

PLANEJAMENTO DE EXPERIMENTOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE  
PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS DE MATERIAIS SEMITRASPARENTES

Olivier Jacques Marie Wellele

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM  
ENGENHARIA MECÂNICA.

Aprovada por:

---

Prof. Helcio Rangel Barreto Orlande, Ph.D.

---

Dr. Nerbe José Ruperti Jr., Ph.D.

---

Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D.

---

Prof. Marcelo José Colaço, D.Sc.

---

Prof<sup>a</sup>. Liliane Basso Barichello, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2007

WELLELE, OLIVIER JACQUES MARIE

Planejamento de Experimentos para  
Identificação de Propriedades Thermo-  
físicas de Materiais Semitransparentes

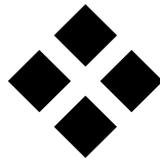
[Rio de Janeiro] 2007

XXIX, 279 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,  
Engenharia Mecânica, 2007)

Tese - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Problemas acoplados
2. Problemas inversos
3. Condução-Radiação
4. Métodos híbridos

I. COPPE/UFRJ II. Título ( série )



*Dedico este trabalho aos meus pais  
e ao Prof. Helcio R. B. Orlande*

# Agradecimentos

- Aos meus pais, Jacques e Annette Wellele, por todos os sacrifícios que fizeram durante a minha vida, por terem me dado todas as condições de estudar e chegar até o Doutorado, e por me apoiarem em todas as vezes que precisei.
- À minha família, pelo imenso carinho e por terem dado suporte aos meus sonhos.
- À minha amiga e companheira, Alicia Teles de Gois, pela forma que compartilhou a vida comigo no Rio de Janeiro, e por ter estado ao meu lado a cada momento.
- Aos meus orientadores, Prof. Helcio Rangel Barreto Orlande e Dr. Nerbe José Ruperti Jr., sem quem este projeto de Doutorado no Brasil nunca podia ter acontecido. Agradeço de todo o coração por terem confiado em mim e por terem me orientado com cuidado ao longo destes 4 anos.
- À Prof<sup>a</sup>. Agnès Delmas, que me orienta desde a Tese de Mestrado, pela dedicação e por ter me oferecido a oportunidade de estudar e trabalhar com experimentos de alta precisão.
- Ao Prof. Marcelo José Colaço pela troca de informações a respeito de métodos inversos, e por me ajudar a desenvolver programas que permitiram a solução deste trabalho.
- Ao Prof. Jean François Sacadura por ter me transmitido o gosto pela pesquisa em radiação térmica.
- Ao Prof. Renato Machado Cotta, pela simpatia e pelo apoio.
- À CAPES, pelo suporte financeiro de um estrangeiro no Brasil, através da bolsa de Doutorado.
- Ao meu amigo Dr. Fabiano Cordeiro Cavalcanti por ter me ajudado nos primeiros passos do projeto de Doutorado no Brasil.
- Aos amigos Pedro Pacheco, Rafael Brod-Storch e Simone Guigon pelas insubstituíveis horas de conversas engraçadas e descontraídas.

- Aos pesquisadores e amigos do Laboratório de Transmissão e Tecnologia do Calor e do Laboratório de Máquinas Térmicas por todo o companheirismo e pela boa recepção ao chegar ao Brasil.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

PLANEJAMENTO DE EXPERIMENTOS PARA IDENTIFICAÇÃO DE  
PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS DE MATERIAIS SEMITRASPARENTES

Olivier Jacques Marie Wellele

Março/2007

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande

Nerbe José Ruperti Jr.

Programa: Engenharia Mecânica.

O objetivo deste trabalho é propor uma metodologia para a identificação das propriedades termofísicas de materiais semitransparentes a altas temperaturas. A metodologia consiste em planejar dois experimentos para a estimativa de parâmetros condutivos e radiativos, respectivamente, através da solução de problemas inversos distintos. A transferência de calor na amostra de material é modelada através de um problema com acoplamento de condução e radiação tri-dimensional. Ambos os problemas de condução e de radiação são resolvidos pelo método dos volumes finitos, para a determinação dos campos internos de temperatura e de intensidade radiativa. Os coeficientes de sensibilidade e o determinante da matriz de informação são analisados, a fim de formular um projeto ótimo e de estimar as propriedades desconhecidas com variância mínima. Finalmente, uma combinação em duas etapas distintas de um método Híbrido para a minimização da norma de mínimos quadrados, e do método de Gauss para a minimização da função objetivo maximum a posteriori, é proposta para estimar os parâmetros de maneira robusta. Alguns casos-teste são propostos para verificar a aplicabilidade da presente metodologia a partir do uso de medidas simuladas de temperatura superficial e de fator de emissão espectral e direcional. As simulações mostram a possibilidade de estimar as propriedades condutivas de meios semitransparentes a partir das medições de temperatura e a impossibilidade de estimar as propriedades radiativas a partir das medições de emissão radiativa direcional.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

DESIGN OF EXPERIMENTS FOR THE IDENTIFICATION OF  
THERMOPHYSICAL PROPERTIES OF SEMI-TRANSPARENT MATERIALS

Olivier Jacques Marie Wellele

March/2007

Advisors: Helcio Rangel Barreto Orlande

Nerbe José Ruperti Jr.

Department: Mechanical Engineering

The aim of this work is to propose a methodology for the identification of thermophysical properties of semi-transparent materials at high temperatures. This methodology consists in designing two experiments for the estimation of thermal and radiation properties, by solving two different inverse problems. Heat transfer within the sample is modeled with a coupled conduction/radiation three-dimensional problem. Both conduction and radiation problems are solved with the finite-volume method, for the computation of the internal temperature and intensity fields. The sensitivity coefficients and the determinant of the information matrix are examined in order to design optimum experiments and to obtain estimates for the unknown properties with minimum variances. Finally, a combination of a Hybrid method of minimization of the least-squares norm and the Gauss method of minimization of the maximum a posteriori objective function, in two steps, is used to robustly estimate the parameters. The feasibility of the proposed methodology is tested by using simulated measurements of surface temperature and emissive factor. Results show the possibility to estimate thermal properties from temperature measurements. They also show the impossibility of estimating radiation properties from only high temperature emission measurements.

Résumé de Thèse présentée à la COPPE/UFRJ en vue de l'obtention du titre de Docteur  
en Sciences (D.Sc)

CONCEPTION D'EXPERIENCES POUR L'IDENTIFICATION DE PROPRIETES  
THERMOPHYSIQUES DE MATERIAUX SEMI-TRANSPARENTS

Olivier Jacques Marie Wellele

Mars/2007

Encadrants: Helcio Rangel Barreto Orlande

Nerbe José Ruperti Jr.

Département: Génie Mécanique

Il s'agit dans ce travail de concevoir une méthodologie expérimentale pour identifier les propriétés thermophysiques de matériaux semi-transparents à haute température. Cette méthodologie consiste à projeter deux expériences permettant respectivement l'estimation des paramètres diffusifs et radiatifs, au travers de la résolution de deux problèmes inverses. Deux problèmes de couplage conduction et rayonnement tridimensionnels servent à modéliser les transferts thermiques dans l'échantillon. La solution de ces problèmes, obtenue par la méthode des volumes finis, permet la détermination des champs de température et de luminance. Les coefficients de sensibilité et le conditionnement de la matrice d'information sont étudiés afin d'évaluer les conditions expérimentales favorables à l'obtention de résultats avec une variance minimum. Finalement, une méthode inverse robuste, combinant successivement une méthode hybride stochastique/déterministe associée à la minimisation de la norme des moindres carrés et la méthode de Gauss associée à la fonction maximum a posteriori, est proposée de manière à estimer les paramètres de manière stable. Divers cas test sont présentés afin de valider la méthodologie avec des mesures simulées de température en surface et de facteur d'émission spectral directionnel. Les tests proposés montrent la possibilité d'estimer les paramètres diffusifs de matériaux semi-transparents à partir de mesures de température. En revanche, ils montrent l'impossibilité d'identifier des propriétés radiatives en utilisant des mesures d'émission à haute température.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>xv</b>
<b>Lista de Tabelas</b> .....	<b>xxv</b>
<b>Lista de Símbolos</b> .....	<b>xxvii</b>
<b>1 Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>2 Revisão Bibliográfica</b> .....	<b>4</b>
2.1 Técnicas de Solução para Problemas de Acoplamento Condução- Radiação .....	4
2.2 Predição das Propriedades Radiativas .....	8
2.3 Técnicas de Solução para Problemas Inversos .....	10
2.3.1 Métodos de minimização .....	10
2.3.2 Análise de coeficientes de sensibilidade / Análise estatística dos resultados .....	12
2.3.3 Otimização de experimento .....	12
2.4 Técnicas Experimentais .....	13
2.4.1 Identificação simultânea de propriedades termofísicas e radiativas .....	13
2.4.2 Identificação de propriedades termofísicas .....	15
2.4.3 Identificação de propriedades radiativas .....	17
2.4.4 Perspectivas experimentais para a identificação de propriedades térmicas .....	18
<b>3 Problemas Físicos e Formulações Matemáticas</b> .....	<b>19</b>
3.1 Descrição dos Experimentos .....	19
3.1.1 Experimento 1 .....	19
3.1.2 Experimento 2 .....	23

3.2	Acoplamento Condução-Radiação .....	27
3.2.1	Equação de transferência radiativa .....	27
3.2.2	Equação de condução do calor .....	30
3.2.3	Condições de contorno radiativas .....	31
3.2.3.1	Fronteira semitransparente com mudança de índice de refração .....	32
3.2.3.2	Fronteira opaca: condição de reflexão e emissão difusa isotrópica .....	35
3.2.3.3	Plano de simetria: condição de reflexão total especular .....	36
3.2.4	Condições de contorno para a equação de conservação da energia .....	37
3.2.4.1	Condições de contorno para o problema 2 .....	38
3.2.4.2	Condições de contorno para o problema 1 .....	39
3.2.4.3	Plano de simetria: condição térmica de 2º tipo .....	42
3.2.5	Predição das propriedades radiativas .....	42
3.2.5.1	Propriedades radiativas de um MST homogêneo .....	42
3.2.5.2	Propriedades radiativas de um MST poroso .....	44
3.3	Formulação Matemática do Problema 1 .....	54
3.3.1	Formulação dimensional .....	55
3.3.2	Escolha das variáveis adimensionais .....	59
3.3.3	Formulação adimensional .....	61
3.4	Formulação Matemática do Problema 2 .....	63
3.4.1	Formulação dimensional .....	63
3.4.2	Escolha das variáveis adimensionais .....	66
3.4.3	Formulação adimensional .....	66
<b>4</b>	<b>Método de Solução do Problema Direto .....</b>	<b>69</b>
4.1	Problema de Radiação .....	70
4.2	Problema de Condução .....	79
<b>5</b>	<b>Métodos de Solução do Problema Inverso .....</b>	<b>84</b>
5.1	Métodos de Gradiente .....	86
5.1.1	Método de Levenberg-Marquardt .....	86

5.1.2	Método BFGS .....	90
5.1.3	Método de Gauss com função objetivo MAP .....	92
5.2	Métodos Estocásticos .....	94
5.2.1	Método de Evolução Diferencial .....	95
5.2.2	Método Enxame de Partículas .....	96
5.3	Combinação de Métodos .....	97
5.3.1	Métodos híbridos .....	97
5.3.2	Gradiente de baixa resolução .....	98
5.4	Definição dos Coeficientes de Sensibilidade .....	100
5.5	Análise Estatística dos Resultados .....	101
5.6	Projeto Ótimo .....	102
<b>6</b>	<b>Resultados e Discussões .....</b>	<b>105</b>
6.1	Validação do Problema Direto .....	105
6.1.1	Problemas de radiação em MST .....	106
6.1.2	Problemas de condução do calor .....	111
6.1.3	Problemas acoplados de condução–radiação .....	114
6.2	Simulação Numérica do Fator de Emissão e do Campo de Temperatura .....	121
6.2.1	Predição do fator de emissão espectral e direcional .....	121
6.2.2	Influência do campo de temperatura interno não-uniforme sobre o fator de emissão espectral .....	129
6.2.2.1	Simulação do campo de temperatura e de fator de emissão para uma amostra de alumina Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> de 1mm de espessura .....	130
6.2.2.2	Simulação do campo de temperatura e de fator de emissão para uma amostra de alumina Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> de 2mm de espessura .....	135
6.2.2.3	Simulação do campo de temperatura e de fator de emissão para uma amostra de alumina Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> de 4mm de espessura .....	136
6.3	Análise dos Coeficientes de Sensibilidade .....	143
6.3.1	Coeficientes de sensibilidade para o experimento 1 com fluxo laser de curta duração .....	143
6.3.1.1	Coeficientes de sensibilidades normalizados para o vidro .....	146
6.3.1.2	Coeficientes de sensibilidades normalizados para a alumina .....	148

6.3.1.3	Coeficientes de sensibilidades normalizados para o compósito de carbono .....	150
6.3.2	Coeficientes de sensibilidade para o experimento 1 com fluxo laser contínuo .....	152
6.3.2.1	Coeficientes de sensibilidades normalizados para o vidro .....	153
6.3.2.2	Coeficientes de sensibilidades normalizados para a alumina .....	155
6.3.2.3	Coeficientes de sensibilidades normalizados para o compósito de carbono .....	157
6.3.3	Coeficientes de sensibilidade para o experimento 2 .....	159
6.3.3.1	Coeficientes de sensibilidades normalizados para o vidro .....	160
6.3.3.2	Coeficientes de sensibilidades normalizados para a alumina .....	162
6.4	Otimização do Experimento .....	166
6.4.1	Localização dos sensores .....	166
6.4.2	Determinação do tempo de aquecimento e do tempo final do experimento .....	171
6.5	Estimativa dos Parâmetros Termofísicos .....	177
6.5.1	Comparação de métodos .....	177
6.5.2	Validação do problema inverso .....	185
6.5.2.1	Influência do material .....	185
6.5.2.2	Influência da repetição de um experimento .....	189
6.5.3	Resultados do problema inverso .....	194
6.5.3.1	Identificação das propriedades termofísicas do vidro .....	194
6.5.3.2	Identificação das propriedades termofísicas da alumina ...	196
6.5.3.3	Proposta e sugestão para a evolução da técnica 8 .....	198
<b>7</b>	<b>Conclusão e Proposta de Continuação do Trabalho .....</b>	<b>200</b>
7.1	Conclusão .....	200
7.1.1	Conclusões relativas ao experimento 1 .....	200
7.1.2	Conclusões relativas ao experimento 2 .....	201
7.2	Proposta da Continuação do Trabalho .....	202

<b>Referências Bibliográficas</b> .....	<b>212</b>
<b>A Solução Analítica do Problema Direto de Condução</b> .....	<b>222</b>
A.1 Formulação Adimensional e Solução Analítica do Problema Direto ..	222
A.2 Solução Analítica para Fluxo de Distribuição Uniforme .....	224
A.3 Solução Analítica para Fluxo de Distribuição Gaussiana .....	225
<b>B Résumé</b> .....	<b>227</b>
B.1 Introduction .....	227
B.2 Brève Révision Bibliographique .....	228
B.2.1 Technique d'estimation de paramètres liés à la diffusion thermique .....	228
B.2.2 Technique d'estimation de paramètres radiatifs .....	229
B.2.3 Articulation du document .....	229
B.3 Description des Projets Expérimentaux .....	230
B.3.1 Projet expérimental pour l'identification des propriétés liées à la diffusion thermique .....	230
B.3.2 Dispositif expérimental pour l'identification des propriétés radiatives .....	232
B.4 Modèles Directes .....	233
B.4.1 Formulation du problème direct 1 .....	234
B.4.2 Formulation du problème direct 2 .....	235
B.4.3 Solution des problèmes directs 1 et 2 .....	236
B.5 Problème Inverse et Techniques de Minimisation .....	237
B.5.1 Techniques de minimisation .....	237
B.5.2 Modèles directs approchés : utilisation d'une méthode inverse en deux étapes .....	240
B.6 Résultats et Interprétations .....	242
B.6.1 Analyse des coefficients de sensibilité .....	244
B.6.2 Optimisation du problème 1 .....	248
B.6.3 Choix de la technique de minimisation .....	251
B.6.4 Résultats du problème inverse .....	255

B.7 Conclusion et Perspectives .....	256
<b>C Simulation du Facteur d'Emission et du Champ de Température .....</b>	<b>258</b>
C.1 Prédiction du Facteur d'Emission Spectrale Directionnel .....	258
C.2 Influence du Champ de Température Interne Non-Uniforme sur le Facteur d'Emission .....	266
C.2.1 Simulation du champ de température interne et du facteur d'émission d'un échantillon d'alumine Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> de 1mm d'épaisseur	267
C.2.1.1 Influence du gradient interne de température .....	267
C.2.1.2 Influence du déséquilibre de flux .....	269
C.2.2 Simulation du champ de température interne et du facteur d'émission d'un échantillon d'alumine Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> de 2mm d'épaisseur	269
C.2.2.1 Influence du gradient interne de température .....	272
C.2.2.2 Influence du déséquilibre de flux .....	272
C.2.3 Simulation du champ de température interne et du facteur d'émission d'un échantillon d'alumine Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> de 4mm d'épaisseur	275
C.2.3.1 Influence du gradient interne de température .....	275
C.2.3.2 Influence du déséquilibre de flux .....	278

# Lista de Figuras

3.1.1	Bancada experimental prevista para a realização de medidas de temperatura em materiais ortotrópicos a altas temperaturas .....	21
3.1.2	Representação do problema matemático 1 em coordenadas cartesianas	22
3.1.3	Relação entre o domínio físico e o domínio computacional em coordenadas cartesianas .....	22
3.1.4	Bancada experimental de medida de fator de emissão de materiais a altas temperaturas .....	25
3.1.5	Representação do problema matemático 2 em coordenadas cartesianas	26
3.2.1	Representação da fronteira semitransparente .....	33
3.2.2	Representação de uma superfície opaca com reflexão e emissão difusiva isotrópica .....	35
3.2.3	Representação do plano de simetria .....	36
3.2.4	Condição de contorno de 3º tipo. Transferência de calor por condução, convecção e radiação combinada .....	37
3.2.5	Evolução espectral do índice complexo de refração de um monocristal de safira a altas temperaturas (2007 K) .....	44
3.2.6	Interação entre uma onda eletromagnética e uma partícula esférica ...	44
3.2.7	Domínio de validade dos modelos de espalhamento dependente e independente .....	49
3.2.8	Predição das propriedades radiativas da alumina pela teoria de Mie ...	50
3.2.9	Predição da função de fase da alumina para $\lambda = 2 \mu\text{m}$ .....	51
3.2.10	Predição da função de fase da alumina para $\lambda = 6 \mu\text{m}$ .....	52
3.2.11	Predição da função de fase da alumina para $\lambda = 10 \mu\text{m}$ .....	53
3.3.1	Caracterização da direção $\Omega$ no sistema de coordenadas cartesianas ..	56
3.3.2	Representação do problema matemático 1 em coordenadas cartesianas	56
3.3.3	Representação do problema matemático 2 em coordenadas cartesianas	65
4.1.1	Volume de controle específico ao esquema FVM .....	70

4.1.2	Integração do co-seno diretor de uma direção de controle com a normal a uma superfície do volume de controle .....	71
4.1.3	Utilização do contorno para iniciar a progressão e a determinação do campo radiativo .....	74
4.1.4	Discretização do domínio angular em coordenadas cartesianas .....	77
4.1.5	Fenômeno de refração e de reflexão na interface de dois meios de índice de refração diferente .....	78
4.1.6	Discretização do domínio angular para um meio delimitado por fronteiras semitransparentes com mudança de índice de refração .....	78
4.2.1	Representação das distâncias internodais .....	81
4.2.2	Volume de controle para o sistema de coordenadas cartesianas .....	82
5.2.1	Princípio do método Enxame de Partículas .....	97
5.3.1	Princípio do método híbrido utilizado neste trabalho .....	97
5.3.2	Processo de estimativa dos parâmetros do problema 1 dividido em 2 passos .....	99
6.1.1	Funções de fase teste utilizadas na validação do programa .....	106
6.1.2	MST quente, absorvente e difuso contido numa cavidade cúbica fria e negra .....	107
6.1.3	Efeito do refinamento de malha espacial para o caso-teste apresentado na figura 6.1.2 .....	108
6.1.4	Efeito da precisão de malha direcional sobre uma solução radiativa ...	108
6.1.5	Variação do fluxo longitudinal normalizado ao longo da linha $(0,0,z^*)$ .....	109
6.1.6	Variação da radiação incidente ao longo da linha $(x^*,0,c^*/2)$ .....	110
6.1.7	Variação de radiação incidente normalizada ao longo da linha $(x^*,0,c^*/2)$ para três espessuras óticas .....	110
6.1.8	Variação do fluxo azimutal normalizado ao longo da linha $(x^*,0,0)$ para três espessuras óticas .....	111
6.1.9	Representação de uma amostra de material opaco submetida a um pulso de laser .....	112
6.1.10	Variação de temperatura no centro da face aquecida pelo flash .....	113

6.1.11	Varição de temperatura no centro da face não aquecida .....	113
6.1.12	Representação de uma amostra de MST submetida a um pulso laser (problema tridimensional reduzido à configuração unidimensional) ...	114
6.1.13	Efeito absorção radiativa sobre a variação de temperatura na face inferior de um MST não espalhante submetido a um pulso laser .....	115
6.1.14	Efeito da temperatura inicial sobre a variação de temperatura na face inferior de um MST espalhante submetido a um pulso laser .....	116
6.1.15	Efeito da espessura ótica sobre a variação de temperatura na face inferior de um MST totalmente espalhante submetido a um pulso laser	118
6.1.16	Efeito da refletividade das fronteiras sobre a variação de temperatura na face inferior de um MST submetido a um pulso laser .....	119
6.1.17	Termograma na face superior e na face inferior de um MST não cinza e não espalhante submetido a um pulso laser .....	120
6.2.1	Amostra de cerâmica .....	121
6.2.2	Evolução da temperatura das amostras de alumina Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> em função do tempo .....	124
6.2.3	Fator de emissão espectral e direcional de amostras de alumina de espessura $c^* = 1\text{ mm}$ , $c^* = 2\text{ mm}$ e $c^* = 4\text{ mm}$ .....	125
6.2.4	Fator de emissão espectral e normal para uma amostra de alumina Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> de espessura $c^* = 1\text{ mm}$ a 2000 K .....	126
6.2.5	Fator de emissão espectral e direcional para uma amostra de alumina de espessura $c^* = 1\text{ mm}$ considerando fronteiras transparentes e fronteiras semitransparentes .....	127
6.2.6	Fator de emissão espectral e direcional medido para uma amostra de alumina Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> de espessura $c^* = 1\text{ mm}$ a 2150 K e simulado com fronteiras semitransparentes .....	129
6.2.7	Campo de temperatura na amostra de alumina de espessura $c^* = 1\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .....	131
6.2.8	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0, 0, z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> de espessura $c^* = 1\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .....	133

6.2.9	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 1\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.95 Q_{12}^*$ .....	133
6.2.10	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 1\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.90 Q_{12}^*$ .....	133
6.2.11	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 1\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$ .....	134
6.2.12	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 1\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$ .....	134
6.2.13	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 1\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$ .....	134
6.2.14	Campo de temperatura na amostra de alumina de espessura $c^* = 2\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .....	135
6.2.15	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 2\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .....	137
6.2.16	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 2\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.95 Q_{12}^*$ .....	137
6.2.17	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 2\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.90 Q_{12}^*$ .....	137
6.2.18	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 2\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$ .....	138
6.2.19	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 2\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$ .....	138

6.2.20	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 2\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$ .....	138
6.2.21	Campo de temperatura na amostra de alumina de espessura $c^* = 4\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .....	139
6.2.22	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 4\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .....	140
6.2.23	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 4\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.95 Q_{12}^*$ .....	140
6.2.24	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 4\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.90 Q_{12}^*$ .....	140
6.2.25	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 4\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$ .....	141
6.2.26	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 4\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$ .....	141
6.2.27	Distribuição da temperatura ao longo do eixo $(0,0,z^*)$ e discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura $c^* = 4\text{ mm}$ . $Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$ .....	141
6.3.1	Pontos de análise dos coeficientes de sensibilidade para o experimento 1 .....	145
6.3.2	Coeficientes de sensibilidade para o vidro cinza submetido a um pulso de laser – Ponto A .....	147
6.3.3	Coeficientes de sensibilidade para o vidro cinza submetido a um pulso de laser – Ponto B .....	147
6.3.4	Coeficientes de sensibilidade para o vidro cinza submetido a um pulso de laser – Ponto C .....	147
6.3.5	Coeficientes de sensibilidade para a alumina cinza submetida a um pulso de laser – Ponto A .....	149

