência alguma às cargas aplicadas. Acima de  $R_c$  passa-se a observar o ganho de resistência do material poroso.

#### 4.7. Critério de escoamento segundo Alves et al. (2006)

Alves et al. (2006) afirma que os critérios tradicionais falham em não explicitar a influência da densidade relativa inicial  $R_i$  no endurecimento geométrico do material de base como também nos valores assumidos do coeficiente de Poisson. Diz ainda que *algumas funções de escoamento não podem ser usadas quando a densidade relativa for muito baixa*.

De qualquer forma, a equação básica adotada por Alves et al. (2006) na compactação de pó de cobre é idêntica à clássica. O que difere a abordagem de Alves em relação à dos demais pesquisadores é que ele exprime o coeficiente de Poisson não só em função da densidade relativa atual  $R$  como também da inicial  $R_i$ :

$$\nu = 0.5R^d \quad (24)$$

onde

$$d = 4.15R_i - 1.23 \quad (25)$$

Quanto à razão  $\delta$  Alves et al. (2006) adota a seguinte expressão:

$$\delta = \frac{0.343R_i^{2.988} \cdot R}{0.343R_i^{2.988} + (1-R)} \quad (26)$$

#### 4.8. Critério de escoamento segundo Kang et al. (2007)

Kang et al. (2007) adotam como expressão para definir um critério de escoamento na compactação de pó de ferro a expressão:

$$F = \left( \frac{\bar{Y}}{Y_0} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_m}{Y_0 f} \right)^2 - R^{2n} = 0 \quad (27)$$

onde:

$\bar{Y}$  é a tensão efetiva no material poroso;  
 $f$  é uma função da densidade relativa  $f = f(R)$ ;  
 $n$  é uma constante do material;

$$\bar{Y} = \sqrt{3J_2} \quad (28)$$

Substituindo a Eq. (28) na Eq. (27) encontra-se:

$$3J_2 + \frac{1}{9f^2} I_1^2 = R^{2n} Y_0^2 \quad (29)$$

Note que para Kang et al. (2007) a razão  $\delta$  entre os quadrados dos limites de escoamento é dada por:

$$\delta = R^{2n} \quad (30)$$

assim,

$$3J_2 + \left( \frac{1}{3} \frac{I_1}{f} \right)^2 = Y^2 \quad (31)$$

Como já visto, a expressão anterior se reduz a fórmula clássica da função de escoamento de materiais porosos.

#### 4.9. Critério de escoamento segundo Lee et al. (2008)

Lee et al. (2008) adota a seguinte função de escoamento no estudo da densificação de pó de titânio nanocristalino:

$$F = \left[ \left( \frac{\sigma_m}{f(R)} \right)^2 + \bar{Y}^2 \right]^{\frac{1}{2}} - k(R) \quad (32)$$

onde  $f(R)$  e  $k(R)$  são funções da densidade relativa, sendo:

$$f(R) = \frac{1}{a \cdot (R_f - R)^m} \quad (33)$$

Para n -TiO<sub>2</sub> :

$$k(R) = 0.19853 \cdot \text{Exp}(13.347R)(0.690 - R) \quad (34)$$

com  $a = 4,012$  ,  $R_f = 0,690$  e  $m = 0,639$ .

É fácil ver que partindo-se da Eq. (32) pode-se chegar a:

$$F = \left[ 3J_2 + \left( \frac{1}{3} \frac{I_1}{f} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - k(R) \quad (35)$$

Donde se conclui que:

$$3J_2 + \left( \frac{1}{3} \frac{I_1}{f} \right)^2 = [F + k(R)]^2 \quad (36)$$

Como visto, a expressão anterior também se reduz a fórmula clássica da função de escoamento de materiais porosos.

#### 4.10. Critério de escoamento segundo Monteiro et al. (2004)

Monteiro et al. (2004) parte de uma forma clássica para estudar o escoamento de materiais porosos:

$$F(I_1, J_2) = AJ_2 + BI_1^2 \quad (37)$$

Para um carregamento uniaxial, onde  $\sigma_{11} = Y$  e os demais componentes de tensão são nulos,

$$F = \left( \frac{A}{3} + B \right) Y^2 \quad (38)$$

Assim,

$$F = AJ_2 + BI_1^2 = \left( \frac{A}{3} + B \right) Y^2 \quad (39)$$

Monteiro et al. (2004) define pressão de escoamento como a pressão hidrostática  $P$  que leva o material poroso a se escoar. Fazendo  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = P$  e  $\tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$ , vem:

$$F = 9B \cdot P^2 = \left( \frac{A}{3} + B \right) Y^2 \quad (40)$$

Donde se pode obter uma relação entre os coeficientes  $A$  e  $B$ :

$$A = 3 \left( \frac{9P^2}{Y^2} - 1 \right) B \quad (41)$$

Assim, a Eq. (39) se torna:

$$\left( 3 - \frac{Y^2}{3P^2} \right) J_2 + \frac{Y^2}{9P^2} I_1^2 = Y^2 \quad (42)$$