6.3.6	Coeficientes de sensibilidade para a alumina cinza submetida a um pulso de laser – Ponto B .....	149
6.3.7	Coeficientes de sensibilidade para a alumina cinza submetida a um pulso de laser – Ponto C .....	149
6.3.8	Coeficientes de sensibilidade para o compósito de carbono submetido a um pulso de laser – Ponto A .....	151
6.3.9	Coeficientes de sensibilidade para o compósito de carbono submetido a um pulso de laser – Ponto B .....	151
6.3.10	Coeficientes de sensibilidade para o compósito de carbono submetido a um pulso de laser – Ponto C .....	151
6.3.11	Coeficientes de sensibilidade para o vidro cinza submetido a um fluxo contínuo – Ponto A .....	154
6.3.12	Coeficientes de sensibilidade para o vidro cinza submetido a um fluxo contínuo – Ponto B .....	154
6.3.13	Coeficientes de sensibilidade para o vidro cinza submetido a um fluxo contínuo – Ponto C .....	154
6.3.14	Coeficientes de sensibilidade para a alumina cinza submetida a um fluxo contínuo – Ponto A .....	156
6.3.15	Coeficientes de sensibilidade para a alumina cinza submetida a um fluxo contínuo – Ponto B .....	156
6.3.16	Coeficientes de sensibilidade para a alumina cinza submetida a um fluxo contínuo – Ponto C .....	156
6.3.17	Coeficientes de sensibilidade para o compósito de carbono submetido a um fluxo contínuo – Ponto A .....	158
6.3.18	Coeficientes de sensibilidade para o compósito de carbono submetido a um fluxo contínuo – Ponto B .....	158
6.3.19	Coeficientes de sensibilidade para o compósito de carbono submetido a um fluxo contínuo – Ponto C .....	158
6.3.20	Coeficientes de sensibilidade para o vidro e para o experimento 2 ....	163
6.3.21	Coeficientes de sensibilidade para a alumina e para o experimento 2 ..	165
6.4.1	Condicionamento da matriz de informação em função de x e y, para 2 sensores e para o vidro .....	167

6.4.2	Condicionamento da matriz de informação em função de x e y, para 2 sensores e para a alumina .....	167
6.4.3	Condicionamento da matriz de informação em função de x e y, para 2 sensores e para o compósito de carbono .....	167
6.4.4	Condicionamento da matriz de informação em função de x e y, para 3 sensores e para o vidro .....	170
6.4.5	Condicionamento da matriz de informação em função de x e y, para 3 sensores e para a alumina .....	170
6.4.6	Condicionamento da matriz de informação em função de x e y, para 3 sensores e para o compósito de carbono .....	170
6.4.7	Condicionamento da matriz de informação em função do tempo de aquecimento para a alumina .....	172
6.4.8	Condicionamento da matriz de informação em função do número de parâmetros desconhecidos. Vidro, $t_l = 0.01$ .....	174
6.4.9	Condicionamento da matriz de informação em função do número de parâmetros desconhecidos. Vidro, $t_l = t_f$ .....	174
6.4.10	Condicionamento da matriz de informação em função do número de parâmetros desconhecidos. Alumina, $t_l = 0.01$ .....	175
6.4.11	Condicionamento da matriz de informação em função do número de parâmetros desconhecidos. Alumina, $t_l = t_f$ .....	175
6.4.12	Critério D-ótimo para o compósito de carbono em função do tempo de aquecimento .....	176
6.4.13	Critério E-ótimo para o compósito de carbono em função do tempo de aquecimento .....	176
6.5.1	Evolução do funcional e dos parâmetros dimensionais para o método híbrido com estimativa inicial longe dos parâmetros exatos .....	183
6.5.2	Evolução do funcional para o método Híbrido com estimativa inicial próxima dos parâmetros exatos .....	188
6.5.3	Esquema de estimativa dos parâmetros termofísicos do vidro .....	195
6.5.4	Esquema de estimativa dos parâmetros termofísicos da alumina .....	197
6.5.5	Proposta de esquema para a estimativa de parâmetros termofísicos de MST espalhantes .....	199

B.3.1	Proposition de dispositif expérimental pour l'identification de propriétés relatives à la diffusion thermique en milieux semi-transparents orthotropes .....	231
B.3.2	Dispositif expérimental pour la mesure de la luminance spectrale directionnelle de MST à haute température .....	232
B.4.1	Délimitation du domaine mathématique par rapport à l'échantillon ...	234
B.4.2	Représentation graphique du problème direct 1 .....	235
B.5.1	Principe et fonctionnement de la Méthode Hybride .....	240
B.5.2	Schéma inverse en deux étapes .....	242
B.6.1	Variation de la température adimensionnelle et des coefficients de sensibilité normalisés en fonction du temps au point A (0, 0, 0) m ...	245
B.6.2	Variation de la température adimensionnelle et des coefficients de sensibilité normalisés en fonction du temps au point B (0.002, 0, 0) m	246
B.6.3	Variation de la température adimensionnelle et des coefficients de sensibilité normalisés en fonction du temps au point C (0, 0.002, 0) m	246
B.6.4	Variation du facteur d'émission et des coefficients de sensibilité normalisés en fonction de l'angle $\theta$ .....	247
B.6.5	Effets du temps de chauffe sur le critère D-optimum et sur le critère E-optimum .....	249
B.6.6	Effets du nombre de paramètres à estimer sur le critère D-optimum et sur le critère E-optimum .....	250
C.1.1	Echantillon de céramique .....	258
C.1.2	Evolution de la température des échantillons en fonction du temps ...	261
C.1.3	Facteur d'émission spectral et directionnel d'échantillons d'alumine d'épaisseur $c^* = 1\text{ mm}$ , $c^* = 2\text{ mm}$ et $c^* = 4\text{ mm}$ .....	262
C.1.4	Facteur d'émission spectral et normal d'un échantillon d'alumine Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> d'épaisseur $c^* = 1\text{ mm}$ à 2000 K .....	263
C.1.5	Facteur d'émission spectral et directionnel pour un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 1\text{ mm}$ considérant des frontières transparentes et des frontières semi-transparentes .....	263

C.1.6	Facteur d'émission spectral directionnel mesuré sur un échantillon d'alumine Al25 d'épaisseur $c^* = 1 \text{ mm}$ à 2150 K et simulé pour des frontières semi-transparentes .....	265
C.2.1	Champ de température dans un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 1 \text{ mm}$ . $Q_{l1}^* = Q_{l2}^*$ .....	268
C.2.2	Distribution de température le long de l'axe $(0, 0, z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 1 \text{ mm}$ . $Q_{l1}^* = Q_{l2}^*$ .....	270
C.2.3	Distribution de température le long de l'axe $(0, 0, z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 1 \text{ mm}$ . $Q_{l1}^* = 0.95 Q_{l2}^*$ .....	270
C.2.4	Distribution de température le long de l'axe $(0, 0, z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 1 \text{ mm}$ . $Q_{l1}^* = 0.90 Q_{l2}^*$ .....	270
C.2.5	Distribution de température le long de l'axe $(0, 0, z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 1 \text{ mm}$ . $Q_{l1}^* = 0.85 Q_{l2}^*$ .....	271
C.2.6	Distribution de température le long de l'axe $(0, 0, z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 1 \text{ mm}$ . $Q_{l1}^* = 0.80 Q_{l2}^*$ .....	271
C.2.7	Distribution de température le long de l'axe $(0, 0, z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 1 \text{ mm}$ . $Q_{l1}^* = 0.75 Q_{l2}^*$ .....	271
C.2.8	Champ de température dans un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 2 \text{ mm}$ . $Q_{l1}^* = Q_{l2}^*$ .....	272
C.2.9	Distribution de température le long de l'axe $(0, 0, z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 2 \text{ mm}$ . $Q_{l1}^* = Q_{l2}^*$ .....	273
C.2.10	Distribution de température le long de l'axe $(0, 0, z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 2 \text{ mm}$ . $Q_{l1}^* = 0.95 Q_{l2}^*$ .....	273
C.2.11	Distribution de température le long de l'axe $(0, 0, z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 2 \text{ mm}$ . $Q_{l1}^* = 0.90 Q_{l2}^*$ .....	273

C.2.12	Distribution de température le long de l'axe $(0,0,z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 2$ mm . $Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$ .....	274
C.2.13	Distribution de température le long de l'axe $(0,0,z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 2$ mm . $Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$ .....	274
C.2.14	Distribution de température le long de l'axe $(0,0,z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 2$ mm . $Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$ .....	274
C.2.15	Champ de température dans un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 4$ mm . $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .....	275
C.2.16	Distribution de température le long de l'axe $(0,0,z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 4$ mm . $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .....	276
C.2.17	Distribution de température le long de l'axe $(0,0,z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 4$ mm . $Q_{11}^* = 0.95 Q_{12}^*$ .....	276
C.2.18	Distribution de température le long de l'axe $(0,0,z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 4$ mm . $Q_{11}^* = 0.90 Q_{12}^*$ .....	276
C.2.19	Distribution de température le long de l'axe $(0,0,z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 4$ mm . $Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$ .....	277
C.2.20	Distribution de température le long de l'axe $(0,0,z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 4$ mm . $Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$ .....	277
C.2.21	Distribution de température le long de l'axe $(0,0,z^*)$ et écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur $c^* = 4$ mm . $Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$ .....	277

# Lista de Tabelas

6.1.1	Parâmetros utilizados para a realização da figura 6.1.15 .....	117
6.1.2	Propriedades radiativas do material de validação não cinza .....	120
6.2.1	Propriedades radiativas da alumina Al23 preditas pela teoria de Mie ..	123
6.2.2	Propriedades radiativas da alumina Al25 preditas pela teoria de Mie ..	128
6.2.3	Gradiente de temperatura e discrepância sobre o fator de emissão simulado para o corpo de prova de alumina de 1 mm de espessura .....	142
6.2.4	Gradiente de temperatura e discrepância sobre o fator de emissão simulado para o corpo de prova de alumina de 2 mm de espessura .....	142
6.2.5	Gradiente de temperatura e discrepância sobre o fator de emissão simulado para o corpo de prova de alumina de 4 mm de espessura .....	142
6.3.1	Propriedades termofísicas do vidro, da alumina, e do compósito de carbono .....	144
6.3.2	Coordenadas dos pontos de análise de coeficientes de sensibilidade ...	146
6.3.3	Propriedades radiativas do vidro .....	160
6.4.1	Localização ótima do sensor 2 .....	168
6.4.2	Localização do sensor 2 .....	169
6.4.3	Localização ótima do sensor 3 .....	169
6.4.4	Crítérios D- e E-ótimos usando 4096 sensores .....	171
6.4.5	Conjuntos de parâmetros a serem estimados para a otimização do experimento 1 .....	173
6.5.1	Dados para a simulação de experimento .....	179
6.5.2	Valores limites atribuídos para os parâmetros .....	179
6.5.3	Técnicas de estimativa .....	181

6.5.4	Resultados obtidos com estimativa inicial próxima aos parâmetros exatos .....	182
6.5.5	Resultados obtidos com estimativa inicial longe dos parâmetros exatos	184
6.5.6	Estimativa dos parâmetros do vidro .....	187
6.5.7	Estimativa dos parâmetros da alumina .....	190
6.5.8	Estimativa dos parâmetros do compósito de carbono .....	191
6.5.9	Resultados da estimativa de 5 parâmetros com repetição do experimento .....	193
6.5.10	Resultados da estimativa de 6 parâmetros do vidro .....	195
6.5.11	Informação a priori para a estimativa dos parâmetros termofísicos da alumina .....	196
6.5.12	Resultados da estimativa de 7 parâmetros da alumina .....	197
B.6.1	Propriétés radiatives de l'alumine prédites par la théorie de Mie .....	243
B.6.2	Techniques de minimisation .....	252
B.6.3	Résultats obtenus pour des valeurs initiales proches des valeurs exactes .....	253
B.6.4	Résultats obtenus pour des valeurs initiales loins des valeurs exactes	254
B.6.5	Résultats de l'estimation de 7 paramètres .....	256
C.1.1	Propriétés radiatives de la céramique Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> prédites par la théorie de Mie .....	264
C.2.1	Ecart de température interne et écart sur le facteur d'émission simulé pour un échantillon d'alumine d'épaisseur 1 mm .....	279
C.2.2	Ecart de température interne et écart sur le facteur d'émission simulé pour un échantillon d'alumine d'épaisseur 2 mm .....	279
C.2.3	Ecart de température interne et écart sur le facteur d'émission simulé pour un échantillon d'alumine d'épaisseur 4 mm .....	279

# Lista de Símbolos

$a, b, c$	dimensões do corpo de prova	[m]
$A$	área do volume de controle	[m <sup>2</sup> ]
Bi	número de Biot (ver equação 3.3.9.p)	
$c_0$	velocidade da luz no vácuo ( $2.9979 \times 10^8$ )	[m.s <sup>-1</sup> ]
$C$	capacidade térmica volumétrica	[J.m <sup>-3</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$C_1$	constante física ( $3.7419 \times 10^{-8}$ )	[W.μm <sup>4</sup> .m <sup>-2</sup> ]
$C_2$	constante física (14388)	[μm.K]
$D^l$	co-seno diretor integrado num ângulo sólido discreto $l$	
$E_\lambda$	poder emissivo	[W.m <sup>-2</sup> ]
$f$	fator peso	
$f_v$	fração volumétrica	
$F_{0 \rightarrow \lambda T}$	função de radiação do corpo negro	
<b>F</b>	matriz de informação de Fischer	
$g_\lambda$	fator de assimetria monocromático	
$G_\lambda$	radiação incidente monocromática	[W.m <sup>-3</sup> ]
$h$	coeficiente de transferência de calor	[W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$H$	constante de Planck ( $6.6255 \times 10^{-34}$ )	[J.s]
$I_\lambda$	intensidade radiativa monocromática	[W.m <sup>-3</sup> .sr <sup>-1</sup> ]
<b>J</b>	matriz de sensibilidade	
$k$	condutividade térmica	[W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ]
$K$	constante de Boltzmann ( $1.3805 \times 10^{-23}$ )	[J.K <sup>-1</sup> ]
$\tilde{n}$	índice de refração complexo ( $n - ik$ )	
$\tilde{n}_r$	índice de refração complexo relativo ( $n_r - ik_r$ )	
$N_f$	número de bandas para a discretização espectral	
$N_l$	número de direções discretas	
$N_{p\lambda}$	número de Planck monocromático (ver equação 3.3.9.u)	
$N_x, N_y, N_z$	número de volumes de controle nas direções $x$ , $y$ e $z$	
$p_\lambda$	função de fase monocromática	
<b>P</b>	vetor de parâmetros desconhecidos	
$q$	fluxo de calor	[W.m <sup>-2</sup> ]
$q_l$	fluxo do laser	[W.m <sup>-2</sup> ]
$Q$	taxa de calor	[W]
$Q_l$	potência do laser	[W]
$r$	raio de partícula	

$S_{MQ}$	norma dos Mínimos-Quadrados	
$S_{MAP}$	função objetivo Maximum a Posteriori	
$S_{\lambda}$	termo fonte radiativo monocromático	$[\text{W}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{sr}^{-1}]$
$t$	tempo	$[\text{s}]$
$t_f$	tempo final do experimento	$[\text{s}]$
$T$	temperatura	$[\text{K}]$
$T_{\infty}$	temperatura envoltória	$[\text{K}]$
$V$	volume	$[\text{m}^3]$
$\mathbf{V}$	matriz de covariância dos parâmetros	
$\mathbf{W}$	matriz de covariância das medidas	
$x, y, z$	direções do sistema de coordenadas cartesianas	
$\mathbf{X}$	vetor de variáveis estimadas	
$\mathbf{Y}$	vetor de variáveis medidas	

## Gregas

$\beta_{\lambda}$	coeficiente de extinção monocromático	$[\text{m}^{-1}]$
$\varepsilon$	emissividade	
$\tilde{\varepsilon}$	fator de emissão	
$\Phi_{\lambda}$	função de fase monocromática de uma partícula	
$\Gamma$	contorno do domínio matemático	
$\kappa_{a\lambda}$	coeficiente de absorção monocromático	$[\text{m}^{-1}]$
$\lambda$	comprimento de onda	$[\mu\text{m}]$
$\lambda_l$	comprimento de onda de vibração do laser CO <sub>2</sub> (10.6)	$[\mu\text{m}]$
$\mu_{cr}$	co-seno do ângulo polar crítico $(= (1 - n_r^{-1})^{1/2})$	
$\theta$	ângulo polar	$[\text{rad}]$
$\theta_{cr}$	ângulo polar crítico	$[\text{rad}]$
$\rho'_{\lambda}$	refletividade especular monocromática	
$\rho_{\lambda}$	refletividade hemisférica monocromática	
$\sigma$	constante de Stefan-Boltzmann $(5.6705 \times 10^{-8})$	$[\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}]$
$\sigma_{s\lambda}$	coeficiente de espalhamento monocromático	$[\text{m}^{-1}]$
$\tau_{0\lambda}$	espessura ótica monocromática	
$\omega_{\lambda}$	albedo monocromático	
$\Omega$	ângulo sólido	$[\text{sr}]$
$\psi$	ângulo radial	$[\text{rad}]$
$\Psi$	vetor média a priori dos parâmetros desconhecidos	
$\xi, \eta, \mu$	co-senos diretores da direção $\Omega$	

## Superscritos

$l$	direção discreta
cond	transferência de calor por condução
conv	transferência de calor por convecção
rad	transferência de calor por radiação
*	variáveis dimensionais

## Subscritos

$b$	corpo negro
$c$	contorno
$l$	laser
$m$	banda de comprimento de onda
$e, w, n, s,$	faces do volume de controle $P$
$t, b$	
$E, W, N, S,$	volumes vizinhos do volume de controle $P$
$T, B$	

# Capítulo 1

## Introdução

Em um material semitransparente em repouso, calor é transferido por condução e por radiação simultaneamente. A radiação, se propagando a velocidade da luz, transfere calor dentro do material a velocidade superior à condução e tal fenômeno é mais significativo quando o material encontra-se a altas temperaturas. Em consequência, resultados referentes ao campo de temperatura no material são diferentes quando é levada em conta a emissão do material e todas as suas características radiativas e quando o material é considerado opaco ou puramente condutivo. Portanto, o fenômeno de acoplamento condução-radiação e o campo de temperatura resultante influenciam bastante a identificação das propriedades termofísicas de materiais.

Para o estudo da transferência de calor em um material é necessário conhecer as suas propriedades termofísicas. Entre elas, distinguem-se aquelas que caracterizam a difusão do calor (condução) dentro do material e as propriedades radiativas que quantificam as diversas alterações sofridas pela radiação, isto é, absorção, emissão e espalhamento. A difusão costuma depender da morfologia interna do meio e também da direção, em materiais anisotrópicos. A análise da condução de calor num sólido anisotrópico, sendo bastante complicada, em muitas vezes envolve aproximações que consistem em considerar o sólido ortotrópico ou isotrópico. Por outro lado, a propagação da radiação, por depender da morfologia microscópica do meio, também depende da direção. No entanto, devido à falta de informação ou a falta de exatidão dada na literatura sobre a caracterização de materiais a altas temperaturas, o presente trabalho se propõe a estudar e projetar experimentos para a estimativa das propriedades condutivas e radiativas.

A pesquisa das propriedades de materiais semitransparentes a altas temperaturas é fundamental em algumas aplicações industriais, por exemplo, na indústria do vidro, onde o processo de moldagem otimizado se realiza por controle do resfriamento. A robustez e a perfeita cristalização dos vidros dependem, portanto, do conhecimento de

suas propriedades termofísicas em diferentes faixas de temperatura. Outro exemplo envolve a fabricação de fibras óticas e de componentes eletrônicos, que são geralmente constituídos de materiais semicondutores a base de sílicas. Materiais refratários ou ablativos também têm as suas aplicações usuais a altas temperaturas: por exemplo, alumina, sílicas e magnésias servem na fabricação de sistemas de proteção térmica para reentrada atmosférica de aeronaves, na fabricação de tubeiras de foguetes, ou simplesmente na fabricação de revestimentos de fornos e de peças de contato a altas temperaturas. Mais recentemente, as cerâmicas foram utilizadas na fabricação de corpos negros para a calibração de aparelhos óticos. Uma utilização adequada dos novos materiais industriais, como as cerâmicas, envolve a formulação de um modelo realista dos modos de transferência de calor no sistema considerado. Portanto, as propriedades térmicas dos materiais são essenciais.

O texto deste trabalho é organizado da seguinte forma:

No *Capítulo 2* é apresentada a revisão bibliográfica sobre os tópicos abordados no trabalho.

No *Capítulo 3* é apresentada a descrição dos experimentos planejados para a obtenção das propriedades termofísicas e radiativas de materiais a altas temperaturas. Serão também definidos os problemas físicos estudados e suas formulações matemáticas.

No *Capítulo 4* é dada ênfase ao Método de Volumes Finitos, utilizado para a solução do problema direto. A formulação matemática dos problemas físicos estudados é assim transformada e discretizada para os problemas a serem resolvidos por esta técnica numérica.

No *Capítulo 5* apresentam-se métodos para a solução de problemas inversos. Os métodos utilizados neste trabalho envolvem aqueles ditos determinísticos e estocásticos. Para o projeto de otimização de experimento, incluindo a localização e número de sensores, tempo de medição e tempo de aquecimento, utilizou-se a análise dos coeficientes de sensibilidade e a análise do determinante da *Matriz de Fisher*. No *Capítulo 5* também é apresentada uma análise estatística, para obterem-se estimativas para as regiões e intervalos de confiança dos parâmetros estimados.

No *Capítulo 6* são apresentadas as validações das soluções numéricas dos problemas diretos, os resultados obtidos com as soluções destes problemas, além das

estimativas feitas com medidas simuladas, utilizando-se a formulação dos problemas diretos.

Finalmente, o *Capítulo 7* apresenta as conclusões obtidas e as perspectivas de continuação deste trabalho, na área de identificação de propriedades termofísicas e radiativas de materiais semitransparentes a altas temperaturas.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

Este capítulo irá mostrar os principais trabalhos encontrados na literatura sobre a formulação de problemas de acoplamento condução-radiação na situação transiente. Serão também referenciadas as técnicas de solução de problemas inversos no que diz a respeito à estimativa de parâmetros. Por último, serão citados trabalhos que falam a respeito da construção de experimentos para o estudo das propriedades termofísicas e para o estudo das propriedades radiativas de materiais.

### 2.1 Técnicas de Solução para Problemas de Acoplamento Condução-Radiação

Em problemas diretos de acoplamento condução-radiação são consideradas conhecidas para a análise a forma geométrica do corpo, a condição inicial, as condições de contorno, as propriedades físicas e o termo de geração de energia. O objetivo do problema direto é a determinação do campo de temperatura e de intensidade radiativa no corpo. Apresentam-se a seguir os trabalhos disponíveis na literatura para a solução do problema direto incluindo ferramentas analíticas ou numéricas.

Desde a década de 70, a solução de problemas transientes de acoplamento condução-radiação foi amplamente estudada para materiais absorventes e emissivos e para vários tipos de condições de contorno. Estes trabalhos se encontram em trabalhos de revisão na área de transferência radiativa, escritos por Viskanta e Anderson [1] em 1975 e por Kunc *et al.* [2] em 1984, este último focado em vidros. Modelos mais complexos foram o objeto da pesquisa nesta área alguns anos depois: o modelo multidimensional foi abordado [3-5], em regime transiente [3,4,6-11], com um índice de refração superior à unidade [9,12,13], num meio que espalha a radiação [4,5,10,12-29], mas também tomando conta vários tipos de condições de contorno (negra, transparente, refletiva com reflexão especular, difusa, ou misturadas) [12-15,17-20,22,26].

Com relação à solução de problemas dentro de um meio que absorve, emite e espalha a radiação, Machali [17] e Machali e Madkour [18] investigaram a influência de condições de contorno refletivas de maneira especular e de maneira difusa, simultaneamente, enquanto Siegel [14,15] e Ganapol [19] investigaram os casos de fronteiras transparentes e semitransparentes. O espalhamento isotrópico foi considerado. Uma extensão do problema de acoplamento condução-irradiação definido com fronteiras opacas e refletivas, misturando a reflexão difusa e especular, foi solucionado por Lin e Tsai [10], Siewert [22] e Siewert e Thomas [27]. A partir do mesmo problema, Spuckler e Siegel [12,13] estudaram a transferência da radiação dentro de um material composto de duas lâminas diferentes, ambas caracterizadas por um índice de refração superior à unidade. Uma outra revisão, mais recente, foi realizada por Siegel [25] em 1998 sobre os trabalhos agora citados.

Mais recentemente, Tan *et al.* [26] investigaram a solução do campo radiativo com alta precisão pelo método “Ray Tracing” [9,30,31], dentro de um meio complexo de índice de refração superior à unidade, absorvente, emissivo e que espalha de maneira isotrópica. A influência das condições de contorno opacas e semitransparentes foi investigada. O método “Ray Tracing” apresenta-se como um método particularmente adaptado para modelar os fenômenos de múltiplas reflexões nos meios transparentes. Porém, a sua implementação é bastante complexa comparada à formulação da equação de transferência radiativa por aproximações numéricas. Uma alternativa, proposta por Lazard *et al.* [28] e Lazard [29], usa um método semi-analítico baseado na técnica de substituição de núcleo, para resolver problemas de acoplamento com espalhamento radiativo anisotrópico de segunda ordem, embora as condições de contorno sejam limitadas às fronteiras negras. Devido à complexidade da solução não iterativa de problemas de acoplamento condução-irradiação, o espalhamento sempre foi considerado isotrópico.

Dentro desta revisão, destaca-se uma lista específica de artigos referentes à solução de problemas de acoplamento condução-irradiação transiente. Estes trabalhos, referenciados a seguir, foram desenvolvidos segundo a necessidade de modelar a transferência de calor por condução e irradiação em materiais testados por um método chamado “Flash”, descrito mais adiante. Este é um método experimental de identificação de propriedades termofísicas de materiais muito usado. A configuração

experimental consiste em submeter a amostra de material a um aquecimento de curta duração em uma das suas faces.

Em um trabalho pioneiro, Saulnier [30], em 1980, considerou um material cinza preso entre duas placas negras e submetido a um pulso de laser em uma de suas faces. Um aumento imediato da temperatura na superfície oposta ao pulso foi identificado por conta da transferência de calor por radiação. A formulação matemática do experimento Flash foi depois generalizada por Tan *et al.* [31] em 1991 para as condições de contorno opacas e semitransparentes: Estes autores concluíram ser possível estimar o calor específico em um material semitransparente. Este trabalho foi prosseguido por André e Degiovanni [32] em 1995, que concluíram a ausência de contribuição radiativa significativa na evolução da temperatura lida na superfície oposta ao aquecimento quando a espessura ótica for pequena e as superfícies refletivas. A aplicação de tais modelos conduz a estimar com exatidão a condutividade fônica e a difusividade de materiais como sílicas.

O espalhamento radiativo, porém, foi introduzido no modelo Flash somente a partir de 1997. Hahn *et al.* [33], no objetivo de estimar a difusividade fônica de cerâmicas porosas, aplicaram o modelo “*três fluxos*” junto às condições de contorno de tipo opacas negras e refletivas difusas. Um ano depois, André e Degiovanni [34] implementaram um método chamado “*Quadrípolos térmicos*”, baseado na aproximação “*dois fluxos*”, capaz de resolver analiticamente o acoplamento simultâneo condução-radiação unidimensional, com espalhamento isotrópico. A solução numérica do problema Flash pelo método de volumes finitos com espalhamento isotrópico foi desenvolvida na seguida por Da Silva [35].

Outros trabalhos foram iniciados posteriormente, se baseando desta vez sobre meios difusivos: o objetivo principal era descobrir a combinação de condições de contorno capaz de gerar a maior resposta na face inferior da amostra. Siegel [25] sustenta a idéia de aplicar uma tinta altamente absorvente a fim de fornecer uma resposta em temperatura significativa para deduzir a difusividade fônica. De uma visão diferente, Tan *et al.* [36] propõem de irradiar a amostra semitransparente em uma frequência de profundidade ótica pequena, e de pintar somente a face não aquecida de tinta preta a fim de aumentar ainda mais a variação de temperatura. O efeito da anisotropia radiativa, porém, não foi muito investigado, sendo regularmente considerado o espalhamento isotrópico ou linearmente anisotrópico. Como trabalho analítico complementar, Lazard

*et al.* [28], já citados, incluem o espalhamento anisotrópico de segunda ordem no modelo de uma placa cinza. Todos os trabalhos revisados, relativos ao experimento Flash, envolvem uma formulação unidimensional.

A solução analítica de problema tridimensional com acoplamento condução-radiação é extremamente complexa, principalmente quando o meio absorve, emite e espalha, e quando as condições de contornos são consideradas mistas. Por isto, o problema deve ser resolvido recorrendo a técnicas numéricas, onde a equação de condução do calor e a Equação de Transferência Radiativa (ETR) são resolvidas alternadamente via um processo iterativo.

Em trabalhos referenciados abaixo, a equação de transferência radiativa foi resolvida com o Método de Volumes Finitos (FVM). O FVM foi introduzido por Patankar [37] em 1980, cujo propósito era a solução problemas de transferência de calor e massa, e problemas de escoamentos de fluidos. O método foi adaptado em 1990 por Raithby e Chui [38] de maneira a resolver a Equação de Transferência Radiativa. Em 1993, os mesmos autores [39] adaptaram o método em malhas não ortogonais. Em seguida, Chai *et al.* [40] estenderam o método a duas e três dimensões, com termo de geração de calor e perturbações exteriores. O procedimento de implementação do FVM em malha não ortogonal foi generalizado por Chai *et al.* [41]. Em geometria cilíndrica, vários autores apresentaram artigos tratando da solução numérica de problemas radiativos: Chui *et al.* [42] introduzem o FVM para geometrias axissimétricas, e Moder *et al.* [43] e Kim e Baek [44] estendem o problema às geometrias sem simetria axial.

Em um trabalho mais recente, Murthy e Mathur [45] formularam o FVM aplicado à radiação térmica em uma malha não estruturada, composta de volumes irregulares em tamanho e forma. O objetivo era de modelar o campo radiativo gerado por um gás em combustão dentro de uma turbina a gás de seção variável. Esta adaptação do método FVM permitiu a extensão do campo de aplicação dos softwares CFD à área das transferências radiativas. A formulação do método FVM para malhas não estruturadas foi generalizada por Cui e Li [46] e Ben Salah *et al.* [47].

A flexibilidade geométrica e confiabilidade do método de volumes finitos, comparado a outros métodos como o método DOM (Método de Ordenadas Discretas) [48,49], faz dele um método muito competitivo na solução de equações parabólicas ou

elípticas em geometrias complexas. As aplicações são múltiplas: escoamento de gás, transferência radiativa em meios porosos com convecção, etc. Neste trabalho, uma malha ortogonal única é utilizada para integrar e resolver alternadamente a equação de condução do calor e a equação de transferência radiativa.

## 2.2 Predição das Propriedades Radiativas

Para considerar válida a formulação do problema direto, fontes e perdas de calor precisam aparecer no sistema de equações que governa a transferência de calor no domínio. Por exemplo, as perdas de calor por convecção costumam ser representadas por um coeficiente de transferência de calor constante. No entanto, este coeficiente depende da temperatura do fluido e da parede, das propriedades do fluido, da rugosidade da parede, etc. Torna-se, portanto, essencial investigar em profundidade os mecanismos que governam a perda de calor.

Uma dificuldade similar ocorre na caracterização do comportamento radiativo de materiais semitransparentes. Por exemplo, os coeficientes de absorção, de espalhamento, de extinção, o albedo e a função de fase são variáveis que dependem do comprimento de onda da radiação interagindo com o meio. A função de fase, mais complexa, é uma função multi-direcional. Devido à interação da radiação com o meio, as propriedades variam muito de uma estrutura molecular ou cristalina para outra [50], e variam, por conseqüência, de um material para outro. Esta dispersão se observa na compilação de resultados experimentais de refletividade e emissividade obtidas para diversas cerâmicas [51]. Por estes motivos, é preciso fazer uso de um modelo de cálculo para as propriedades radiativas. Este modelo tem por objetivo compensar a falta de dados válidos disponíveis sobre as propriedades radiativas. Portanto, o conhecimento das verdadeiras propriedades torna o problema mais representativo da realidade e por conseqüência torna possível investir no desenvolvimento de estratégias de estimativa mais eficazes. Por outro lado, o uso de um modelo de cálculo representa uma forma razoável de caracterizar os parâmetros ou funções radiativas que não podem ser estimados, permitindo o re-investimento do problema na estimativa de outros parâmetros com maior confiança. Isto, obviamente, deve acontecer quando o fenômeno observado é pouco sensível aos parâmetros.

O modelo de cálculo de propriedades radiativas é fundamentado na solução das equações de propagação de ondas eletromagnéticas (equações de Maxwell), as quais interagem com a estrutura microscópica do meio. Portanto, a morfologia do meio (forma e dimensão das partículas, distribuição das partículas, porosidade...) e as propriedades óticas (índice complexo de refração) são determinadas experimentalmente em conjunto. Ocasionalmente, a solução do modelo permite avaliar as conseqüências da estrutura interna, tamanho de partículas e porosidade sobre as características radiativas do meio e sobre a solução do modelo direto.

Os materiais investigados neste trabalho são cerâmicas de Alumina refratária  $Al_2O_3$  obtidas por sinterização de pó. A morfologia microscópica que resulta do processo de fabricação se compara com um aglomerado de grandes partículas esféricas idênticas. O diâmetro das esferas costuma variar de 10 a 500  $\mu m$  dependendo do material. A previsão das propriedades radiativas se realiza portanto descrevendo-se a interação da radiação (onda eletromagnética) com o meio poroso. No entanto, para modelar a transferência radiativa em tais sistemas, é preciso previamente conhecer como uma partícula individual interage com a radiação [52].

O modelo que considera uma onda eletromagnética plana monocromática, interagindo com uma partícula, pode ser resolvido aplicando a equação de Maxwell e usando dados fundamentais como o perfil, o tamanho das partículas e as constantes óticas do meio. A solução exata deste problema para uma partícula esférica opaca isolada foi dada pela teoria de Mie (1908), onde são apresentados resultados em termos de frações (eficiências) de absorção, de espalhamento, de extinção assim como a função de fase. O desenvolvimento da teoria de Mie encontra-se nos textos fundamentais da teoria eletromagnética [52-55]. Resultados similares podem ser obtidos aplicando o método de Monte-Carlo a uma partícula semitransparente isolada [54,56]. Um cálculo das eficiências para o método de Monte-Carlo foi dado por Lui *et al.* [57].

Segundo Deirmendjian [58], as propriedades radiativas e volumétricas de um meio poroso constituído de numerosas partículas, podem ser obtidas adicionando os efeitos de cada partícula individualmente, de tamanho e de propriedades dadas, dentro de um volume elementar. A formulação das propriedades, no caso específico de partículas esféricas de mesmas características e de mesmo tamanho, foi dada por Drolen e Tien [59]. No entanto, os mecanismos de reflexão, refração, absorção e difração da luz foram analisados nas referências citadas considerando propagação independente.

O estudo mais detalhado dos meios de baixa porosidade precisa incluir o fenômeno de propagação radiativa em modo dependente [60]. Singh e Kaviany [60] propuseram uma técnica adaptativa ao método de Monte-Carlo para simular a radiação dependente em aglomerado de esferas transparentes e semitransparentes. Uma revisão bibliográfica completa sobre a formulação da radiação em modo dependente foi dada recentemente [61]. Geralmente, os modelos de radiação dependente se baseiam na correção da eficiência de espalhamento em função de observações experimentais. Nenhuma teoria permite modelar o fenômeno de radiação dependente de forma generalizada. Conseqüentemente, dependendo da concordância entre os resultados da simulação e os resultados experimentais, o modelo de espalhamento independente ou dependente pode ser escolhido.

## 2.3 Técnicas de Solução para Problemas Inversos

### 2.3.1 Métodos de minimização

A solução de problemas inversos de estimativa de parâmetros pode ser obtida através de diversas técnicas de minimização de uma função objetivo. Em problemas onde se deseja estimar poucos parâmetros, o uso da norma de mínimos quadrados como função objetivo pode ser estável. Entretanto, quando é necessário que seja feita a estimativa de muitos parâmetros simultaneamente, podem ocorrer oscilações na solução. Uma forma para minimizar este efeito de instabilidade, proposta por Tikhonov e apresentada nos trabalhos [62,63], é utilizar o *Método de Regularização de Tikhonov*, que modifica a norma de mínimos quadrados adicionando termos de suavização. Tal método é relacionado ao método de Levenberg-Marquardt e à minimização da função objetivo Maximum a Posteriori.

Levenberg em seu trabalho de 1944 [62] desenvolveu um método de solução de problemas não-lineares de estimativa de parâmetros, através de uma modificação da norma dos Mínimos-Quadrados. Em 1963, Marquardt [63] desenvolveu um método semelhante, utilizando uma interpolação entre o método de *Gauss* e o método *steepest-descent* [64]. A combinação destes dois trabalhos resultou no conhecido método de *Levenberg-Marquardt*. Este é um poderoso método iterativo para a estimativa não-linear de parâmetros que vem sendo aplicado com sucesso na solução de diversos problemas de transferência de calor. O Método de Levenberg-Marquardt é muito estável

e pode ser aplicado à solução de uma grande variedade de problemas de transferência de calor.

Posteriormente, os métodos DFP (Davidon-Fletcher-Powell) [65] e BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) [66,67], baseados no *método Quasi-Newton* [64,68], foram desenvolvidos para problemas de estimativa não linear. Eles se oferecem como uma alternativa mais rápida de execução que o *método de gradiente conjugado*. Ambos os métodos são conhecidos por convergir mesmo em situações que o número de parâmetros desconhecidos do problema aumenta. A particularidade dos métodos é de envolver a aproximação de múltiplas derivadas da norma dos mínimos quadrados, que aceleram o processo de minimização.

Özişik e Orlande [69] discutem os conceitos fundamentais de problemas inversos, assim como os passos básicos para a solução destes através do método de *Levenberg-Marquardt* e do *método de gradiente conjugado*. São mostrados diversos exemplos de aplicações desses métodos na solução de problemas de interesse para a engenharia, envolvendo transferência de calor e de massa.

Beck e Arnold [70], num livro editado em 1977, e Beck [71] em um artigo publicado em 1999 falam da técnica de estimativa seqüencial de parâmetros aplicada a um experimento em particular (adicionando medidas a cada tempo), assim como aplicada a vários experimentos relacionados. A análise seqüencial fornece uma forma de tratar de alguns aspectos de problemas mal-postos e também está relacionada à regularização de Tikhonov. O método de estimativa seqüencial auxilia ainda na confirmação da adequação de um modelo matemático para o problema físico, além de fornecer informações sobre a precisão dos parâmetros estimados.

Outra forma de se minimizar uma função objetivo é de trabalhar a partir de uma população de soluções potenciais do problema inverso, a qual evolui através de um processo de seleção natural e de adaptação genética. Métodos que funcionam neste princípio são classificados como *Algoritmos Genéticos* [72]. Descobertos na década de 90, os *Algoritmos Genéticos* utilizam os mecanismos de divisão celular, tais como a seleção, cruzamentos e mutações, para criar novas gerações de seres (parâmetros) mais adaptados a um meio ambiente, o qual é caracterizado pela função objetivo. O processo é iterativo, e começa por uma população escolhida de maneira randômica. A velocidade

de convergência dos algoritmos genéticos costuma ser lenta, embora sejam conhecidos por atingir com eficácia o mínimo global de uma função objetivo.

Versões mais recentes de algoritmos funcionando no princípio de evolução das espécies se encontram através do *método de Evolução Diferencial* [73] e do *método de Enxame de Partículas* [74-77]. Ambos desenvolvidos em 1995, estes métodos poderosos representam a última geração dos algoritmos de tipo genéticos. No entanto, um desempenho maior pode ser alcançado acoplando os métodos entre eles, e formulando estratégias de repartição de tarefa em uma classe de métodos chamados *Híbridos* [78-81]. Os métodos híbridos aproveitam as vantagens de vários métodos dependendo da sua evolução para o mínimo geral. Dependendo do perfil espacial da função objetivo, a utilização de um método Híbrido para o problema inverso aparece como a opção mais adequada por juntar as qualidades de vários métodos. Neste caso, devem-se escolher corretamente os métodos de composição do algoritmo híbrido e delimitar os seus campos de atuação respectivos durante o processo de minimização.

### 2.3.2 Análise de coeficientes de sensibilidade / análise estatística dos resultados

Diversos trabalhos encontrados na literatura mostram que a escolha de variáveis ótimas para a realização do experimento resulta em estimativas mais precisas e acuradas. Entre estes trabalhos, Beck [82], em 1967, apresenta uma análise dos coeficientes de sensibilidade para problemas de estimativa de condutividade térmica por contato, analisando a dependência linear entre os coeficientes, para a determinação das melhores variáveis experimentais, facilitando a estimativa dos parâmetros procurados. Em 1969, Beck [83] apresenta uma nova formulação matemática para a determinação das variáveis experimentais, de forma a se ter um experimento ótimo, minimizando o efeito dos erros de medida. Já em 1977, Beck e Arnold [70], apresentam as análises estatísticas de resultados e os métodos de minimização de função para estimativa de parâmetros.

### 2.3.3 Otimização de experimento

A busca de critérios apropriados para otimização de experimentos vem chamando a atenção de vários pesquisadores há muito tempo [70], baseados na minimização da região de confiança dos parâmetros estimados. Em 1985, Artyukhin [84] propôs

maximizar o condicionamento de uma matriz específica chamada *Matriz de Informação de Fisher*. A *matriz de informação de Fisher*, na realidade, caracteriza a sensibilidade total de medidas com relação aos parâmetros desconhecidos. Em 1988, Artyukhin e Nenarokomov [85] utilizaram a *Matriz de Fisher* na tentativa de otimizar um experimento de determinação da emissividade de materiais. Depois, Artyukhin *et al.* [86] generalizaram a utilização dos critérios D- e E-ótimos como os melhores critérios para planejar um experimento em transferência de calor. A importância de realizar um projeto ótimo de experimentos, quando se procura estimar a condutividade térmica e a capacidade térmica volumétrica de sólidos compostos, foi ilustrada por Taktak [87] e Taktak *et al.* [88]. Os critérios D- e E-ótimo foram então utilizados.

Em 1995, Fadale *et al.* [89] estudaram a possibilidade de estender a matriz de Fisher para levar em conta as incertezas dos parâmetros julgados como conhecidos na formulação do problema. Deste modo, erros de posição, de amostragem de medidas no tempo ou ainda a má formulação do problema direto influenciam o critério a ser maximizado. Esta *Matriz de Fisher estendida* foi utilizada depois em 1996 [90] e em 1997 [91] por Emery e Fadale em um problema de estimativa da condutividade e da capacidade térmica de materiais com medidas de temperatura. Com base no novo critério a ser maximizado, os mesmos autores revelam a influência das condições de contorno e do número de sensores sobre a otimização da estimativa de propriedades térmicas. Uma revisão sobre as técnicas de otimização de experimento é realizada em 1998 por Emery e Nenarokomov [92].

Em conclusão sobre as técnicas de solução do problema inverso, quando maior é o número de parâmetros a estimar e maior o número de medidas, mais avançada deve ser a técnica a utilizar. A técnica de estimativa mais poderosa é aquela capaz de combinar e associar as qualidades referentes às técnicas citadas acima.

## 2.4 Técnicas Experimentais

### 2.4.1 Identificação simultânea de propriedades termofísicas e radiativas

A identificação simultânea das propriedades termofísicas (condutividade térmica e calor específico) e radiativas (coeficiente de absorção e de espalhamento) de materiais semitransparentes foi experimentada a altas temperaturas (até 1600 K) por Matthews *et*

al. [93] e Nenarokomov e Alifanov [94]. No experimento de Matthews *et al.* [93], uma amostra de material fibroso semitransparente (zircônio) foi submetida a um fluxo solar. A energia transmitida foi medida, assim como o histórico de temperatura, na tentativa de estimar a condutividade térmica, a capacidade térmica e os coeficientes de absorção e de espalhamento totais. No experimento de Nenarokomov e Alifanov [94], condutividade térmica, a capacidade térmica volumétrica e a emissividade dependem da temperatura. Estas propriedades foram determinadas a partir do *Método de Gradiente Conjugado*.

Os trabalhos apresentados acima possuem grandes limitações. Primeiro a temperatura interna é medida através de termopares, que interferem sobre o campo radiativo e conseqüentemente sobre o campo de temperatura. Tais técnicas não permitem atingir conseqüentemente as altas temperaturas ( $> 1500$  K) e identificar as propriedades perto do ponto de fusão. Em segundo lugar, a estimativa simultânea das propriedades se restringe a um número pequeno de parâmetros. Por exemplo, a aplicação das técnicas citadas para os materiais ortotrópicos ou anisotrópicos não permitiria identificar as componentes espectrais das propriedades radiativas, nem as componentes da condutividade térmica.

Este número pequeno de trabalhos revela a dificuldade de conceber um equipamento capaz de fornecer medidas sensíveis tanto às propriedades termofísicas quanto às propriedades radiativas simultaneamente. Para identificar propriedades radiativas, deve-se favorecer a extração de uma informação de origem radiativa, que normalmente é desprezada na identificação acurada das propriedades condutivas; e vice-versa. Por exemplo, a intensidade radiativa saindo de um meio semitransparente, útil para identificação das propriedades radiativas, pode ser vista como uma informação parasita na medição de temperatura por pirometria ótica, necessária para a identificação da difusividade térmica. É preferível então separar o procedimento de identificação em dois experimentos distintos. Um experimento terá por função de reproduzir um problema onde os fenômenos de condução e difusão serão importantes em vista da transferência de calor por radiação. O outro experimento terá de discriminar os efeitos de difusão de calor e valorizar as transferências radiativas.

## 2.4.2 Identificação de propriedades termofísicas

Dentro dos experimentos utilizados na identificação de propriedades termofísicas e aplicáveis a altas temperaturas, encontra-se o famoso *Método Flash*. Criado por Parker *et al.* [95], em 1961, o método é capaz de medir a difusividade térmica, e por extensão a condutividade e a capacidade térmica volumétrica, de materiais opacos a temperatura ambiente em apenas alguns segundos. O método consiste em irradiar durante um tempo curto (da ordem de 1 ms) uma placa fina de material com um fluxo uniforme. A faixa de funcionamento do experimento cobre todo tipo de materiais, como os isolantes térmicos e os condutores (metais). No entanto, o método requer que a amostra esteja perfeitamente isolada. Neste sentido, o método sofreu mudanças na formulação do modelo direto de maneira a incluir as perdas de calor por convecção [96-98], e até por radiação [99]. Uma revisão bibliográfica completa do método Flash esta disponível no artigo de Pinto *et al.* [100].

Recentemente, foi investigada a possibilidade de identificar as propriedades termofísicas de materiais semitransparentes [35,101,102]. O experimento mais completo foi proposto por Lazard *et al.* [102]; ele permite a identificação das propriedades termofísicas para materiais semitransparentes a altas temperaturas (até 1500 K) e inclui longos estudos preliminares [103-106] na área dos meios semitransparentes. As propriedades identificadas são a condutividade, a capacidade térmica e o coeficiente de extinção, que são recalculadas a partir do conhecimento da difusividade térmica, do número de Planck e da espessura ótica. O corpo de prova pode ser pintado de ouro ou de tinta de grafite (apesar da tinta preta ser preconizada).