Neste caso,

$$A = \left( 3 - \frac{Y^2}{3P^2} \right) \quad (43)$$

$$B = \frac{Y^2}{9P^2} \quad (44)$$

$$A = 3(1 - B) \quad (45)$$

Monteiro et al. (2004) adota:

$$\delta = \frac{R - R_i}{1 - R_i} \quad (46)$$

e faz:

$$P^2 = \beta Y^2 \quad (47)$$

onde  $\beta^{-1}$  é uma função linear de  $R$  e

$$\beta = k \left( \frac{1 - R_i}{1 - R} \right) \quad (48)$$

A constante  $k$  pode ser obtida experimentalmente. Monteiro et al. (2004) adota  $k = 1$ .  
Combinando as Eq. (42), (13) e (47) obtém-se finalmente a fórmula proposta por Monteiro:

$$\left( 3 - \frac{1}{3\beta} \right) J_2 + \frac{1}{9\beta} I_1^2 = \delta Y_0^2 \quad (49)$$

## 5. COMPARAÇÕES

### 5.1. Comparações entre as expressões da razão $\delta$

Doraivelu adota  $\delta = 2R^2 - 1$  (50)

Park adota  $\delta = \frac{1.44R^5}{2.44 - R}$  (51)

Pavanachand adota  $\delta = R^{2n}$  (52)

Monteiro adota  $\delta = \frac{R - R_i}{1 - R_i}$  (53)

O gráfico adiante permite comparar as curvas definidas por cada uma das expressões da razão  $\delta$  em função da densidade relativa.