O método Flash, freqüentemente utilizado para materiais isotrópicos, não se presta à identificação de propriedades termofísicas de materiais ortotrópicos e anisotrópicos. Neste sentido, alguns trabalhos [107,110] propõem equipamentos capazes de estimar simultaneamente as componentes do tensor (ou vetor) de condutividade térmica. Dowding *et al.* [107], identificaram as componentes bidirecionais de uma matriz de carbono. O experimento permitiu relacionar a evolução da condutividade com a temperatura até uma temperatura de 650 K. No equipamento, uma placa-resistência é presa entre duas amostras de material (compósito de carbono) idênticas, elas mesmas presas entre dois blocos de cerâmica isolantes. A resistência libera durante um passo delimitado em tempo um fluxo constante, em parte da amostras de carvão. No total, 14

termopares gravam o histórico da evolução da temperatura nas interfaces resistência-carbono e carbono-cerâmica.

Outra alternativa experimental desenvolvida foi a técnica “Flying Spot” [108-110], que permite evitar qualquer contato com a amostra. O experimento consiste em aquecer pontualmente uma placa de material anisotrópico por um laser em movimento. Uma cartografia do campo de temperatura é efetuada em função do tempo por tomografia infravermelha, permitindo a caracterização das propriedades termofísicas do material com relação às direções transversais. No experimento de Griesinger *et al.* [110], a difusividade térmica de filmes de materiais anisotrópicos foi estimada a temperatura ambiente. O método fornece resultados com pequena incerteza tanto para os materiais isolantes (PVC, PET) quanto para os condutores (Aço).

Modelos matemáticos otimizados, baseados no princípio de funcionamento do experimento de Dowding *et al.* [107], foram desenvolvidos em paralelo: Sawaf *et al.* [111] e Sawaf e Ozişik [112] propõem aquecer, com fluxo constante, duas ou três superfícies perpendiculares (para domínios bi e tridimensional respectivamente) de um paralelepípedo de material, sendo as outras faces isoladas. A temperatura lida no centro das faces isoladas em função do tempo possui assim um grau de confiança maior. Mejias *et al.* [113] indicaram a escolha das dimensões da amostra e os fluxos a serem aplicados em função da raiz quadrada da condutividade do material nas direções de preferência. Rodrigues *et al.* [114] estimaram as componentes da condutividade de um sólido ortotrópico, aquecendo uma só face da amostra, mas perdendo exatidão nos resultados.

A experimentação prática de tais modelos a altas temperaturas se demonstra bastante complexa. Qualquer tipo de contato deve ser evitado por se lidar com materiais semitransparentes. Também, quando se estudam materiais isolantes, que é um exemplo bastante comum, é necessário fabricar corpos de prova da dimensão da ordem do milímetro, tendo de aquecer, isolar e ler a temperatura simultaneamente em várias faces do corpo fabricado. Conseqüentemente, o princípio do método *Flying Spot* foi explorada neste trabalho para construir um equipamento destinado à estimativa de propriedades termofísicas de materiais ortotrópicos a altas temperaturas.

### 2.4.3 Identificação de propriedades radiativas

A caracterização experimental de propriedades radiativas foi pouca investigada. À temperatura ambiente, as informações radiativas disponíveis a partir um material semitransparente se resumem à refletividade (hemisférica e especular) e à transmissividade (também hemisférica e especular) [115]. O fenômeno de emissão do material, portanto, é desprezado. Neste sentido, encontramos dois tipos experimentos.

O primeiro experimento consiste em medir as refletividades e transmissividades monocromáticas e direcionais de uma amostra plana [116], de espessura pequena, colocada dentro de um espectrômetro, que percorre tipicamente a faixa infravermelha de frequências 1–20  $\mu\text{m}$ . Tais trabalhos foram realizados por Nicolau [117,118], Moura [119] e Cunnington e Lee [120], sobre isolantes a base de fibras de vidro; por Doermann [121], Moura [119] e Baillis *et al.* [122] sobre espumas de carvão isolantes; por Baillis *et al.* [123] e Baillis e Sacadura [124] sobre espumas de Poliuretano; e por Hendricks e Howell [125] e Hahn *et al.* [33] sobre cerâmicas. Das medidas de refletividade e de transmissividade consegue-se estimar o coeficiente de extinção, o albedo e a função de fase, quando esta é modelada em termo de funções de Henyey-Greestein [117] ou de polinômios de Legendre [115].

Sobre um princípio parecido, Ou e Wu [126] propõem trabalhar sobre um corpo de prova de geometria cilíndrica. Um feixe colimado impacta lateralmente o corpo de prova, e vários detectores situados ao redor da amostra medem a energia radiativa emergente, distribuída no plano azimutal. Deste procedimento, que não foi testado na prática, consegue-se identificar o coeficiente de extinção, o albedo e a função de fase, desde que a profundidade ótica não seja alta. Em geral, foi determinado que o perfil da função de fase não tem influência significativa sobre a estimativa. A confiança nos resultados diminui também com o aumento da espessura ótica do meio.

Por uma questão técnica, a construção de um equipamento para a medição das refletividades e transmissividades a altas temperaturas é atualmente irrealizável: a intensidade radiativa emitida por um material a altas temperaturas é bem superior à intensidade transmitida, previamente liberada pela fonte monocromática de um espectrômetro. Além disso, o módulo de aquecimento da amostra [127], e o módulo de leitura das refletividades e transmissividades (espectrômetro) não podem ocupar o

mesmo lugar. Por estes motivos, a identificação das propriedades radiativas se realiza a partir de medidas alcançáveis a altas temperaturas: o fator de emissão [127].

#### 2.4.4 Perspectivas experimentais para a identificação de propriedades térmicas

O objetivo deste trabalho é planejar experimentos para identificação das propriedades térmicas de materiais a altas temperaturas. Tendo em consideração que os materiais são tri-dimensionais semitransparentes e ortotrópicos, um maior número de parâmetros que nos trabalhos de Mathews *et al.* [93] e Nenarokomov e Alifanov [94] precisa ser estimado. Devido ao número elevado de propriedades, dois experimentos são planejados com objetivo de estimar respectivamente as propriedades condutivas e radiativas. Tal estudo envolve a análise dos coeficientes de sensibilidade de medidas de temperatura em um experimento e de fator de emissão em outro experimento. Além disso, são analisados procedimentos para a otimização de experimentos, bem como são analisados e comparados métodos de solução de problemas inversos de estimativa de parâmetros. Especificamente, as contribuições deste trabalho são:

- a adaptação do método Flash para a identificação de propriedades termofísicas de materiais semitransparentes ortotrópicos a altas temperaturas,
- a utilização de um experimento de medição do fator de emissão espectral e direcional de amostras de materiais semitransparente para a tentar estimar suas propriedades radiativas espectrais,
- a formulação do método de volumes finitos para a solução do problema tri-dimensional de acoplamento-condução radiação,
- a análise dos coeficientes de sensibilidade com respeito aos dois experimentos planejados para determinar as condições de identificação das propriedades,
- a comparação dos critérios D-ótimo e E-ótimo para determinar as condições experimentais que resultam na estimativa dos parâmetros com a menor incerteza,
- a comparação de métodos híbridos determinísticos/estocásticos de estimativa para garantir a identificação dos parâmetros exatos, com maior velocidade e estabilidade máxima.

# Capítulo 3

## Problemas Físicos e Formulações Matemáticas

### 3.1 Descrição dos Experimentos

Nesta seção são descritos os experimentos propostos para a obtenção, primeiro, de medidas de temperatura transiente e, segundo, de fator de emissão, na tentativa de estimar respectivamente as propriedades condutivas e as propriedades radiativas. Tais experimentos são designados, respectivamente, experimento 1 e experimento 2. O experimento 1 não foi realizado e deve ser interpretado como uma proposição de experimento. Ao contrário, o experimento 2 já foi montado para medir o fator de emissão de materiais semitransparentes. Porém, não foram feitos estudos para analisar a possibilidade de estimar propriedades radiativas usando medidas de fator de emissão.

#### 3.1.1 Experimento 1

A técnica flash unidimensional foi amplamente utilizada na estimativa da difusividade térmica de materiais. Neste trabalho consideram-se modificações no método Flash, a fim de possibilitar a estimativa simultânea das propriedades condutivas em um meio ortotrópico tri-dimensional. O experimento descrito aqui não foi de fato realizado. No entanto é importante trabalhar-se com situações físicas possíveis. Sendo assim, consideram-se abaixo modificações necessárias ao método Flash, que podem ser realizadas com os recursos tecnológicos atuais, tendo em vista a estimativa dos parâmetros em questão (ver figura 3.1.1).

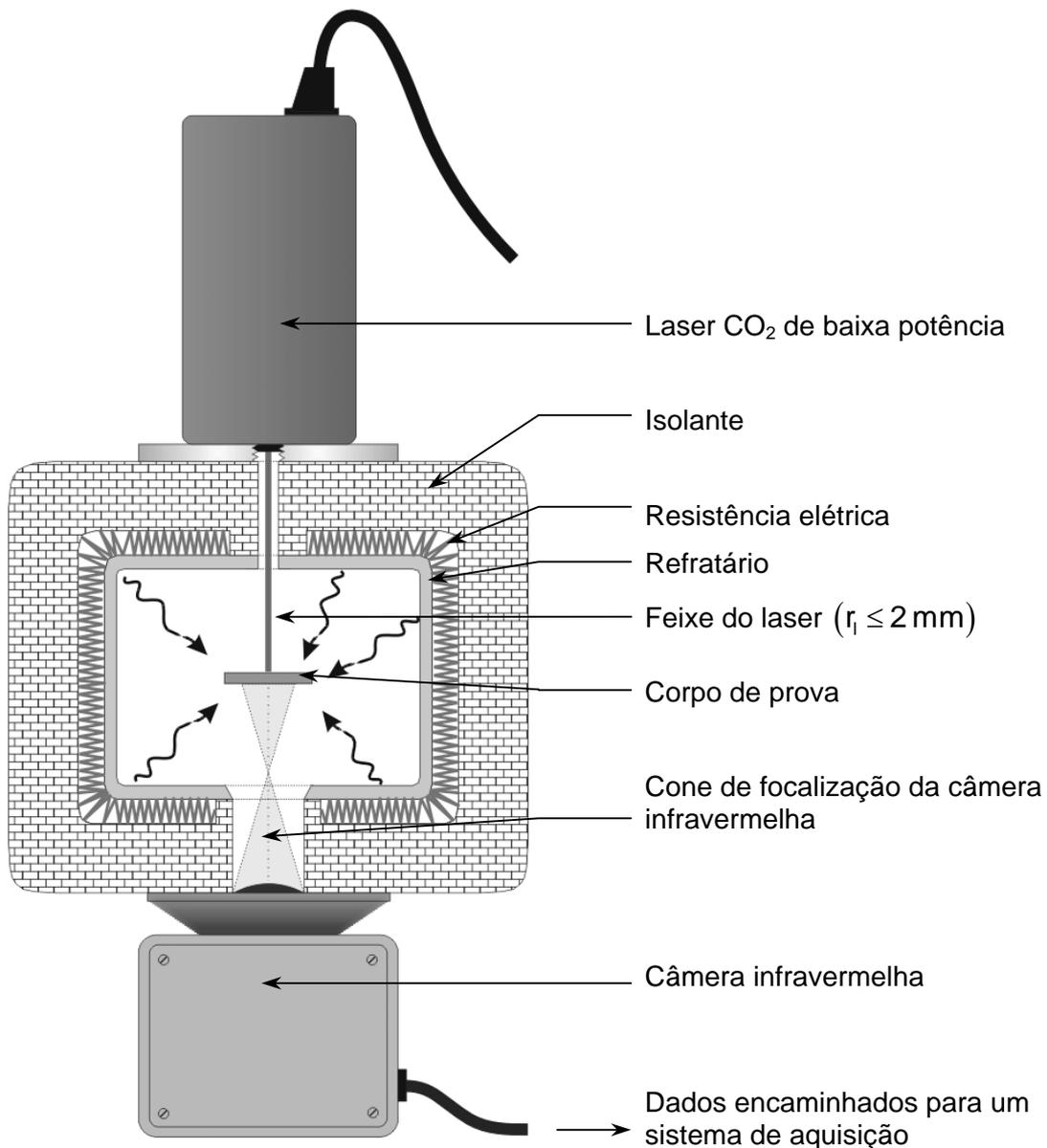
- (i). Um forno elétrico é capaz de manter a temperatura da amostra uniforme, no intervalo de temperatura variando tipicamente de 1000 a 2000 K. Este deve possuir duas aberturas, situadas respectivamente no topo e na base da câmara, dedicados a passagem do fluxo laser para o aquecimento da amostra e à medição de temperatura a distância.

(ii). A lâmpada de xenônio, geralmente utilizada para gerar o impulso, é trocada por um laser a gás  $\text{CO}_2$  de potência média ( $Q_l \approx 1 \text{ W}$ ). A utilização direta do feixe permite focalizar o mesmo e perturbar localmente o campo de temperatura no centro da amostra. O fenômeno de difusão 3D é assim criado para favorecer a identificação das componentes da condutividade térmica. A duração do impulso é regulada, de maneira a investigar o tempo de aquecimento mais apropriado para a estimativa (ver Capítulo 6).

(iii). Uma câmera infravermelha focaliza através da abertura do forno a face do corpo de prova oposta ao impulso (chamada superfície inferior). A câmera permite a gravação da temperatura de um a vários pontos de interesse, variando com o tempo. A câmera infravermelha possui várias vantagens diretamente relacionadas a sua matriz de sensores. Os erros de posição, por exemplo, são descartados devido ao espaçamento conhecido dos sensores. Da mesma maneira, a dimensão reduzida de um sensor permite focalizar uma região do corpo de prova pequena, onde a temperatura pode ser suposta uniforme. Em terceiro lugar, o campo de temperatura inicial e a diferença de temperatura entre vários pontos podem ser obtidos relacionando os sinais dados pelos sensores entre si. Tal procedimento permite detectar a presença de um gradiente inicial de temperatura e contornar os seus efeitos.

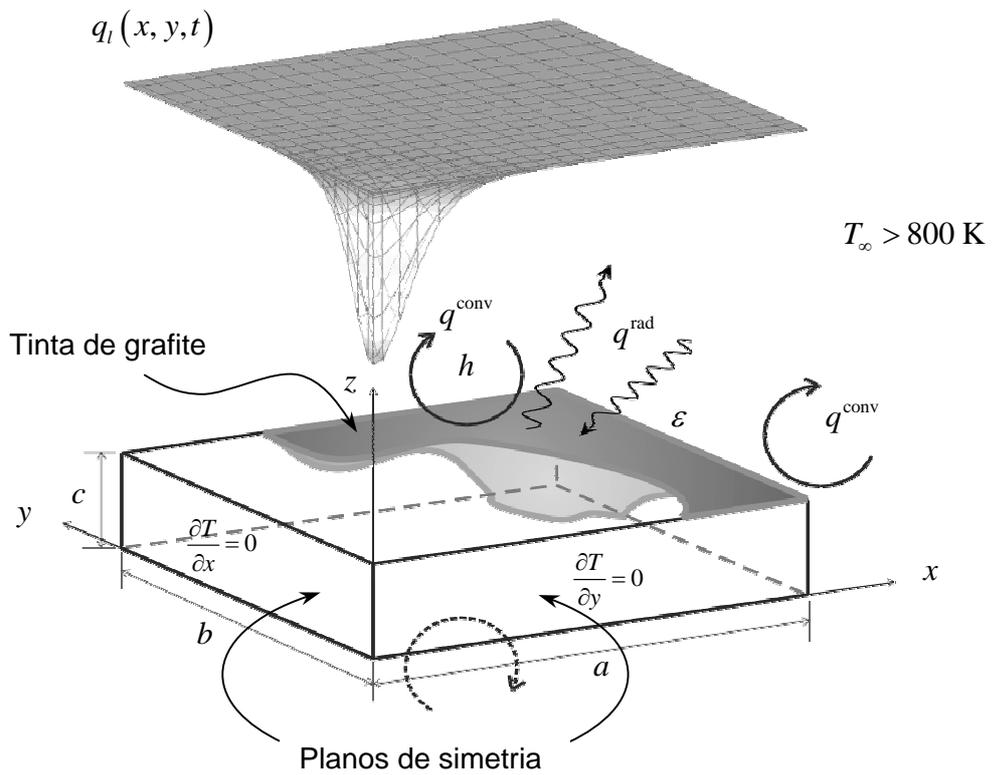
O corpo de prova, inicialmente previsto para ser utilizado no equipamento, apresenta-se no formato de um paralelepípedo de seção quadrada, de comprimento e de largura da ordem de 1 centímetro e de espessura da ordem de um milímetro. Portanto, é extremamente importante determinar previamente as direções principais de difusão térmica na preparação do corpo de prova. Tal como no método Flash tradicional, o corpo de prova é revestido por uma tinta de grafite a fim de aumentar a absorvidade e a emissividade da superfície.

As medições consistem na leitura da variação de temperatura em vários pontos da superfície não-aquecida da amostra. A frequência de medidas é escolhida dependendo de uma análise de projeto ótimo, que será concluída no Capítulo 6.

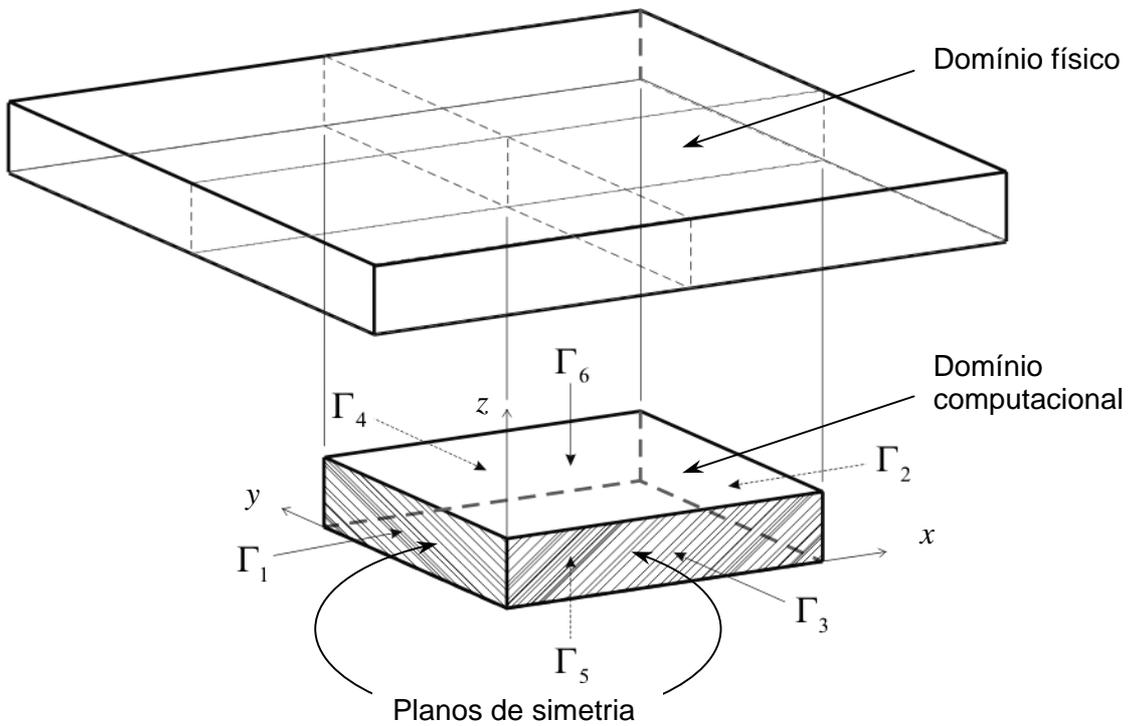


*Figura 3.1.1: Bancada experimental prevista para a realização de medidas de temperatura em materiais ortotrópicos a altas temperaturas.*

No experimento de medição de temperatura em situação transiente, o problema matemático para caracterização térmica do comportamento da amostra é definido como Problema 1. Este problema é derivado em coordenadas cartesianas (ver figura 3.1.2). Quando o problema físico é definido no sistema de coordenadas cartesianas, planos de simetria permitem que o problema seja resolvido em apenas um quarto do corpo de prova, como mostra a figura 3.1.3.



*Figura 3.1.2: Representação do problema matemático 1 em coordenadas cartesianas.*



*Figura 3.1.3: Relação entre o domínio físico e o domínio computacional em coordenadas cartesianas.*

No problema 1, o modelo radiativo é parcialmente reduzido seguindo as mesmas hipóteses de Lazard *et al.* [102], que consideraram o meio cinza por bandas, e os coeficientes radiativos calculados seguindo o modelo aproximado do coeficiente médio de absorção de Rosseland [32,128]. O meio cinza por bandas é um artifício para representar um meio real, que às vezes possui um comportamento espectral extremamente descontínuo. Ele contribui para simular, com um número de parâmetros menor, fenômenos radiativos idênticos, ou pelo menos aproximados, que ocorrem num meio não cinza. Portanto, ele é muito utilizado na engenharia para reduzir o custo computacional.

O procedimento de identificação, em conclusão, utiliza o problema 1 como modelo direto na identificação das propriedades termofísicas do material estudado.

### 3.1.2 Experimento 2

O segundo equipamento é utilizado para a medição indireta do fator de emissão de materiais semitransparentes a altas temperaturas. Ele é composto de um sistema de aquecimento desenvolvido por Lopes [127] e de um radiômetro HEIMANN de modelo KT4S, destinado a gravar o fluxo espectral saindo da amostra e contido no cone de focalização delimitado pelo sistema ótico do aparelho. Vários filtros interferenciais equipam o radiômetro de modo a filtrar o fluxo radiativo em determinados comprimentos de onda desejados. No experimento 2, os filtros relativos aos comprimentos de onda  $\lambda = 2, 3, 4, 5, 6$  e  $10 \mu\text{m}$  são disponíveis. Se o cone for considerado suficientemente estreito, este fluxo assemelha-se à intensidade radiativa, que depende do comprimento de onda, da profundidade ótica do meio, do ângulo de observação e da temperatura.

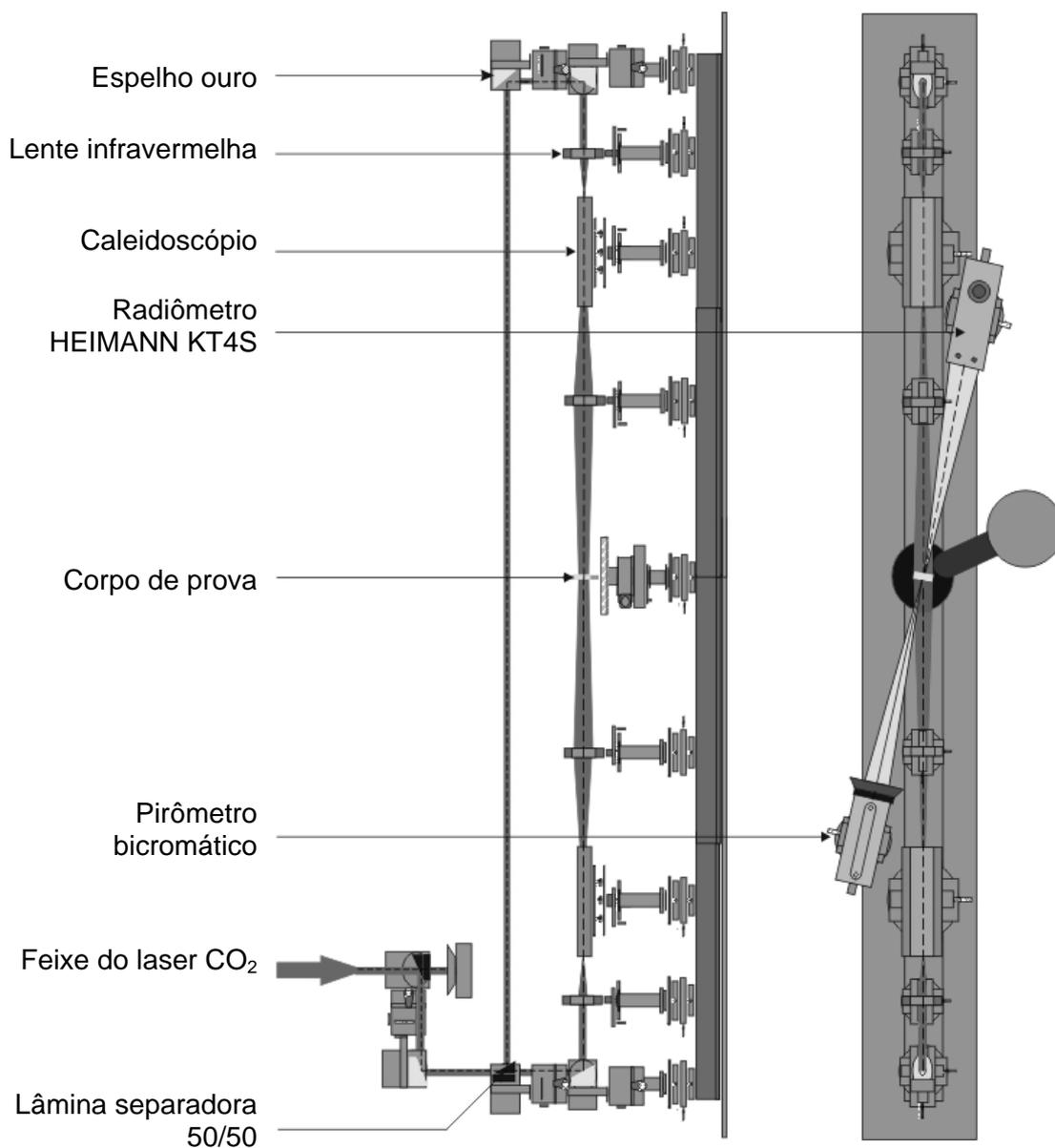
O fator de emissão é obtido indiretamente. Conseqüentemente, o radiômetro é colocado em segundo tempo em frente a um corpo negro previamente aquecido à temperatura da amostra. O espectrômetro realiza então outra gravação da radiação emitida pelo corpo negro, na faixa total de frequências. O fator de emissão é obtido da equação (3.1.1) [127]. Ele depende do comprimento de onda, da profundidade ótica do meio, do ângulo de observação e da temperatura:

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda(\tau_0, \psi, \theta, T) = \frac{I_\lambda(\tau_0, \psi, \theta, T)}{I_{b\lambda}(T)} \quad (3.1.1)$$

A temperatura  $T$  da amostra de material precisa ser medida a partir da análise de fluxo radiativo na faixa de comprimentos de onda de 8 a 20  $\mu\text{m}$ , usando o princípio da pirometria bicromática [129].

O sistema desenvolvido por Lopes [127] no CETHIL (Centre de Thermique de Lyon) do INSA de Lyon tem por objetivo gerar um campo de temperatura uniforme, tipicamente situada na faixa de 1000 a 2000 K, em uma amostra de material semitransparente e de dimensões conforme mencionado no experimento 1. A amostra possui as mesmas características geométricas, embora não deva sofrer nenhum tratamento superficial como, por exemplo, a aplicação de uma tinta opaca. Ao contrário, a aplicação de tinta dificulta o acesso à informação de interesse: a intensidade radiativa emitida pelo corpo semitransparente.

A fonte externa de calor é gerada pela interação do meio com um feixe de laser  $\text{CO}_2$ . A função de repartição inicial do feixe, suposta gaussiana, é modificada em seguida, de maneira a reproduzir uma função quadrada com a maior fidelidade. Finalmente, a função de repartição final é obtida utilizando o princípio da segmentação e recombinação do motivo inicial (função gaussiana) dado no plano objeto do sistema ótico de transformação, composto de duas lentes e de um caleidoscópio [127,129-134]. A aplicação do fluxo de repartição homogeneizada nas faces principais do corpo de prova garante a produção de uma temperatura uniforme na região do centro da amostra. Segundo [33,127,135], a radiação monocromática referente ao comprimento de onda característico do  $\text{CO}_2$ ,  $\lambda_l = 10.6 \mu\text{m}$ , é altamente absorvida para os materiais investigados (cerâmicas, refratários, vidros, etc.), de modo que o calor é gerado exclusivamente do contorno. A bancada experimental de medida de fator de emissão é ilustrada na figura 3.1.4. Nota-se que o corpo negro, apesar de fazer parte da bancada experimental, não aparece no desenho.



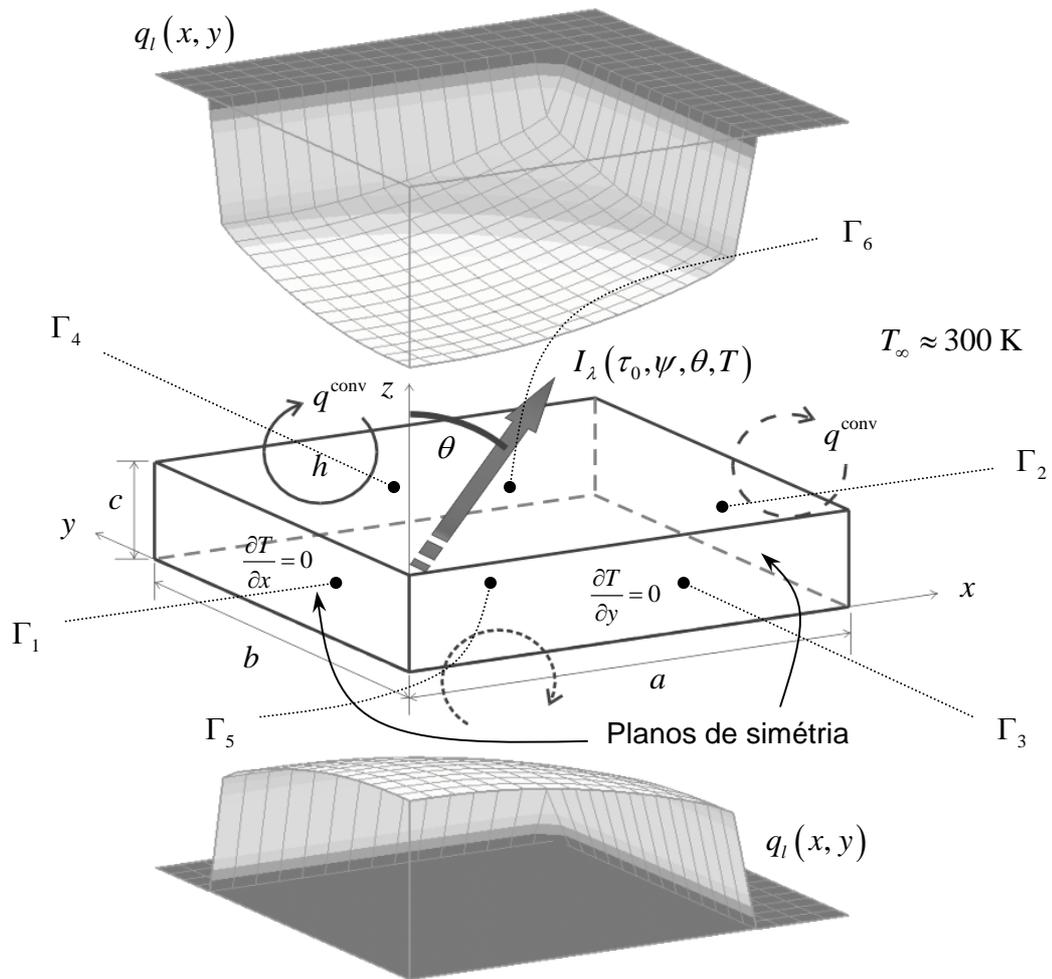
*Figura 3.1.4: Bancada experimental de medida de fator de emissão de materiais a altas temperaturas.*

Igualmente ao experimento de medição de temperatura, formula-se um problema matemático chamado Problema 2, que caracteriza o estado térmico da amostra durante o experimento de medida de fator de emissão. O problema 2 é também formulado em coordenadas cartesianas (ver figura 3.1.5). Tal como no problema 1, o domínio de cálculo do problema 2 inclui apenas um quarto do corpo de prova. Nota-se que o problema 2 é simétrico na direção  $z$  e que um plano de simetria pode ser considerado em  $z^* = c^*/2$ . Porém, uma plataforma de cálculo única é utilizada para resolver os problemas 1 e 2 e este último plano de simetria não entra como condição de contorno.

Na análise a ser realizada neste trabalho, as medidas de fator de emissão espectrais e direcionais são escolhidas como fonte de informação para o problema inverso de estimativa de parâmetros radiativos. Estes parâmetros são:

- os coeficientes de absorção radiativa monocromáticos,
- os coeficientes de espalhamento radiativa monocromáticos,
- os coeficientes entrando na formulação da função de fase monocromática.

Os parâmetros monocromáticos são variáveis da Equação de Transferência Radiativa.



**Figura 3.1.5:** Representação do problema matemático 2 em coordenadas cartesianas.

## 3.2 Acoplamento Condução-Radiação

Esta seção tem por objetivo descrever a transferência de calor acoplada por condução e por radiação em um meio semitransparente, assim como apresentar as equações governantes para os problemas 1 e 2.

### 3.2.1 Equação de transferência radiativa

O balanço dos mecanismos de interação da radiação com um meio semitransparente homogêneo, que absorve, emite e espalha a radiação, conduz à expressão da Equação de Transferência Radiativa (ETR) não transiente para um determinado comprimento de onda  $\lambda$  [128]:

$$\Omega \cdot \nabla I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) = - \underbrace{(\kappa_{a\lambda} + \sigma_{s\lambda})}_{\text{atenuação por absorção e espalhamento}} I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) + S_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) \quad (3.2.1.a)$$

$$\text{onde} \quad S_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) = \underbrace{\kappa_{a\lambda} I_{b\lambda}(\mathbf{r}, T)}_{\text{aumento por emissão}} + \underbrace{\frac{\sigma_{s\lambda}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega') p_\lambda(\Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega'}_{\text{contribuição do espalhamento}} \quad (3.2.1.b)$$

$I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega)$  é a intensidade radiativa monocromática irradiando a partir do ponto de posição  $\mathbf{r}$  na direção sustentada pelo vetor  $\Omega$ .  $S_\lambda(\mathbf{r}, \Omega)$  é chamado de termo-fonte, por ser composto de um termo de emissão –função da intensidade radiativa  $I_{b\lambda}(\mathbf{r}, T)$ , emitida localmente pelo corpo negro– e de um termo de redistribuição da energia espalhada, reforçando a energia radiativa na direção  $\Omega$ . A função de fase espectral  $p_\lambda(\Omega' \rightarrow \Omega)$  é uma função que pondera a redistribuição radiativa na direção  $\Omega$ .  $\kappa_{a\lambda}$  e  $\sigma_{s\lambda}$  são os coeficientes de absorção e de espalhamento monocromático; os termos compostos desses coeficientes são termos de atenuação da energia radiativa na direção  $\Omega$ .

A ETR foi expressa em função do comprimento de onda  $\lambda$  de maneira a padronizar este texto com as notações geralmente utilizadas na literatura. Porém, quando a intensidade monocromática  $I(\mathbf{r}, \Omega)$  em uma determinada direção  $\Omega$  atravessa meios de propriedades óticas diferentes, a velocidade  $c$  de propagação da intensidade evolui com inverso da parte real do índice de refração do meio  $\tilde{n}_r = n_r - ik_r$ , segundo a equação (3.2.2):

$$c = \frac{c_0}{n_r} \quad (3.2.2)$$

onde  $c_0 = 2.9979 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$  é a velocidade da luz no vácuo. Portanto, o comprimento de onda é sujeito a modificações em função das propriedades do meio atravessado, sendo a frequência  $\nu$  (Hz) da intensidade radiativa mantida constante:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c_0}{n_r \nu} \quad (3.2.3)$$

Costuma-se usar também o número de onda  $\nu(\text{cm}^{-1}) = \lambda(\mu\text{m})/10^4$  na área de transferência radiativa por ser uma grandeza diretamente proporcional a energia radiativa transferida. O número de onda não será usado neste texto.

Para calcular a intensidade radiativa emitida por um corpo negro, usa-se a lei de Lambert que liga poder emissivo e intensidade radiativa para uma superfície de emissão isotrópica:

$$E_{b\lambda}(T, \lambda) = \pi I_{b\lambda}(T, \lambda) \quad (3.2.4)$$

O poder emissivo de um corpo negro em uma frequência específica foi dado por Planck em 1901 [128]:

$$E_{b\nu}(T, \nu) = \frac{2\pi H n_r^2 \nu^3}{c_0^2 \left[ \exp\left(\frac{H\nu}{KT}\right) - 1 \right]} \quad (3.2.5)$$

onde  $K = 1.3805 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$  é a constante de Boltzmann e  $H = 6.6255 \times 10^{-34} \text{ J.s}$  a constante de Planck.  $n_r$  representa a parte real do índice de refração do meio semitransparente envolvendo o corpo negro de temperatura  $T$ , dada em graus Kelvin. Transformando a equação (3.2.5) em função do comprimento de onda, e introduzindo duas constantes físicas  $C_1 = 2\pi H c_0^2 = 3.7419 \times 10^{-8} \text{ W.}\mu\text{m}^4.\text{m}^{-2}$  e  $C_2 = H c_0 / K = 14388 \text{ }\mu\text{m.K}$ , obtemos uma nova expressão do poder emissivo monocromático do corpo negro envolvido por um meio semitransparente homogêneo ( $n_r = \text{const.}$ ):

$$E_{b\lambda}(T, \lambda) = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{n_r^2 \left[ \exp\left(\frac{C_2}{n_r \lambda T}\right) - 1 \right]} \quad (3.2.6)$$

As equações (3.2.5) e (3.2.6) são diferentes pelo motivo de que  $d\nu = -(c_0/n_r \lambda^2) d\lambda$  [128].

Para meios semitransparentes de comportamento espectral contínuo, o modelo “cinza por banda” costuma ser aplicado [2,26,31-33,36,102]. O modelo cinza por banda

tem por objetivo discretizar o comportamento espectral do meio em bandas cinzas. Portanto, a seguinte integral total é aproximada em termo de um somatório:

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} \alpha_{\lambda} I_{\lambda} d\lambda = \sum_{m=1}^{N_f} \alpha_m I_m \quad (3.2.7)$$

As bandas  $\Delta\lambda_m = [\lambda_m^-, \lambda_m^+]$  são numeradas pela letra  $m$ .  $N_f$  representa o número de bandas necessário para analisar o espectro total.  $\alpha_m$  é o valor médio de uma propriedade radiativa  $\alpha$  de escolha calculado no intervalo  $\Delta\lambda_m = [\lambda_m^-, \lambda_m^+]$  de uma determinada banda  $m$ . Nota-se que existem três formas de calcular o valor médio do parâmetro  $\alpha$  numa banda de frequência [32,128], conhecidas como a média aritmética, e as médias baseadas nos modelos do coeficiente de absorção de Planck e de Rosseland, ambas ponderadas pela emissão do corpo negro.

Para usar a equação (3.2.7), é preciso integrar a intensidade radiativa sobre as bandas  $m = 1, \dots, N_f$  [32]:

$$I_m = \int_{\lambda_m^-}^{\lambda_m^+} I_{\lambda} d\lambda \quad (3.2.8)$$

Por extensão, a integração espectral da ETR em uma banda de frequências requer a integração espectral da função de Planck. Esta integral, dada exclusivamente para o espectro total, é proporcional a quarta potência da temperatura, o que mostra a importância da transferência de calor por radiação a altas temperaturas [128]:

$$E_b(T) = \int_{\lambda=0}^{\infty} E_{b\lambda}(T, \lambda) d\lambda = n_r^2 \sigma T^4 \quad (3.2.9)$$

Durante a avaliação analítica da integral acima, aparece uma constante  $\sigma = \frac{\pi^4 C_1}{15C_2} = 5.6705 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$  chamada “constante de Stefan-Boltzmann”. Embora a integração total da lei de Planck seja possível, a sua integração sobre uma banda de frequência não pode ser calculada analiticamente. Por isso, a integral parcial sobre uma banda de frequência costuma se expressar em função da “função de radiação do corpo negro” definida como:

$$F_{0 \rightarrow \lambda T} = \frac{\int_0^{\lambda} E_{b\lambda}(T, \lambda) d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{b\lambda}(T, \lambda) d\lambda} \quad (3.2.10)$$

Uma maneira simples de calcular a função de radiação do corpo negro foi desenvolvida por Chang e Rhee [136], dando uma solução exata através de um somatório infinito que converge geralmente para  $n > 4$ :

$$F_{0 \rightarrow \lambda T} = \frac{15}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{e^{-nx}}{n} \left( x^3 + \frac{3x^2}{n} + \frac{6x}{n^2} + \frac{6}{n^3} \right) \right] \quad (3.2.11)$$

onde  $x = C_2/\lambda T$ . Assim, o fluxo radiativo emitido pelo corpo negro sobre o intervalo de comprimentos de onda  $\Delta\lambda_m = [\lambda_m^-, \lambda_m^+]$  se escreve em termo da função de radiação do corpo negro:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_m^-}^{\lambda_m^+} E_{b\lambda}(T, \lambda) d\lambda &= \left( F_{0 \rightarrow \lambda_m^+ T} - F_{0 \rightarrow \lambda_m^- T} \right) \int_{\lambda=0}^{\infty} E_{b\lambda}(T, \lambda) d\lambda \\ &= F_{\lambda_m^- T \rightarrow \lambda_m^+ T} n_r^2 \sigma T^4 \\ &= F_m(T) n_r^2 \sigma T^4 \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Finalmente, integrando a ETR sobre o espectro total, e substituindo na equação (3.2.1) as equações (3.2.7) e (3.2.12), obtemos a ETR para uma banda  $m$ :

$$\Omega \cdot \nabla I_m(\mathbf{r}, \Omega) = -(\kappa_{am} + \sigma_{sm}) I_m(\mathbf{r}, \Omega) + S_m(\mathbf{r}, \Omega) \quad (3.2.13.a)$$

$$\text{onde} \quad S_m(\mathbf{r}, \Omega) = \kappa_{am} I_{bm} + \frac{\sigma_{sm}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I_m(\mathbf{r}, \Omega') p_m(\Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega' \quad (3.2.13.b)$$

$$\text{e onde} \quad I_{bm} = \frac{F_m(T) n_r^2 \sigma T^4}{\pi} \quad (3.2.13.c)$$

é a intensidade radiativa do corpo negro na banda  $m$ .

### 3.2.2 Equação de condução do calor

O outro modo de transferência de calor em um sólido em repouso é a condução. Para estabelecer a equação de conservação da energia sem termo fonte e sem transporte por convecção, tem de se especificar o balanço entre a energia acumulada em um volume elementar  $dV$  de material semitransparente homogêneo e a energia transferida por condução e por radiação, em situação de regime transiente [137]:

$$C \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot (q^{\text{cond}} + q^{\text{rad}}) \quad (3.2.14)$$

$\mathbf{r}$  caracteriza as coordenadas do volume elementar  $dV$  no sólido e  $t$  representa a variável temporal.  $C$  representa a capacidade térmica volumétrica, expressada em

$\text{J/m}^3\cdot\text{K}$ . A expressão do divergente do fluxo condutivo dentro do volume é obtida usando a lei de Fourier:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{cond}} = -\nabla \cdot (k \nabla T(\mathbf{r}, t)) \quad (3.2.15)$$

e a expressão do divergente do fluxo radiativo é dada integrando o termo fonte da ETR  $S_\lambda$  sobre o ângulo sólido total de valor  $4\pi$  e no espectro:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{rad}} &= \int_{\lambda=0}^{\infty} \kappa_{a\lambda} [4\pi I_{b\lambda}(\mathbf{r}, T) - G_\lambda(\mathbf{r})] d\lambda \\ &= \int_{\lambda=0}^{\infty} \kappa_{a\lambda} \left[ 4\pi I_{b\lambda}(\mathbf{r}, T) - \int_{\Omega=4\pi} I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega \right] d\lambda \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

$G_\lambda(\mathbf{r})$  é a radiação incidente monocromática convergindo num ponto de posição  $\mathbf{r}$ . Aplicando do modelo cinza por banda, o divergente do fluxo radiativo se transforma em:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}^{\text{rad}} = \sum_{m=1}^{N_f} \kappa_{am} \left[ 4\pi I_{bm} - \int_{\Omega=4\pi} I_m(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega \right] \quad (3.2.17)$$

As equações (3.2.13) e (3.2.14) não podem ser resolvidas no domínio sem a especificação de condições nas fronteiras. Da mesma forma, uma condição inicial, dada pela distribuição inicial de temperatura no domínio, é necessária para a solução do problema de condução de calor.

### 3.2.3 Condições de contorno radiativas

Para determinar o campo radiativo dentro do domínio, é preciso primeiro estabelecer o campo de intensidade nas fronteiras. Efetivamente, uma vez conhecida a intensidade radiativa no contorno para uma direção específica  $\Omega$ , a reconstrução do campo radiativo no domínio se faz por solução direta da ETR, isto é, no sentido da propagação da intensidade. Nota-se que, fora de raros casos onde a ETR é considerada transiente, o problema radiativo investigado neste texto não precisa de condição inicial. A propagação da radiação é portanto considerada instantânea. Os tipos de condições de contorno radiativas que se encontram no problema são:

- 1) a condição transparente com mudança de índice de refração para as fronteiras do corpo de prova em contato direto com o ar,
- 2) a condição opaca, difusa em reflexão e emissão (superfície de Lambert) quando a fronteira é pintada por uma tinta opaca de tipo grafite e

- 3) a condição de reflexão especular quando planos de simetria são considerados. Esta última condição não representa fronteiras físicas, mas sim um artifício matemático para ajudar a solução do problema.

A seguir é apresentada a formulação das condições de contorno.

### 3.2.3.1 Fronteira semitransparente com mudança de índice de refração

A fronteira semitransparente com mudança de índice de refração é envolvida somente no problema 2. Neste modelo de fronteira, a intensidade sofre uma alteração de amplitude e de direção ao passar pela interface entre dois meios de propriedades óticas diferentes. Uma parte da radiação incidente é refratada, e a outra parte é refletida (ver figura 3.2.1) [138].

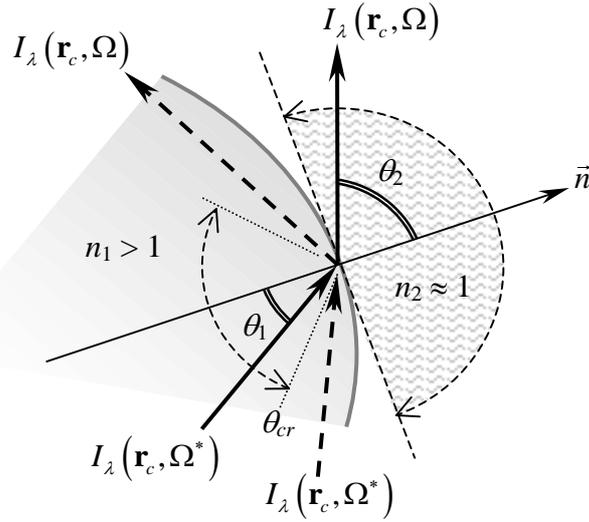
Da lei de Snell original, dada pela equação (3.2.18), é possível calcular o ângulo crítico  $\theta_{cr}$  a partir do qual a radiação incidente com um ângulo  $\theta_1$  passa a ser refletida para dentro do meio.

$$n_{r1} \text{sen}(\theta_1) = n_{r2} \text{sen}(\theta_2) \quad (3.2.18)$$

$n_{r1}$  representa a parte real do índice de refração do material semitransparente e  $n_{r2}$  representa a do meio envolvendo o material (ar seco). Apesar da notação, o índice de refração é uma grandeza espectral, isto é,  $\tilde{n}_r \cong \tilde{n}_{r\lambda}$ . Tomando o índice de refração do ar seco igual a unidade para qualquer comprimento de onda ( $\tilde{n}_{r2} = \tilde{n}_{ar} = 1$ ), o ângulo  $\theta_{cr}$  fica função da parte real de um índice de refração relativo,  $\theta_{cr} = \arcsen(n_r^{-1})$ , onde  $n_r = n_{r1}/n_{r2}$ . Este ângulo é muito importante para distinguir a parte da radiação refletida para dentro do meio (quando  $\theta_1 > \theta_{cr}$ ) da parte refratada para o ambiente (quando  $\theta_1 < \theta_{cr}$ ) [138]. Quando a intensidade atinge a interface com um ângulo de incidência maior que o ângulo crítico, a reflexão é considerada de tipo especular, como mostrado na figura 3.2.1 em tracejado. A condição de contorno radiativa semitransparente é formulada da seguinte forma:

$$I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega) = 0 \quad \text{para} \quad \theta_1 < \theta_{cr} \quad (3.2.19.a)$$

$$I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega) = I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega^*) \quad \text{para} \quad \theta_1 > \theta_{cr} \quad (3.2.19.b)$$



*Figura 3.2.1: Representação da fronteira semitransparente.*

A direção  $\Omega^*$  é conjugada a direção  $\Omega$  com respeito ao plano de direção normal  $\vec{n}$ .