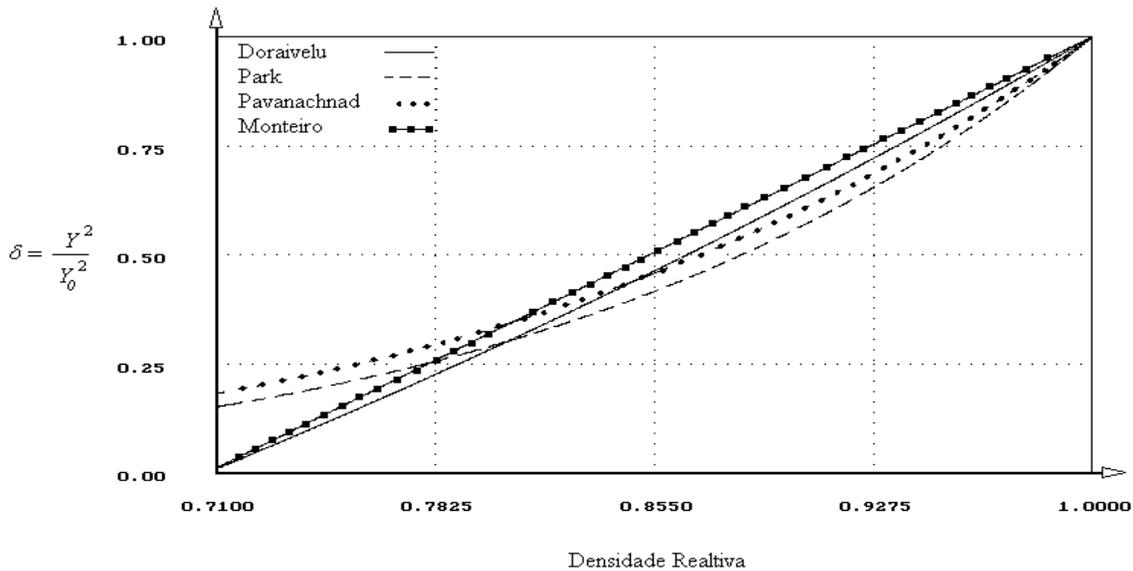


Figura 1. Comparação entre os valores de  $\delta$

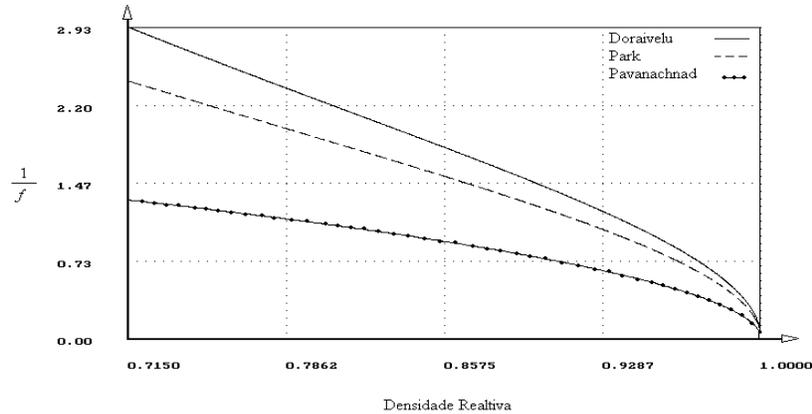
### 5.2. Comparações entre as expressões da relação $1/f$

Doraivelu adota  $n = 2$ , neste caso, 
$$\frac{1}{f} = 3 \left( \frac{1-R^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (54)$$

Park adota  $n = 1,5$ , portanto, 
$$\frac{1}{f} = 3 \left( \frac{1-R^{1.5}}{R^{1.5}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (55)$$

Pavanachand adota 
$$\frac{1}{f} = 2.49(1-R)^{0.514} \quad (56)$$

O gráfico comparativo entre essas três expressões de  $1/f$  são mostradas na Figura 2.

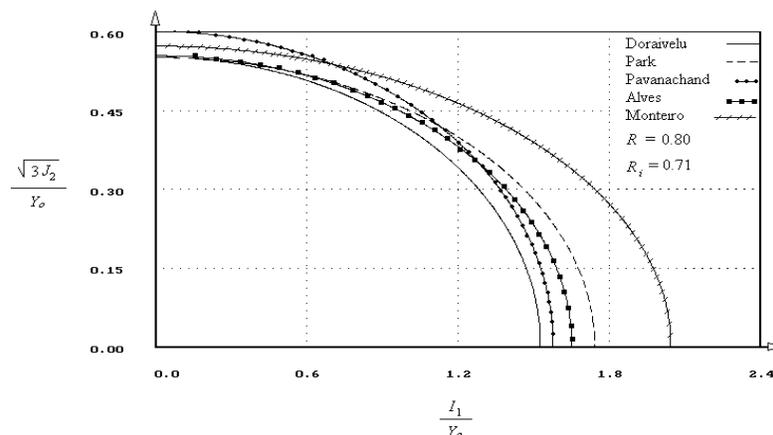


**Figura 2. Comparação entre os valores de  $1/f$**

Como o termo  $1/f$  indica a importância do componente hidrostático no escoamento dos materiais, nota-se que, o critério de Doraivelu é o que mais dá peso a essa influência, seguido pelo critério de Park e, por último, o de Pavanachand.

### 5.3. Comparações entre as funções de escoamento

A seguir são apresentadas algumas comparações entre quatro funções de escoamento (Figuras 3 e 4). Essas funções geram superfícies elipsoidais no espaço  $\frac{I_1}{Y_0} \times \sqrt{\frac{3J_2}{Y_0}}$ . Pode-se ver que de todas as superfícies de escoamento analisadas, a de Doraivelu é a menor, indicando que um material que assim se comporte, o escoamento se inicia com um nível de tensões mais baixo. Para  $R = 0,80$  a maior das superfícies é a de Monteiro. Porém, para valores mais baixos de  $R$ , por exemplo,  $R = 0,73$ , a maior delas passa a ser a de Pavanachand.



**Figura 3. Comparação entre as funções de escoamento para  $R_0 = 0,80$ .**

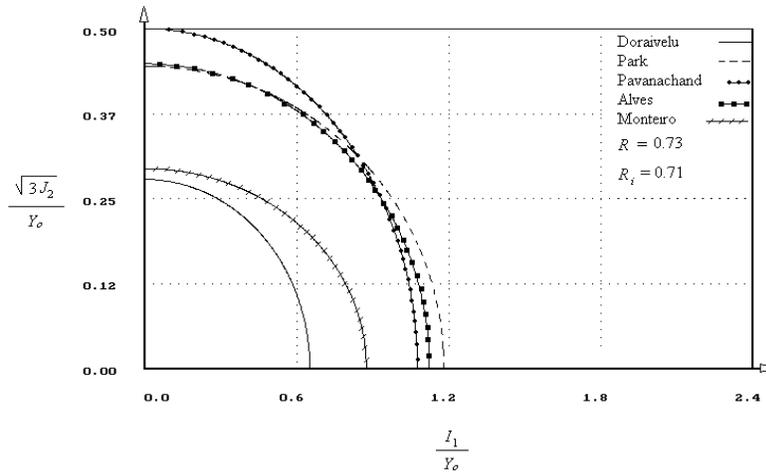


Figura 4. Comparação entre as funções de escoamento para  $R_0 = 0,73$ .

## 6. CONCLUSÃO

Uma análise comparativa de alguns critérios de escoamento para materiais porosos é realizada partir de uma forma clássica para a função de escoamento de materiais porosos:  $AJ_2 + BI_1^2 = Y^2$ . Para os materiais porosos  $A$  e  $B$  são expressos em função da densidade relativa ou do coeficiente de Poisson plástico. Alguns pesquisadores utilizam diretamente a forma clássica e outros aplicam modelos que podem ser reduzidos à forma clássica se algumas substituições de variáveis forem feitas nas expressões adotadas por eles. Dos critérios estudados o de Doraivelu (1984) é o que apresenta a menor superfície de escoamento, indicando que se um material se comportar como previsto por Doraivelu, o escoamento será iniciado como um nível mais baixo de tensão. O escoamento dos materiais porosos depende tanto do componente hidrostático quanto do desviador de tensão. No início da densificação, a importância do componente hidrostático é muito grande no estabelecimento do escoamento, mas à medida que a densidade relativa se aproxima da unidade a influência do componente hidrostático praticamente desaparece. Isso também está de acordo com o comportamento dos materiais densos (densidade relativa unitária), pois o escoamento destes não depende do componente hidrostático.

## 7. REFERÊNCIAS

- ALVES, M. M.; MARTINS, P. A. F.; RODRIGUES, J. M., C. "A New Yield Function for Porous Materials". Journal of Materials Processing Technology, v.179, p.36-43, 2006.
- DORAIVELU, S. M. "A New Yield Function for Compressible P/M Materials". In International Journal Mechanical Science, v. 26, n.9/10, p.527-535, 1984.
- HUA, L.; QIN, X.; MAO, H.; ZHAO Y. "Plastic Deformation and Yield Criterion for Compressible Sintered Powder Materials". Journal of Materials Processing Technology, v.180, p.174-178, 2006.
- KANG, C.S.; LEE,S.C.; KIM, K.T. "Densification Behavior of Iron Powder During Stepped Compaction". Materials Science and Engineering, v.452-453, p.359-366, 2007.
- KIM, H. S.; WON, C.W.; CHUN, B. S. "Plastic Deformation of Porous Metal With an initial inhomogeneous Density Distribution". Journal of Materials Processing Technology, v.74, p.213-217, 1998.
- LEE, S. C.; KIM, K. T. "Densification Behavior of Nanocrystalline Titania Powder under Cold Compaction". Powder Technology, v.186, p.99-106, 2008.
- LIPPMANN, H.; MANNL, V.; BONTCHEVA, R.; LANKOV, R.; BEER, O. "Numerical Simulation of Density Distribution During Compaction of Iron Powders". Archive of Applied Mechanics, v.67, p.191-199, 1997.
- MONTEIRO, M. M.; ROEHL, D.; SILVEIRA, J. L. "A Comparative Analysis of Compaction Densification Behavior of Metal Powder in Close-Die", 2004.
- PARK, J. J. "Constitutive Relations to Predict Plastic Deformations of Porous Metals in Compaction". In International Journal Mechanical Science, v.37, n. 7 p. 709-719, 1995.
- PAVANACHAND; KRISHNAKUMAR, CH. "Yield Function Parametres for Metal Powder Compaction Based on Unit Cell Studies". Acta Mater, v.45, n.4, p. 1425-144, 1997.

## 8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

## YIELD FUNCTIONS FOR POROUS MATERIALS

Carlos Cezar de la Plata Ruiz, [delaplata Ruiz@uol.com.br](mailto:delaplata Ruiz@uol.com.br)<sup>1</sup>  
José Luís I. Silveira, [jluis@mecanica.ufrj.br](mailto:jluis@mecanica.ufrj.br)<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Deptº Eng. Mecânica, UERJ, Av. São Francisco Xavier, 524 Maracanã, Sala 5026 Bloco A.

<sup>2</sup>Deptº Eng. Mecânica, COPPE e POLI – UFRJ, Cidade Universitária, Centro de Tecnologia, Sala G-204.

**Summary:** *This work revisits the classic article from Doraivelu (1984), where a classic model yield function is presented using the Von Mises criterion. Following that, are presented several ways on how researchers today have handled this classical forms to adequate to their interests in the study of metal powders and ceramics compaction.*

**Keywords:** *Porous Materials, Plastic Deformation, Yield Function.*