Apesar da intensidade refratada  $I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega)$  não aparecer ulteriormente na formulação do problema direto do problema 2, ela é uma variável de primeira importância. Efetivamente a sua expressão entra na composição do fator de emissão espectral e direcional, já definido na equação (3.1.1) da seção anterior, e redefinido na seguinte equação:

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda(\Omega) = \frac{I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega)}{I_{b\lambda}(\mathbf{r}_c)} \quad \text{para } \theta_1 < \theta_{cr} \text{ e } T = \text{const.} \quad (3.2.20)$$

Neste caso, a intensidade inicial  $I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega^*)$  sofre uma alteração de amplitude e de direção ao passar pela interface. Ao atingir a interface com um ângulo de incidência  $\theta_1 < \theta_{cr}$ , a intensidade se vê refratada com um ângulo de refração  $\theta_2$  com respeito à normal da interface, como mostrado na figura 3.2.1 em linha contínua. Com relação a amplitude, a intensidade refratada fica diretamente ligada à refletividade especular e ao índice de refração relativo  $n_r = n_{r1}/n_{r2}$ :

$$I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega) = \frac{I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega^*)}{n_r^2} [1 - \rho'_\lambda(\Omega)]. \quad (3.2.21)$$

Diversas expressões da refletividade especular, baseadas nas equações de Fresnel, são disponíveis na literatura [139]. Uma primeira expressão, baseada na lei de Snell original dada pela equação (3.2.18), fornece as componentes polarizadas paralela e perpendicular da refletividade especular em função dos ângulos de incidência e de refração [139]:

$$\rho'_{\lambda\parallel}(\theta_1) = \frac{(n_{r2} \cos \theta_1 - n_{r1} \cos \theta_2)^2 + (k_{r2} \cos \theta_1 - k_{r1} \cos \theta_2)^2}{(n_{r2} \cos \theta_1 + n_{r1} \cos \theta_2)^2 + (k_{r2} \cos \theta_1 + k_{r1} \cos \theta_2)^2} \quad (3.2.22.a)$$

$$\rho'_{\lambda\perp}(\theta_1) = \frac{(n_{r2} \cos \theta_2 - n_{r1} \cos \theta_1)^2 + (k_{r2} \cos \theta_2 - k_{r1} \cos \theta_1)^2}{(n_{r2} \cos \theta_2 + n_{r1} \cos \theta_1)^2 + (k_{r2} \cos \theta_2 + k_{r1} \cos \theta_1)^2} \quad (3.2.22.b)$$

Para a intensidade incidente não polarizada, basta somar as duas componentes paralela e perpendicular da refletividade:

$$\rho'_\lambda(\theta_1) = \frac{\rho'_{\lambda\parallel}(\theta_1) + \rho'_{\lambda\perp}(\theta_1)}{2}. \quad (3.2.23)$$

A avaliação da refletividade especular para uma interface plana desde então foi corrigida [57,128]. A partir da Lei de Snell generalizada, dada pela seguinte equação,

$$n_r \sin(\theta_1) = f(\theta_2) \sin(\theta_2), \quad (3.2.24.a)$$

onde

$$f(\theta_2) = \sqrt{\frac{-(n_r^2 - k_r^2 + \sin^2 \theta_2) + \sqrt{(n_r^2 - k_r^2 + \sin^2 \theta_2)^2 + 4(n_r^2 k_r^2 - (n_r^2 - k_r^2) \sin^2 \theta_2)}}{2(k_r^2 - (1 - (k_r/n_r)^2) \sin^2 \theta_2)}}, \quad (3.2.24.b)$$

as componentes polarizadas paralela e perpendicular da refletividade especular, dadas nas equações (3.2.25.a,b), podem ser expressada somente em função do ângulo de refração  $\theta_2$  e do índice relativo de refração  $\tilde{n}_r$ , sendo  $n_r = n_{r1}/n_{r2}$  e  $k_r = k_{r1}/k_{r2}$  as componentes real e imaginária.

$$\rho'_{\lambda\perp}(\theta_2) = \frac{(\cos \theta_2 - u)^2 + v^2}{(\cos \theta_2 + u)^2 + v^2}, \quad (3.2.25.a)$$

$$\rho'_{\lambda\parallel}(\theta_2) = \frac{(u \cos \theta_2 - \sin^2 \theta_2)^2 + v^2 \cos^2 \theta_2}{(u \cos \theta_2 + \sin^2 \theta_2)^2 + v^2 \cos^2 \theta_2} \rho'_{\lambda\perp}(\theta_2), \quad (3.2.25.b)$$

onde

$$u^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(n_r^2 - k_r^2 - \sin^2 \theta_2)^2 + 4n_r^2 k_r^2} + (n_r^2 - k_r^2 - \sin^2 \theta_2) \right\}, \quad (3.2.25.c)$$

$$v^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(n_r^2 - k_r^2 - \sin^2 \theta_2)^2 + 4n_r^2 k_r^2} - (n_r^2 - k_r^2 - \sin^2 \theta_2) \right\}. \quad (3.2.25.d)$$

Para a simulação do problema 2, o sistema de equações (3.2.25) foi introduzido na equação (3.2.23) para a obtenção da refletividade especular relativa à interface amostra-seco, considerando a intensidade radiativa não polarizada. Porém, o ângulo de

refração  $\theta_2$  é calculado usando a lei de Snell original; a lei de Snell generalizada dada pela equação (3.2.24) não permite expressar  $\theta_2$  em função do ângulo de incidência  $\theta_1$ . O modelo de fronteira plana é representativo da realidade, embora não inclui o aspecto difusivo ligado a presença de irregularidades na superfície da fronteira física do corpo de prova.

### 3.2.3.2 Fronteira opaca: condição de reflexão e emissão difusa isotrópica

A fronteira totalmente opaca aparece somente no problema 1, pois a amostra de material é pintada de grafite. Portanto, a fronteira não transmite diretamente a radiação. Conseqüentemente, aplicando o princípio de conservação da energia na fronteira ditada pela 2ª lei de Kirchhoff, a energia incidente é igual à soma da energia absorvida e refletida pela fronteira de forma que:

$$\alpha'_\lambda + \rho'_\lambda + \underbrace{\tau'_\lambda}_{=0} = 1 \quad (3.2.26)$$

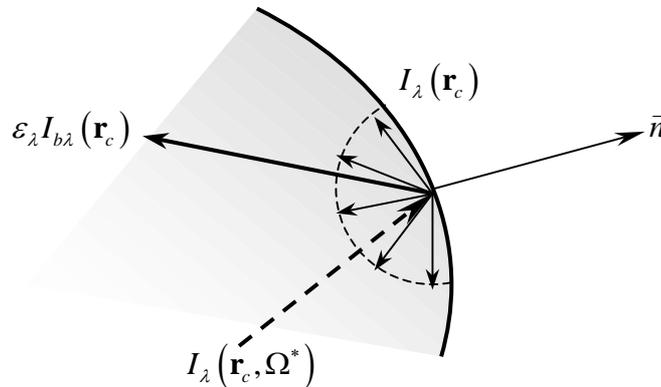
A reflexão, ao contrário do que foi considerado para a fronteira semitransparente, é difusa e isotrópica. Para exprimir esta condição, foi utilizada a 1ª lei de Kirchhoff:

$$\alpha'_\lambda = \varepsilon'_\lambda \quad (3.2.27)$$

com a aproximação de que a fronteira emita de maneira isotrópica, isto é,  $\varepsilon'_\lambda = \varepsilon_\lambda^\circ$ . A condição de contorno opaca é então definida em função da emissividade da tinta [128]:

$$I_\lambda(\mathbf{r}_c) = \varepsilon_\lambda I_{b\lambda}(\mathbf{r}_c, T) + \frac{1 - \varepsilon_\lambda}{\pi} \int_{\vec{n} \cdot \Omega^* < 0} I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega^*) |\vec{n} \cdot \Omega^*| d\Omega^* \quad (3.2.28)$$

Os mecanismos envolvidos nesta condição são mostrados na figura 3.2.2:



*Figura 3.2.2: Representação de uma superfície opaca com reflexão e emissão difusa isotrópica.*

A condição de reflexão difusa isotrópica pode ser considerada como a mais representativa da reflexão provocada por superfícies irregulares. Ao mesmo tempo, ela é prática de implementação por se adequar com a emissão isotrópica do corpo negro (superfície de Lambert).

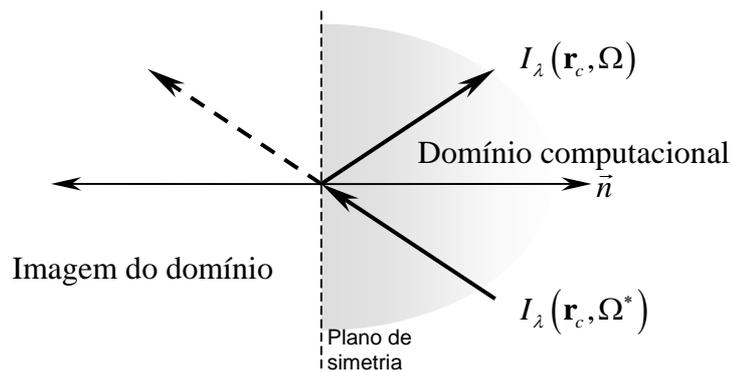
### 3.2.3.3 Plano de simetria: condição de reflexão total especular

Esta fronteira matemática aparece na formulação dos problemas 1 e 2. Quando o campo de intensidade no domínio físico apresenta simetrias, os planos de simetria podem ser substituídos por fronteiras perfeitamente refletivas. A fronteira refletiva especular permite dar continuidade à propagação da intensidade e diminuir o tamanho do domínio computacional, poupando tempo de cálculo.

O plano de simetria é uma região de equilíbrio radiativo. O mecanismo da condição de reflexão total especular é mostrado na figura 3.2.3. A intensidade deixando o domínio computacional com uma direção  $\Omega^*$  é equivalente em termo de amplitude à intensidade entrando nele. Portanto, a direção  $\Omega$  é simétrica da direção  $\Omega^*$  em relação ao eixo  $\vec{n}$ . A condição se escreve [128]:

$$I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega) = I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega^*) \quad (3.2.29)$$

onde  $\Omega$  é a direção da intensidade refletida e  $\Omega^*$  a direção da intensidade incidente na fronteira matemática.



*Figura 3.2.3: Representação do plano de simetria.*

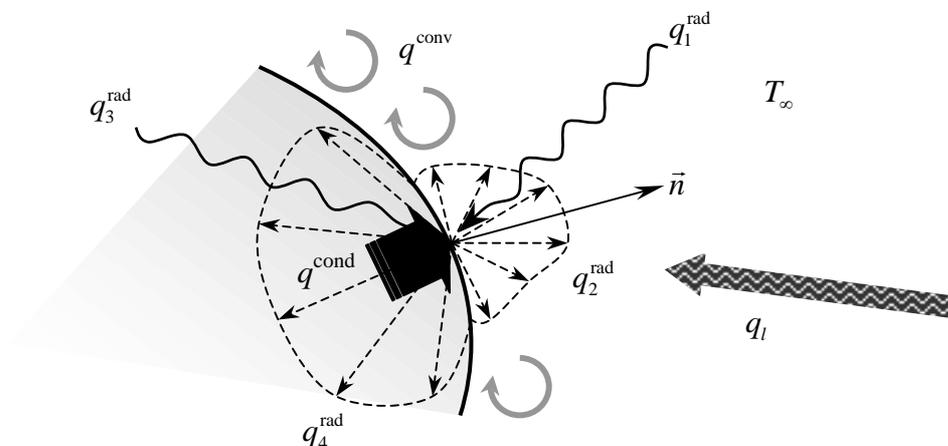
As condições de contorno radiativas são apresentadas sem termos de geração de calor. Efetivamente, apesar das fronteiras do corpo de prova estarem em contato livre com o ar no problema 2, o MST é considerado opaco às radiações externas como o laser. Por

exemplo, a espessura ótica de uma amostra de alumina de 1 mm de espessura é  $\tau_0 > 50$  para o comprimento de onda da radiação de um laser CO<sub>2</sub>, que é  $\lambda_l = 10.6 \mu\text{m}$ , o que significa que 99 % da energia fornecida pelo laser são teoricamente absorvidos em uma camada superficial de 80  $\mu\text{m}$  de espessura. No problema 1, a amostra de MST é coberta por uma tinta de grafite altamente absorativa no espectro infravermelho. Portanto, tanto no problema 1 quanto no problema 2, o termo de geração de calor é inserido na expressão das condições de contorno térmicas. Estas condições, relativas ao problema de condução de calor, estão apresentadas a seguir.

### 3.2.4 Condições de contorno para a equação de conservação da energia

As condições de contorno para a equação de conservação da energia são chamadas aqui de “térmicas” por serem o ponto de confluência dos diversos modos de transferência de calor: condução, convecção e radiação. A formulação delas varia principalmente em função da presença da tinta de grafite. Três tipos de condições de contorno se encontram no problema:

- 1) a condição de contorno não linear sem termo de troca de calor por radiação entre o corpo e a fronteira (fronteiras do corpo de prova em contato direto com o ar),
- 2) a condição de contorno não linear com termo de troca de calor por radiação entre o corpo e a fronteira (corpo de prova pintado de grafite) e
- 3) a condição de 2° tipo quando planos de simetria são considerados.



*Figura 3.2.4: Condição de contorno de 3° tipo. Transferência de calor por condução, convecção e radiação combinada.*

O detalhe da formulação das condições de contorno é apresentado a seguir.

### 3.2.4.1 Condições de contorno para o problema 2

Para formular uma condição de contorno térmica, é necessário primeiro realizar o balanço entre o fluxo condutivo, o fluxo convectivo e o fluxo radiativo na superfície de escolha. O fluxo condutivo, dado pela lei de Fourier, é diretamente proporcional ao gradiente de temperatura no material [137]:

$$q^{\text{cond}} = -(k\nabla T) \cdot \vec{n} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (3.2.30)$$

O fluxo convectivo é proporcional à diferença entre a temperatura de superfície  $T$  e a temperatura do meio envoltório. Sua amplitude varia também com o coeficiente de transferência de calor  $h$  [137]:

$$q^{\text{conv}} = h(T - T_{\infty}) \quad (3.2.31)$$

Realizando o balanço entre o fluxo condutivo e o fluxo convectivo na superfície de temperatura  $T$ , e assumindo o fluxo radiativo absorvido ou emitido nulo, obtém-se a chamada condição de contorno de 3º tipo linear [137]:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + hT = hT_{\infty} \quad (3.2.32)$$

Esta condição de 3º tipo será utilizada para definir a troca de calor nas superfícies da amostra do problema 2 não aquecidas pelo fluxo do laser. Efetivamente, sendo as fronteiras “semitransparentes com mudança de índice de refração” do ponto de vista radiativo, não há interação do material com a radiação e não há conseqüentemente geração de calor na interface.

Sendo o corpo de prova aquecido por laser, um novo balanço de fluxo é realizado especialmente para as faces aquecidas. Este balanço é dado pela equação seguinte:

$$\underbrace{q^{\text{cond}} + q^{\text{rad}}}_{\text{ganho de calor}} = \underbrace{q^{\text{conv}}}_{\text{perda de calor}} \quad (3.2.33)$$

onde  $q^{\text{rad}} = q_l$  é o fluxo do laser. A energia radiativa do laser é contida em uma faixa estreita de frequências centrada em  $\lambda_l = 10.6 \mu\text{m}$ . Ao mesmo tempo, esta frequência coincide com a região espectral característica das cerâmicas chamada ponto “Christiansen” [50,135]. Nesta frequência, as cerâmicas costumam se comportar de maneira idêntica ao corpo negro ideal. Nenhuma emissividade é, portanto, introduzido

na formulação de  $q^{\text{rad}}$ . Substituindo as equações (3.2.30-31) no balanço de calor (3.2.33), a condição de contorno para as faces aquecidas por laser fica:

$$k \frac{\partial T}{\partial n} + hT = hT_{\infty} + q_l \quad (3.2.34)$$

Esta condição torna-se não linear por conta da presença do fluxo do laser  $q_l$  na equação.

### 3.2.4.2 Condições de contorno para o problema 1

O corpo de prova sendo revestido por uma tinta de grafite altamente absorptiva, o balanço de fluxo leva em conta os fluxos de absorção e emissão da própria tinta. Portanto, além do fluxo condutivo e do fluxo convectivo que já foram definidos, é necessário listar as outras contribuições de tipo radiativo envolvendo a tinta de grafite [35]. Existem 4 contribuições, como o mostra a figura 3.2.4:

- 1) o fluxo incidente no contorno proveniente do ambiente  $q_1^{\text{rad}}$ ,
- 2) o fluxo emitido pelo contorno em direção do ambiente  $q_2^{\text{rad}}$ ,
- 3) o fluxo incidente no contorno proveniente do meio  $q_3^{\text{rad}}$ ,
- 4) o fluxo emitido pelo contorno em direção do meio  $q_4^{\text{rad}}$ .

O balanço de fluxos condutivos, convectivos e radiativos para as faces não aquecidas pelo laser é dado pela a equação seguinte:

$$\underbrace{q^{\text{cond}}}_{\text{ganho de calor}} = q^{\text{conv}} + \underbrace{(q_2^{\text{rad}} - q_1^{\text{rad}}) + (q_4^{\text{rad}} - q_3^{\text{rad}})}_{\text{perda de calor}} \quad (3.2.35)$$

Antes de definir cada contribuição separadamente, o índice de refração do ar seco será tomado igual a unidade. Desta forma, o termo relativo à emissão da tinta em direção ao interior do MST será ponderado pelo índice de refração relativo ao quadrado  $n_r^2$ , que por sua vez será igual ao índice de refração absoluto do MST ao quadrado. Iniciando pela troca de calor por radiação entre a superfície e o meio ambiente, o fluxo emitido pelo meio envoltório negro – devido a seu afastamento físico com a amostra – de temperatura  $T_{\infty}$ , e recebido pela fronteira se escreve:

$$q_1^{\text{rad}} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \varepsilon_{\lambda} E_{b\lambda}(\mathbf{r}_c, T_{\infty}) d\lambda \quad (3.2.36.a)$$

$E_{b\lambda}(T_\infty)$  é dado pela lei de Planck, na equação (3.2.6).  $\varepsilon_\lambda$  representa a emissividade da tinta de grafite para o comprimento de onda  $\lambda$ . No sentido contrário, o fluxo emitido pela tinta em direção do meio ambiente se escreve:

$$q_2^{\text{rad}} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \varepsilon_\lambda E_{b\lambda}(\mathbf{r}_c, T) d\lambda, \quad (3.2.36.b)$$

onde  $T$  é a temperatura da superfície. Nota-se que as expressões de  $q_1^{\text{rad}}$  e  $q_2^{\text{rad}}$  são parecidas com a única diferença da temperatura do corpo emissivo.

Voltando-se para a troca de calor entre a superfície e o meio semitransparente, o fluxo  $q_3^{\text{rad}}$  obtém-se integrando as intensidades radiativas incidentes em proveniência do meio sobre o hemisfério e sobre o espectro:

$$q_3^{\text{rad}} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\vec{n} \cdot \Omega > 0} \varepsilon_\lambda I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega) \vec{n} \cdot \Omega d\Omega d\lambda, \quad (3.2.36.c)$$

$\mathbf{r}_c$  representa o vetor de posição no contorno. No sentido contrário, o fluxo emitido pela tinta em direção do meio é caracterizado pela emissão difusa isotrópica do corpo negro:

$$q_4^{\text{rad}} = \int_{\lambda=0}^{\infty} n_r^2 \varepsilon_\lambda E_{b\lambda}(\mathbf{r}_c, T) d\lambda. \quad (3.2.36.d)$$

Como  $q_4^{\text{rad}}$  representa o fluxo emitido em direção do MST e  $q_2^{\text{rad}}$  o fluxo emitido em direção do meio ambiente, chega-se a conclusão de que  $q_4^{\text{rad}} = n_r^2 q_2^{\text{rad}}$ .

As contribuições radiativas  $q_1^{\text{rad}}$ ,  $q_2^{\text{rad}}$ ,  $q_3^{\text{rad}}$  e  $q_4^{\text{rad}}$  dependem da emissividade  $\varepsilon_\lambda$  do contorno, o que caracteriza a sua capacidade a receber ou emitir a radiação, onde já se levou em consideração a 1ª Lei de Kirchhoff  $\alpha'_\lambda = \varepsilon'_\lambda$ . Substituindo as equações (3.2.36.a-d) na equação (3.2.35), obtém-se a condição de contorno térmica não linear para o problema 1 e para as faces não aquecidas diretamente por laser.

$$\begin{aligned} k \frac{\partial T}{\partial n} + hT + \int_{\lambda=0}^{\infty} \varepsilon_\lambda E_{b\lambda}(\mathbf{r}_c, T) d\lambda + \int_{\lambda=0}^{\infty} n_r^2 \varepsilon_\lambda E_{b\lambda}(\mathbf{r}_c, T) d\lambda \\ = hT_\infty + \int_{\lambda=0}^{\infty} \varepsilon_\lambda E_{b\lambda}(\mathbf{r}_c, T_\infty) d\lambda + \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\vec{n} \cdot \Omega > 0} \varepsilon_\lambda I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega) \vec{n} \cdot \Omega d\Omega d\lambda \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

Aplicando o modelo cinza por bandas descrito nas equações (3.2.7-12), a integral espectral na expressão dos fluxos  $q_1^{\text{rad}}$ ,  $q_2^{\text{rad}}$ ,  $q_3^{\text{rad}}$  e  $q_4^{\text{rad}}$  é transformada em somatório:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial T}{\partial n} + hT + \sum_{m=1}^{N_f} F_m(T) \varepsilon_m \sigma T^4 + \sum_{m=1}^{N_f} F_m(T) \varepsilon_m n_r^2 \sigma T^4 \\ = hT_\infty + \sum_{m=1}^{N_f} F_m(T) \varepsilon_m \sigma T_\infty^4 + \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m \int_{\vec{n} \cdot \Omega > 0} I_m(\mathbf{r}_c, \Omega) \vec{n} \cdot \Omega d\Omega \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Ao adotar o modelo cinza por banda, o comportamento das variáveis  $\varepsilon_\lambda$ ,  $n_r$  e  $I_\lambda(\mathbf{r}_c, \Omega)$  foi aproximado em  $N_f$  bandas de valor constante. Por outro lado, uma segunda simplificação pode ser usada para o problema 1, onde pequenas variações de temperatura são consideradas ( $< 5$  K). A simplificação consiste na linearização do termo de transferência de calor por radiação entre o contorno e o meio ambiente (ou seja,  $q_1^{\text{rad}}$  e  $q_2^{\text{rad}}$ ):

$$\varphi(T^4 - T_\infty^4) \approx 4\varphi T_\infty^3 (T - T_\infty), \quad (3.2.39)$$

onde  $\varphi = \sigma \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m F_m(T_\infty)$ . Linearizando este termo, torna-se possível formular um coeficiente de transferência de calor generalizado  $h^{\text{rad}}$  incluindo tanto as perdas de calor por convecção quanto as perdas de calor por radiação no meio ambiente:

$$h^{\text{rad}} = h + 4\varphi T_\infty^3 = h + 4\sigma T_\infty^3 \left( \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m F_m(T_\infty) \right) \quad (3.2.40)$$

Finalmente, introduzindo o novo coeficiente de transferência de calor generalizado  $h^{\text{rad}}$  na equação (3.2.38), a condição de contorno térmica não linear para o problema 1 e para as fronteiras não aquecidas diretamente por laser fica:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial T}{\partial n} + h^{\text{rad}} T + \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m F_m(T) n_r^2 \sigma T^4 \\ = h^{\text{rad}} T_\infty + \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m \int_{\vec{n} \cdot \Omega > 0} I_m(\mathbf{r}_c, \Omega) \vec{n} \cdot \Omega d\Omega \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

No problema 1, somente uma das superfícies do corpo de prova recebe um pequeno impulso de laser, este impulso sendo destinado a provocar uma perturbação interna de temperatura. Portanto, a condição térmica nesta superfície recebe mais um termo  $q^{\text{rad}}$  no lado direito da equação (3.2.41). Sendo a face aquecida coberta por uma tinta de grafite, o termo de fluxo laser se escreve  $q^{\text{rad}} = \varepsilon_l q_l$ , onde  $\varepsilon_l$  é a emissividade do grafite para o comprimento de onda do laser  $\lambda_l = 10.6 \mu\text{m}$ . A condição de contorno térmica para a face aquecida no Problema 1 se escreve então da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial T}{\partial n} + h^{\text{rad}} T + \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m F_m(T) n_r^2 \sigma T^4 \\ = h^{\text{rad}} T_\infty + \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m \int_{\vec{n} \cdot \Omega > 0} I_m(\mathbf{r}_c, \Omega) \vec{n} \cdot \Omega d\Omega + \varepsilon_l q_l \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

### 3.2.4.3 Plano de simetria: condição térmica de 2º Tipo

Planos de simetria aparecem tanto no problema 1 quanto no problema 2 ao observar a distribuição de temperatura no corpo de prova. Estes planos existem matematicamente dentro do domínio físico representado pelo corpo de prova, e podem ser substituídos por uma condição de fluxo condutivo nula:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (3.2.43)$$

Geralmente, esta condição é chamada de condição de contorno homogênea do 2º tipo.

As equações necessárias à solução de problema de condução e radiação acoplado foram estabelecidas para o problema 1 e 2. A maioria destas equações depende do índice de refração do material que constitui o corpo de prova. A ETR, dada pela equação (3.2.1), também depende desta variável, além de depender de propriedades radiativas que são os coeficientes de absorção  $\kappa_{a\lambda}$  e de espalhamento  $\sigma_{s\lambda}$  e de uma função de redistribuição que é a função de fase  $p_\lambda(\Omega' \rightarrow \Omega)$ . A seção que segue mostra como prever as propriedades radiativas em função do índice de refração complexo e de algum conhecimento da estrutura microscópica do material.

### 3.2.5 Predição das propriedades radiativas

A partir do conhecimento da morfologia molecular do material ou da sua estrutura cristalina, estuda-se a interação de uma onda plana eletromagnética com a rede cristalina a fim de modelar os mecanismos de transformação da onda. Uma vez estes mecanismos qualificados e quantificados a escala molecular, é possível prever as propriedades radiativas. Estas propriedades volumétricas têm por função quantificar os efeitos da interação da onda eletromagnética com o meio semitransparente a escala macroscópica.

#### 3.2.5.1 Propriedades radiativas de um MST homogêneo

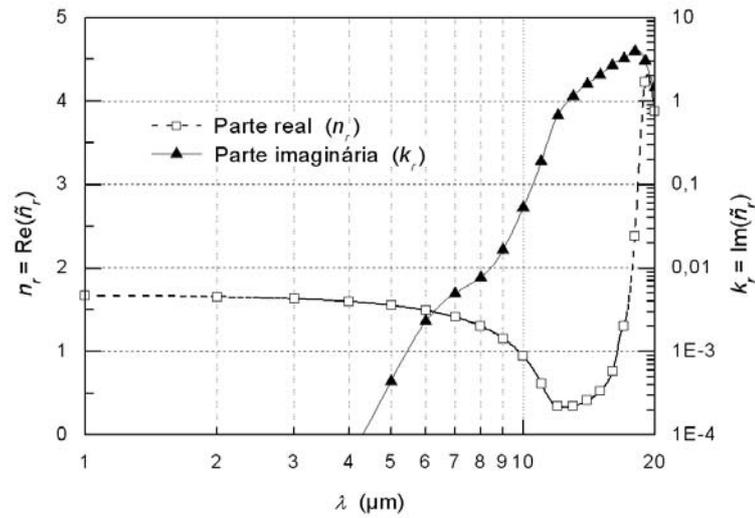
Quando uma onda eletromagnética interage com um meio dielétrico homogêneo, a intensidade radiativa sofre uma atenuação de amplitude por absorção. A atenuação da intensidade é diretamente ligada a parte imaginária do índice complexo de refração do meio  $\tilde{n}_r = n_r - ik_r$  pela relação seguinte [50,139]:

$$\kappa_{a\lambda} = \frac{4\pi k_r}{\lambda} \times 10^4, \quad (3.2.44)$$

onde  $\kappa_{a\lambda}$  ( $\text{m}^{-1}$ ) é o coeficiente de absorção monocromático do meio. Por outro lado, a homogeneidade do meio garante a propagação retilínea da onda eletromagnética, dispensando fenômenos de difusão radiativa ou espalhamento. Portanto, pode se considerar o coeficiente de espalhamento nulo para MST homogêneos.

O índice de refração complexo é o parâmetro mais importante da análise do comportamento radiativo de um MST. Efetivamente, através do índice de refração complexo, se exprime todo o comportamento intrínseco do material com respeito a uma onda eletromagnética, levando em conta fenômenos de vibração da estrutura molecular, ou de amortecimento. Ele pode ser obtido através de medidas de refletividades espectrais e direcionais [128,139,140], ou de medidas de emissão a altas temperaturas [50]. Ao mesmo tempo, existem modelos teóricos para prever seu comportamento espectral. Estes modelos são baseados na solução de modelos de oscilador de Lorentz [50].

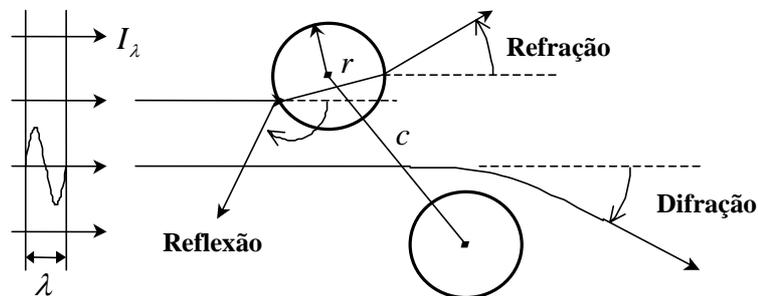
Um estudo aprofundado do comportamento em emissão radiativa de cerâmicas a altas temperaturas encontra-se na Tese de Doutorado de J.F. Brun (2003) [50]. Modelos de predição da função dielétrica do material (equivalente ao quadrado do índice de refração complexo) foram o objeto de modificações para levar em conta fenômenos de vibração com amortecimento às ondas transversais, fenômenos pré-fusão a altas temperaturas e fenômenos de relaxação. Apoiando-se, portanto, com medidas de emissão de monocristais de cerâmicas a alta temperatura ( $\approx 2000$  K), os parâmetros que entram na composição do oscilador de Lorentz foram preditos a fim de determinar o comportamento espectral do índice de refração complexo. A figura 3.2.5 ilustra, por exemplo, o índice de refração complexo predito para um monocristal de safira a 2007 K usando o modelo desenvolvido por J.F. Brun com parâmetros ajustados [50]. Este modelo foi usado na continuação deste texto como referência para calcular o índice de refração da alumina. Nota-se que a evolução bastante irregular do índice de refração com o comprimento de onda é uma característica dos dielétricos em geral.



*Figura 3.2.5: Evolução espectral do índice complexo de refração de um monocristal de safira a altas temperaturas (2007 K).*

### 3.2.5.2 Propriedades radiativas de um MST poroso

Quando uma onda eletromagnética interage com um meio constituído por partículas pequenas, a intensidade da radiação sofre uma atenuação por conta da absorção e/ou do espalhamento causado pelas partículas. Na proximidade de uma partícula, a radiação é desviada e espalhada em função de três fenômenos chamados respectivamente difração (a onda nunca entra em contato com a partícula, no entanto a sua direção está alterada pela presença da partícula), reflexão (a onda está refletida na superfície da partícula) e refração (a onda penetra dentro da partícula, sofre uma absorção parcial e emerge da partícula com outra direção) [128].



*Figura 3.2.6: Interação entre uma onda eletromagnética e uma partícula esférica.*

Em problemas de predição de propriedades radiativas costuma-se assumir as partículas como totalmente esféricas (quando as partículas têm uma forma irregular ou semelhante

a uma esfera) ou cilíndricas (quando o meio é constituído de fibras) [128]. Por exemplo, para simplificar o modelo de predição, a cerâmica de alumina será considerada como um meio poroso composto exclusivamente de partículas esféricas.

O estudo da interação de uma onda eletromagnética com um meio constituído de partículas esféricas necessita previamente do estudo da interação da própria onda com uma partícula isolada [52]. Este estudo da interação individual radiação-partícula pode ser resolvida considerando uma onda monocromática plana incidente sobre uma partícula de tamanho conhecido, usando-se as equações de Maxwell. Soluções deste problema encontram-se nos textos de teoria eletromagnética [52-55]. Os resultados são dados em termo de eficiências de extinção  $Q_{ext}$ , de espalhamento  $Q_{sca}$  e da função de fase  $\Phi_\lambda(\theta_p)$ .

A solução atualmente mais utilizada é a teoria de Mie que se aplica a problemas envolvendo partículas esféricas homogêneas [52-55]. Esta solução pode ser aplicada também quando as partículas não são esféricas, numerosas e orientadas de maneira randômica [128]. Gustav Mie desenvolveu em 1908 esta teoria com o objetivo de explicar fenômenos de dissociação da luz através de uma nuvem homogênea de partículas de ouro coloidal [52]. As soluções da teoria de Mie fornecem em primeiro lugar as eficiências de absorção, de espalhamento e de extinção definidas como:

$$Q_{sca} = \sum_{n=1}^{N_{max}} (2n+1) \text{Re}[a_n + b_n] \quad (3.2.45.a)$$

$$Q_{ext} = \sum_{n=1}^{N_{max}} (2n+1) \left[ |a_n|^2 + |b_n|^2 \right] \quad (3.2.45.b)$$

$$Q_{abs} = Q_{ext} - Q_{sca} \quad (3.2.45.c)$$

As eficiências  $Q_{abs}$  e  $Q_{sca}$  caracterizam respectivamente a fração de intensidade radiativa absorvida e espalhada sobre a intensidade incidente numa partícula considerada. A definição exata e teórica das eficiências consiste em um somatório infinito de autovalores complexos  $a_n$  e  $b_n$  definidos como:

$$a_n = \frac{\psi'_n(\tilde{n}x)\psi_n(x) - \tilde{n}\psi_n(\tilde{n}x)\psi'_n(x)}{\psi'_n(\tilde{n}x)\xi_n(x) - \tilde{n}\psi_n(\tilde{n}x)\xi'_n(x)} \quad (3.2.46.a)$$

$$b_n = \frac{\tilde{n}\psi'_n(\tilde{n}x)\psi_n(x) - \psi_n(\tilde{n}x)\psi'_n(x)}{\tilde{n}\psi'_n(\tilde{n}x)\xi_n(x) - \psi_n(\tilde{n}x)\xi'_n(x)} \quad (3.2.46.b)$$

onde  $x$  é o parâmetro de tamanho adimensional definido a partir do raio  $r$  da partícula e do comprimento de onda  $\lambda$ ,

$$x = \frac{2\pi r}{\lambda}, \quad (3.2.47)$$

e onde  $\psi_n(z)$  e  $\xi_n(z)$  são as funções de Ricatti-Bessel, que dependem das funções de Bessel  $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$  e  $Y_{n+\frac{1}{2}}(z)$  e das primeiras funções de Hankel  $H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z)$ . Dependendo do texto, as funções de Bessel de segunda ordem  $Y_{n+\frac{1}{2}}(z)$  costumam ser chamadas de funções de Neumann  $N_{n+\frac{1}{2}}(z)$ . As funções de Ricatti-Bessel se definem como segue [53]:

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad ; \quad \chi_n(z) = -\sqrt{\frac{\pi z}{2}} Y_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad (3.2.48.a,b)$$

$$\xi_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = \psi_n(z) - i\chi_n(z) \quad (3.2.48.c)$$

e as primeiras funções de Hankel, como

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z) \quad (3.2.49)$$

Por uma razão prática, o somatório das equações (3.2.45) é suposto convergir para um valor  $N_{\max}$  que, segundo Modest [128], pode ser tomado pelo valor  $N_{\max} = 2x$  para as partículas de grande tamanho com respeito ao comprimento de onda ( $x \gg 1$ ). Segundo Bohren e Huffman [55], o valor otimizado de  $N_{\max}$  se situa por:

$$N_{\max} = \max(x + 4x^{1/3} + 2, |\tilde{n}x|), \quad (3.2.50)$$

válido para qualquer valor do parâmetro de tamanho  $x$ . Este valor foi utilizado na implementação da teoria de Mie.

A teoria de Mie fornece também informações sobre o espalhamento da intensidade pela esfera através da função de fase  $\Phi_\lambda(\theta_p)$ . A função de fase, dada anteriormente pela equação (3.2.51), corresponde à probabilidade para uma intensidade incidente numa determinada direção de ser espalhada em outra direção.  $\theta_p$  representa o ângulo entre a direção incidente e a direção de espalhamento. Esta função de fase é calculada somando-se os termos  $S_1(\theta_p)$  e  $S_2(\theta_p)$  que correspondem às amplitudes complexas, dadas nas equações (3.2.52.a,b). Para uma onda incidente não-polarizada:

$$\Phi(\theta_p) = 2 \frac{|S_1(\theta_p)|^2 + |S_2(\theta_p)|^2}{x^2 Q_{\text{sca}}} \quad (3.2.51)$$

onde

$$S_1(\theta_p) = \sum_{n=1}^{N_{\max}} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \pi_n(\cos \theta_p) + b_n \tau_n(\cos \theta_p)) \quad (3.2.52.a)$$

$$S_2(\theta_p) = \sum_{n=1}^{N_{\max}} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \tau_n(\cos \theta_p) + b_n \pi_n(\cos \theta_p)) \quad (3.2.52.b)$$

$\pi_n(\cos \theta_p)$  e  $\tau_n(\cos \theta_p)$  são funções dependendo dos polinômios de Legendre associados  $P_n^1(\cos \theta_p)$ :

$$\pi_n(\cos \theta_p) = \frac{P_n^1(\cos \theta_p)}{\sin \theta_p} \quad (3.2.53.a)$$

$$\tau_n(\cos \theta_p) = \frac{dP_n^1(\cos \theta_p)}{d\theta_p} \quad (3.2.53.b)$$

Finalmente, o fator de assimetria  $g$ , que é independente da polarização da onda incidente, é dado por:

$$g = \frac{4}{Q_{\text{sca}} x^2} \sum_{n=1}^{N_{\max}} \frac{n(n+2)}{n+1} \text{Re}\{a_n a_{n+1}^* + b_n b_{n+1}^*\} + \frac{2n+1}{n(n+1)} \text{Re}\{a_n b_n^*\} \quad (3.2.54)$$

onde  $a_n^*$  e  $b_n^*$  são respectivamente os números complexos conjugados dos autovalores  $a_n$  e  $b_n$ .

A teoria de Mie fornece a solução exata do espalhamento devido à interação de uma onda plana e homogênea com uma partícula esférica. No entanto, quando a partícula possui um tamanho largo suficiente com relação ao comprimento de onda, isso é  $x \gg 1$ , e quando o índice de refração não é desprezível, isso é  $x|\tilde{n}-1| \gg 1$ , pode se utilizar a teoria de “ótica geométrica”, que corresponde à simplificação da teoria de Mie para  $x \rightarrow \infty$ . A implementação da teoria de ótica geométrica se encontra nos textos de Brewster [52], Modest [128] ou Van de Hulst [54].

Considerando agora um grupo de partículas contido em um volume elementar, a função de fase relativa ao volume é idêntica à de uma partícula isolada. Porém, as outras propriedades volumétricas são obtidas adicionando os efeitos de cada partícula separadamente [58]. Se as partículas estiverem esféricas, de tamanho igual e tiverem propriedades idênticas, as propriedades radiativas volumétricas se definem pelas equações (3.2.55.a-d) [59]:

$$\kappa_{a\lambda} = 1.5 \frac{Q_{\text{abs}} f_v}{d} \quad ; \quad \sigma_{s\lambda} = 1.5 \frac{Q_{\text{sca}} f_v}{d} \quad ; \quad \beta_\lambda = 1.5 \frac{Q_{\text{ext}} f_v}{d} \quad (3.2.55.a-c)$$

$$p_\lambda(\theta_p) = \Phi_\lambda(\theta_p) \quad (3.2.55.d)$$

onde  $f_v$  representa a fração do volume elementar ocupado pelo conjunto de partículas. Pode haver casos onde o material esteja constituído de partículas de tamanho variável. Neste caso, uma função contínua de distribuição de tamanho de partículas  $n(r)$  é introduzida, de modo que  $n(r)dr$  pode ser interpretado como sendo o número de partículas com raio variando de  $r$  a  $r + dr$  por unidade de volume. O número total de partículas por unidade de volume é igual a  $N_0$ , onde:

$$N_0 = \int_{r=0}^{\infty} n(r) dr \quad (3.2.56)$$

Algumas definições da função  $n(r)$  se encontram na literatura [52,128], baseadas na função de distribuição Gama. Para um volume elementar que contem partículas esféricas de constantes óticas idênticas, e cujo tamanho varia de maneira randômica, as propriedades radiativas volumétricas se calculam usando as equações (3.2.57.a-d) [52]:

$$\kappa_{a\lambda} = \int_{r=0}^{\infty} \pi r^2 Q_{\text{abs}} n(r) dr \quad (3.2.57.a)$$

$$\sigma_{s\lambda} = \int_{r=0}^{\infty} \pi r^2 Q_{\text{sca}} n(r) dr \quad (3.2.57.b)$$

$$\beta_{\lambda} = \int_{r=0}^{\infty} \pi r^2 Q_{\text{ext}} n(r) dr \quad (3.2.57.c)$$

$$p_{\lambda}(\theta_p) = \frac{1}{\sigma_{s\lambda}} \int_{r=0}^{\infty} \pi r^2 Q_{\text{sca}} \Phi_{\lambda}(\theta_p) n(r) dr \quad (3.2.57.d)$$

A fração volumétrica do material é calculada integrando-se a distribuição de tamanho das partículas multiplicado pelo volume de uma esfera de raio  $r$ :

$$f_v = \frac{4\pi}{3} \int_{r=0}^{\infty} r^3 n(r) dr \quad (3.2.58)$$

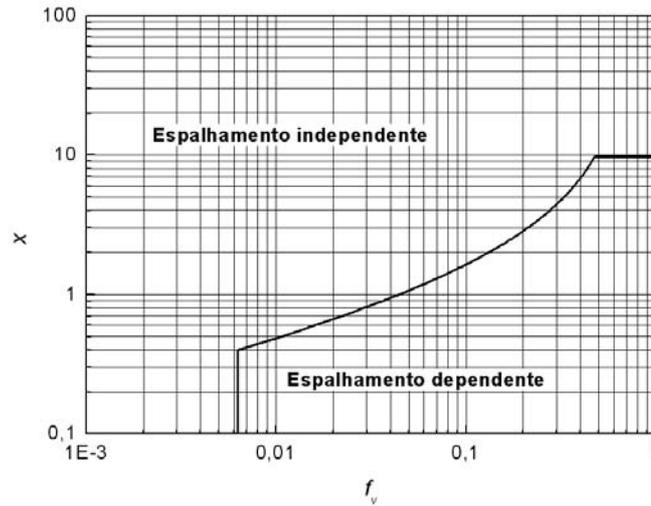
Neste estudo, a variação de tamanho das partículas que compõem a cerâmica de alumina não é considerada significativa. Portanto, as equações (3.2.55) foram usadas para calcular as propriedades radiativas volumétricas.

Em materiais de baixa porosidade, o fenômeno dito “espalhamento dependente” pode ocorrer. O espalhamento dependente significa que o espalhamento da radiação por uma partícula está afetado pelas partículas ao redor. Responsável por uma forte atenuação da eficiência de espalhamento, uma breve revisão bibliográfica com respeito a este fenômeno é feita a seguir.

Primeiro, para se situar a região de espalhamento dependente ou independente, é preciso definir o parâmetro adimensional seguinte [141]:

$$\frac{c}{\lambda} < 0.5 \quad (\text{Espalhamento dependente}) \quad (3.2.59)$$

onde  $c$  é a distância mínima separando o centro de duas partículas respectivas. Em 1986, Yamada, Cartigny e Tien [142,143] redefinem a carta de localização das regiões de espalhamento dependente e independente, hoje muito utilizada:



*Figura 3.2.7: Domínio de validade dos modelos de espalhamento dependente e independente.*

A região de espalhamento radiativo dependente se caracteriza pelo sistema seguinte de equações:

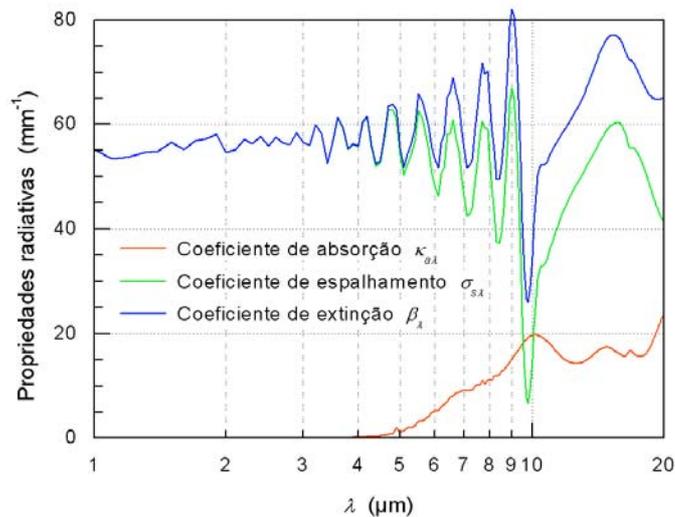
$$f_v \geq 6.25 \times 10^{-3} \quad \text{para} \quad x \leq 0.4 \quad (3.2.60.a)$$

$$f_v \geq \frac{0.741}{(1+1.56/x)^3} \quad \text{para} \quad 0.4 \leq x \leq 9.5 \quad (3.2.60.b)$$

Para altos valores da fração volumétrica  $f_v$ , ou seja, baixa porosidade, os estudos se contradizem para admitir se o espalhamento dependente deve ser levado em conta. Particularmente, a difração de onda nas referências [141-143] foi desprezada. Portanto, Singh e Kaviany [60,144] propõem duas técnicas distintas válidas respectivamente para partículas opacas e para partículas semitransparentes. Segundo eles, para modelar as propriedades radiativas volumétricas de um material compostas por partículas opacas, basta multiplicar as propriedades por um fator  $\gamma$  variando com a porosidade do meio. Para modelar as propriedades radiativas de um material compostas por partículas

semitransparentes, uma combinação do método de Monte Carlo com o método de ordenadas discretas (Método DIDOM) deve ser utilizada. No entanto, os altos valores do parâmetro de tamanho considerados ( $x > 10$ ) neste trabalho não justificam a implementação do método de Monte-Carlo para simular a radiação dependente. Efetivamente, não foi observado nenhum fenômeno de dependência radiativa para os valores de  $x$  considerados [143].

A figura 3.2.8 mostra o coeficiente de absorção radiativa, o coeficiente de espalhamento e o coeficiente de extinção calculados pela teoria de Mie. A alumina escolhida foi modelada como um aglomerado denso de esferas perfeitas de raio  $r = 20 \mu\text{m}$  e de fração volumétrica  $f_v = 0.7$ . O índice de refração foi calculado usando o modelo do oscilador de Lorentz modificado por Brun [50].



*Figura 3.2.8: Predição das propriedades radiativas da alumina pela teoria de Mie.*

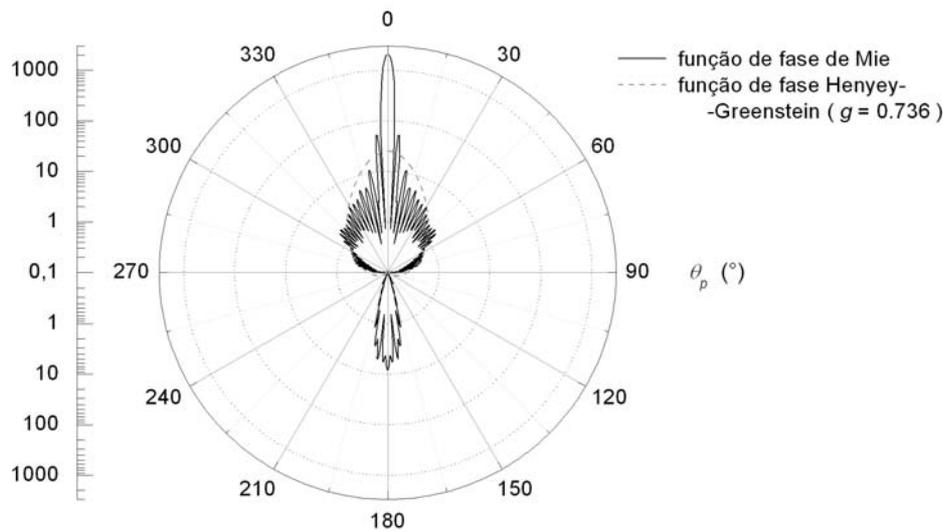
A comparação das figuras 3.2.5 e 3.2.8 mostra que a absorção do meio é diretamente relacionada à parte imaginária do índice de refração do meio. Ao contrário, o coeficiente de espalhamento depende essencialmente da estrutura microscópica do material. Quando esferas perfeitas são consideradas e quando  $x \gg 1$ , o coeficiente de espalhamento é proporcional ao inverso do raio médio das esferas. Nota-se inclusive que o coeficiente de espalhamento depende por parte do índice de refração complexo, já que o espalhamento de uma partícula reúne dois fenômenos de transformação da onda que são reflexão e refração, além do fenômeno de difração que não depende do índice de refração do material, mas sim do tamanho das partículas. A função de fase relativa à

difração da intensidade radiativa é dada para  $x \gg 1$  em termo de uma função de Bessel de primeira ordem [54],

$$\Phi_{\text{difr.}}(\theta_p) = x^2 \left[ \frac{2J_1(x \text{ sen } \theta_p)}{x \text{ sen } \theta_p} \right]^2 \quad (3.2.61)$$

e corresponde ao pico de valor observado na função de fase predita pela teoria de Mie para  $x \text{ sen } \theta_p < 4$ .

Este pico devido a difração de onda é particularmente visível na figura 3.2.9 que mostra a função de fase simulada para a amostra de alumina submetida a um feixe de luz de comprimento de onda  $\lambda = 2 \mu\text{m}$ . Efetivamente, 99 % da intensidade incidente foi desviada por difração de um ângulo de apenas  $-3^\circ < \theta_p < 3^\circ$ . O resto da radiação foi espalhado por refração e por reflexão múltipla interna. Nota-se que a reflexão múltipla interna combinada à baixa absorvidade do material neste comprimento de onda contribui a aumentar o espalhamento por trás.



*Figura 3.2.9: Predição da função de fase da alumina para  $\lambda = 2 \mu\text{m}$ .*

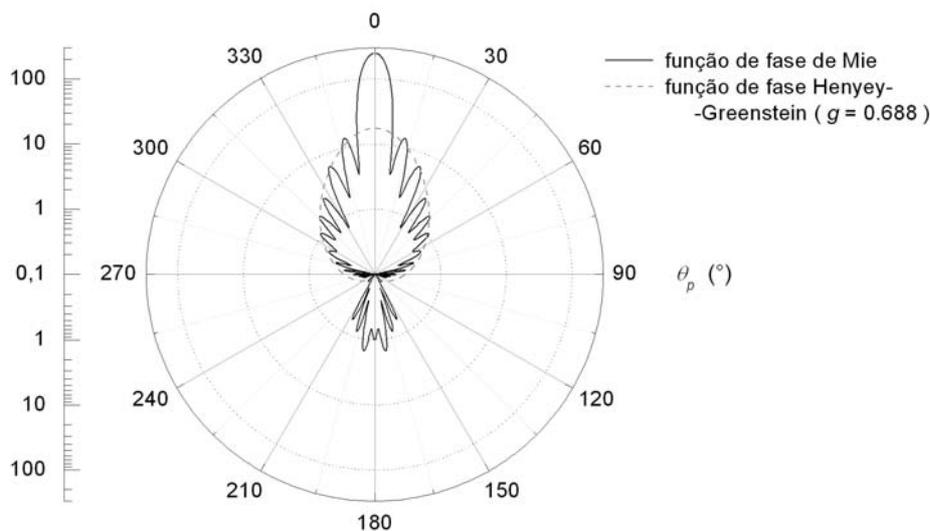
O caráter extremamente oscilatório da função de fase obtida pela solução da teoria de Mie não permite a sua integração na solução de problema inverso. Efetivamente, a introdução desta função na solução do problema direto resultaria na utilização de um número grande de direções ou de somatórios, dependendo do método de solução ser numérico ou analítico. Por isso, uma função chamada “função de fase de Henyey-Greestein” se mostra uma excelente alternativa para aproximar da função de Mie [128]. A função de Henyey-Greestein é particularmente adequada para representar o espalhamento de materiais compostos por grandes partículas esféricas  $x \gg 1$ , onde a

difração é um fenômeno dominante. A vantagem da função de Henyey-Greestein é de depender de um único parâmetro que pode entrar como parâmetro do problema inverso: o fator de assimetria, definido anteriormente na equação (3.2.54). A definição da função de Henyey-Greestein é dada pela seguinte equação:

$$\Phi_{\text{HG}}(\theta_p) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta_p)^{3/2}} \quad (3.2.62)$$

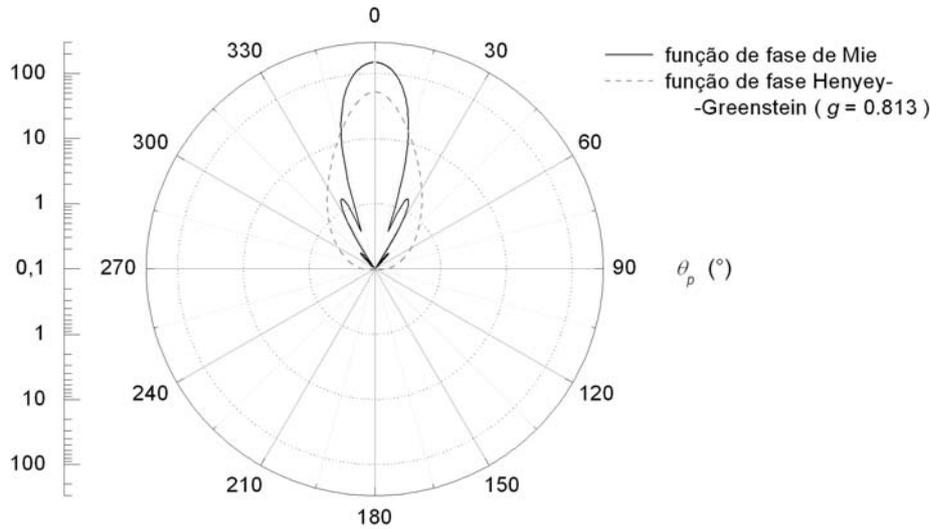
Vantagens e inconvenientes da função de Henyey-Greestein são discutidos por Van de Hulst [54] e Modest [128]. No entanto, o objetivo deste trabalho sendo a solução de um problema inverso de acoplamento condução com radiação, uma aproximação da distribuição de fluxo radiativo com o custo computacional mínimo é buscada. Neste sentido, a função de Henyey-Greestein responde a este objetivo.

Voltando a análise da solução da teoria de Mie, a função de fase calculada para  $\lambda = 6\mu\text{m}$  é representada na figura 3.2.10 junto à função de Henyey-Greestein associada. Para este comprimento de onda, a função se mostra mais aberta e simétrica com relação ao plano normal à direção incidente. O pico de difração, contido no ângulo  $-9^\circ < \theta_p < 9^\circ$  atingiu o valor 250 enquanto atingia o valor 2000 para  $\lambda = 2\mu\text{m}$ . Da mesma forma, o espalhamento por trás diminuiu do valor 8 para 1.5: por conta do aumento da absorvidade do material, o espalhamento devido às múltiplas reflexões internas diminuiu de importância. Nota-se também a redução do número de oscilações, ou seja, de interferências construtivas e destrutivas causado pela diminuição do parâmetro de tamanho  $x$ .



*Figura 3.2.10: Predição da função de fase da alumina para  $\lambda = 6 \mu\text{m}$ .*

Finalmente, a função de fase é também mostrada na figura 3.2.11 para o comprimento de onda especial, ou seja,  $\lambda = 10\mu\text{m}$ . Para este comprimento de onda, o material é extremamente absoritivo e a parte real do índice de refração toma um valor inferior à unidade, como o mostram as figuras 3.2.5 e 3.2.8.



*Figura 3.2.11: Predição da função de fase da alumina para  $\lambda = 10\mu\text{m}$ .*

Para  $\lambda = 10\mu\text{m}$ , o espalhamento é dominado pelo fenômeno de difração. Portanto, uma função de fase idêntica pode ser obtida a partir da definição (3.2.61). Devido a absortividade alta, não ocorrem fenômenos de refração nem de reflexão interna. Nota-se que, em razão da diminuição do parâmetro de tamanho que é de  $x = 4\pi$  para este comprimento de onda, o número de interferências diminuiu ainda e o pico principal orientado pela frente aumentou em termo ângulo sólido, ocupando o intervalo angular  $-20^\circ < \theta_p < 20^\circ$ . O valor máximo calculado para o pico principal também diminuiu para 150. Nesta figura, o comportamento das funções de fase de Mie e de Henyey-Greenstein parecem ter um comportamento bem diferente, devido a escala gráfica logarítmica utilizada. No entanto, a função de Henyey-Greenstein continua descrevendo adequadamente a função de fase de Mie.

Um ponto negativo da função de Henyey-Greestein é a negligência do espalhamento por trás. Para corrigir este defeito, Nicolau [117-119] desenvolveu um modelo mais completo de função de fase, baseado na combinação de duas funções de Henyey-Greestein de direções opostas. Esta função  $\Phi_N$  inclui à difração o espalhamento por trás e o espalhamento quase isotrópica gerado pelas múltiplas

reflexões internas às partículas. A sua definição, dada pela equação (3.2.63), depende de 4 parâmetros:  $g_1$ ,  $h_1$  e  $h_2$  que variam entre 0 e 1, e  $g_2$  que varia entre  $-1$  e 0. A função de Henyey-Greestein  $HG_1$  representa a contribuição ao espalhamento devida à difração e a função  $HG_2$  a contribuição devido ao espalhamento por trás.

$$\Phi_N = h_1 h_2 \Phi_{HG_1}(g_1, \theta_p) + (1 - h_1) h_2 \Phi_{HG_2}(g_2, \theta_p) + (1 - h_2) \quad (3.2.63)$$

Esta representação não será usada no problema inverso por considerar 4 parâmetros um número importante para o problema inverso. Efetivamente, além de determinar a função de fase da maneira mais acurada, o propósito deste trabalho é estimar os parâmetros radiativos e os parâmetros condutivos do material. Inclusive, para o dielétrico estudado, o espalhamento por trás e o espalhamento quase isotrópico não chegam a representar 1 % do espalhamento relativo à difração, o que a priori dificulta a estimativa dos parâmetros  $g_2$ ,  $h_1$  e  $h_2$ . Em conclusão desta análise, a função de Henyey-Greestein será usada para modelar a função de fase do problema direto.

Conhecendo o sistema de equações do problema de condução, constituído da equação de conservação da energia e das condições de contorno térmicas, assim como o sistema de equações do problema de radiação em MST constituído da ETR e das condições de contorno radiativas, pode-se resolver o problema de condução e radiação acoplado. As seções 3.3 e 3.4 estão dedicadas à formulação em coordenadas cartesianas dos problemas 1 e 2.

### 3.3 Formulação Matemática do Problema 1

A formulação matemática dos problemas físicos, envolvendo o acoplamento condução-radiação, é apresentada nesta seção. No problema de medida de temperatura transiente (problema 1), considera-se que a amostra seja coberta por uma tinta de grafite e submetida a um fluxo de laser localizado e de repartição gaussiana. No problema de medida de fator de emissão (problema 2), considera-se que a amostra seja aquecida por um fluxo quadrado bilateral, sem ser protegida pela tinta, e encontra-se em regime permanente.

Os problemas são formulados primeiro usando variáveis dimensionais, para depois serem formulados em termos de variáveis adimensionais. As variáveis dimensionais são a partir de agora indicadas por uma estrela, diferenciando-as das variáveis reduzidas. Para a Equação de Transferência Radiativa, o modelo cinza por bandas é adotado para simplificar o comportamento radiativo do material investigado.

Para o problema 1, considera-se o aquecimento com um pulso de laser de um paralelepípedo de lados  $2a^*$ ,  $2b^*$  e  $c^*$ , conforme ilustrado nas figuras 3.1.2 e 3.1.3. O corpo encontra-se inicialmente na temperatura  $T_0^*$  e para  $t^* > 0$  é aquecido na superfície  $z^* = c^*$ . A troca de calor por radiação e convecção com o ambiente no qual se encontra a amostra é levada em consideração nas superfícies  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_4$ ,  $\Gamma_5$  e  $\Gamma_6$ . Como a amostra é pintada com tinta de grafite, as condições de contorno nestas superfícies são semelhantes às equações (3.2.28) e (3.2.42). As superfícies  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$  são planos de simetria, de modo que as condições de contorno são dadas pelas equações (3.2.29) e (3.2.43). O material em análise é considerado ortotrópico, com eixos principais coincidente com os eixos  $x^*$ ,  $y^*$  e  $z^*$ . A figura 3.1.2 é repetida neste capítulo (ver figura 3.3.2) a fim de facilitar o entendimento do texto.

### 3.3.1 Formulação dimensional

Para condensar a formulação do problema, re-escrevemos as variáveis dependendo das variáveis de espaço e direção  $I^l(x^*, y^*, z^*, \psi, \theta)$ ,  $S^*(x^*, y^*, z^*, \psi, \theta)$ ,  $T^*(x^*, y^*, z^*, t^*)$  e  $\nabla \cdot q^{\text{rad}*}(x^*, y^*, z^*, t^*)$  na forma simplificada  $I^{l*}$ ,  $S^{l*}$ ,  $T^*$  e  $\nabla \cdot q^{\text{rad}*}$ . O expoente  $l$  indica a direção tomada pela intensidade radiativa. Assim, a ETR em coordenadas cartesianas é escrita para um meio cinza por banda como:

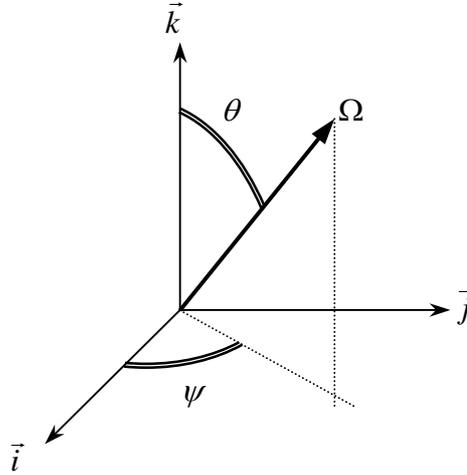
$$\xi \frac{\partial I_m^{l*}}{\partial x^*} + \eta \frac{\partial I_m^{l*}}{\partial y^*} + \mu \frac{\partial I_m^{l*}}{\partial z^*} = -(\kappa_{am}^* + \sigma_{sm}^*) I_m^{l*} + S_m^{l*} \quad (3.3.1)$$

para  $\xi, \eta$  e  $\mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $0 < x^* < a^*$ ,  $0 < y^* < b^*$  e  $0 < z^* < c^*$ ,

$$\text{onde} \quad S_m^{l*} = \kappa_{am}^* I_{bm}^*(T^*) + \frac{\sigma_{sm}^*}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I_m^{l'*} p_m(\Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega' \quad (3.3.2)$$

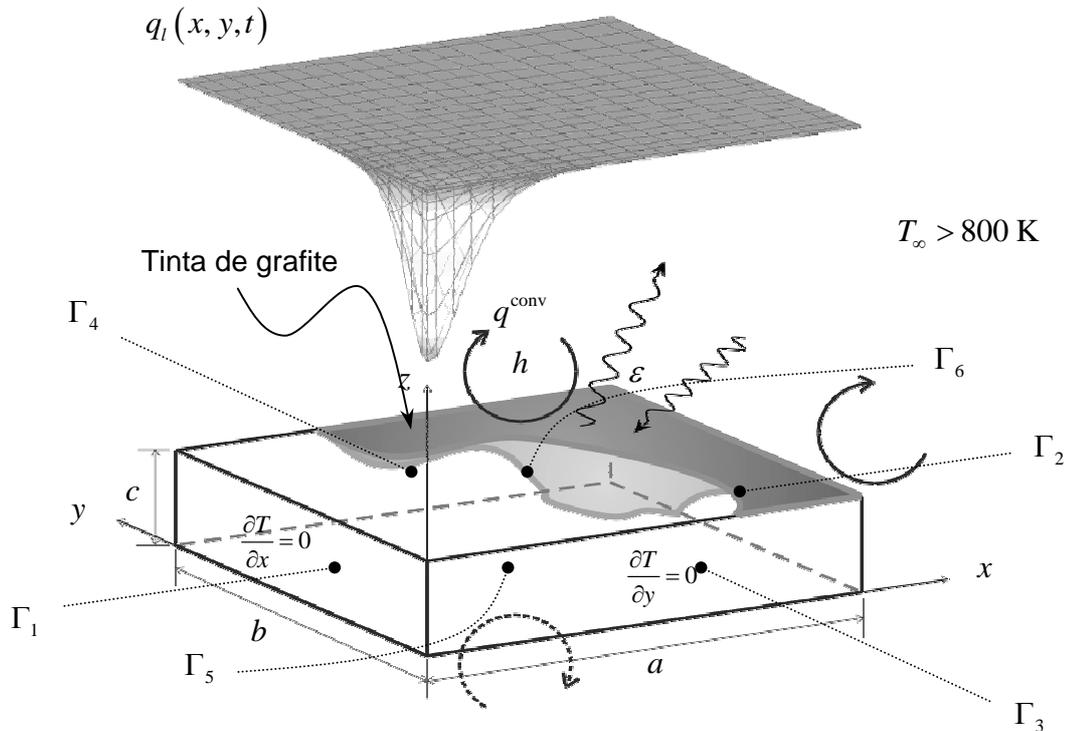
é o termo fonte radiativo.  $I_{bm}^*(T^*)$ , dada anteriormente pela equação (3.2.13.c), depende da parte real do índice de refração do meio.  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\mu$  são os co-senos diretores da direção  $\Omega$  projetada no sistema  $(x^*, y^*, z^*)$  de coordenadas cartesianas (ver figura 3.3.1), ou seja:

$$\begin{aligned}\xi &= \vec{i} \cdot \Omega = \sin \theta \cos \psi \\ \eta &= \vec{j} \cdot \Omega = \sin \theta \sin \psi \\ \mu &= \vec{k} \cdot \Omega = \cos \theta\end{aligned}\tag{3.3.3}$$



*Figura 3.3.1: Caracterização da direção  $\Omega$  no sistema de coordenadas cartesianas.*

A função de fase  $p_m(\psi', \theta', \psi, \theta)$  usada na formulação do problema direto é equivalente à função de fase de Henyey-Greenstein  $\Phi_{HGm}(\psi', \theta', \psi, \theta)$ , dada anteriormente pela equação (3.2.62).  $\psi$  é o ângulo azimutal e  $\theta$  o ângulo polar. As condições de contorno acompanhando a ETR são escritas para as fronteiras do problema 1:



*Figura 3.3.2: Representação do problema matemático 1 em coordenadas cartesianas.*

$$I_m^*(\xi, \eta, \mu) = I_m^*(-\xi, \eta, \mu) \quad (3.3.4.a)$$

para  $\xi \in ]0, 1]$ ,  $\eta$  e  $\mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_1 : (x^* = 0, 0 < y^* < b^*$  e  $0 < z^* < c^*)$

$$I_m^*(-\xi, \eta, \mu) = \varepsilon_m I_{bm}^* + \frac{1-\varepsilon_m}{\pi} \int_{\xi' > 0} I_m^*(\xi', \eta', \mu') \xi' d\Omega' \quad (3.3.4.b)$$

para  $\xi \in ]0, 1]$ ,  $\eta$  e  $\mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_2 : (x^* = a^*, 0 < y^* < b^*$  e  $0 < z^* < c^*)$

$$I_m^*(\xi, \eta, \mu) = I_m^*(\xi, -\eta, \mu) \quad (3.3.4.c)$$

para  $\eta \in ]0, 1]$ ,  $\xi$  e  $\mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_3 : (0 < x^* < a^*, y^* = 0$  e  $0 < z^* < c^*)$

$$I_m^*(\xi, -\eta, \mu) = \varepsilon_m I_{bm}^* + \frac{1-\varepsilon_m}{\pi} \int_{\eta' > 0} I_m^*(\xi', \eta', \mu') \eta' d\Omega' \quad (3.3.4.d)$$

para  $\eta \in ]0, 1]$ ,  $\xi$  e  $\mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_4 : (0 < x^* < a^*, y^* = b^*$  e  $0 < z^* < c^*)$

$$I_m^*(\xi, \eta, \mu) = \varepsilon_m I_{bm}^* + \frac{1-\varepsilon_m}{\pi} \int_{\mu' < 0} I_m^*(\xi', \eta', \mu') \mu' d\Omega' \quad (3.3.4.e)$$

para  $\mu \in ]0, 1]$ ,  $\xi$  e  $\eta \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_5 : (0 < x^* < a^*, 0 < y^* < b^*$  e  $z^* = 0)$

$$I_m^*(\xi, \eta, -\mu) = \varepsilon_m I_{bm}^* + \frac{1-\varepsilon_m}{\pi} \int_{\mu' > 0} I_m^*(\xi', \eta', \mu') \mu' d\Omega' \quad (3.3.4.f)$$

para  $\mu \in ]0, 1]$ ,  $\xi$  e  $\eta \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_6 : (0 < x^* < a^*, 0 < y^* < b^*$  e  $z^* = c^*)$

A ETR não é apresentada na forma transiente por considerar à propagação da radiação um fenômeno instantâneo. Por isso, a formulação da ETR e das suas condições de contorno não depende da variável  $t^*$ , ao contrário da equação de condução do calor, que é escrita como:

$$C^* \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} \left( k_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left( k_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( k_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) - \nabla \cdot q^{\text{rad}*} \quad (3.3.5)$$

em  $0 < x^* < a^*, 0 < y^* < b^*, 0 < z^* < c^*$  e para  $t^* > 0$

onde 
$$\nabla \cdot q^{rad*} = \sum_{m=1}^{N_f} \kappa_{am}^* \left[ 4\pi I_{bm}^*(T^*) - \int_{\Omega=4\pi} I_m^{l*} d\Omega \right] \quad (3.3.6)$$

é o divergente do fluxo radiativo.  $k_x^*$ ,  $k_y^*$  e  $k_z^*$  são as componentes da condutividade térmica do meio ortotrópico e  $C^*$  o calor específico volumétrico.

As condições de contorno necessárias para a determinação do campo de temperatura no domínio, são escritas também para fronteiras opacas. O fluxo de calor, originário da interação do feixe laser com o material, é imposto na superfície  $\Gamma_6$  com o perfil de uma função de Gauss. A potência da fonte de calor pode variar com o tempo; portanto, o fluxo no contorno se escreve como uma função do tempo e do espaço, i.e.,  $q_l^*(x^*, y^*, t^*)$ .

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \text{ e para } t^* > 0 \quad (3.3.7.a)$$

$$k_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + h^{rad*} T^* + \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m \pi I_{bm}^* = h^{rad*} T_\infty^* + \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m \int_{\xi>0} I_m^{l*} \xi d\Omega \quad (3.3.7.b)$$

em  $\Gamma_2$  e para  $t^* > 0$

$$\frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{em } \Gamma_3 \text{ e para } t^* > 0 \quad (3.3.7.c)$$

$$k_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + h^{rad*} T^* + \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m \pi I_{bm}^* = h^{rad*} T_\infty^* + \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m \int_{\eta>0} I_m^{l*} \eta d\Omega \quad (3.3.7.d)$$

em  $\Gamma_4$  e para  $t^* > 0$

$$-k_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} + h^{rad*} T^* + \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m \pi I_{bm}^* = h^{rad*} T_\infty^* + \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m \int_{\mu<0} I_m^{l*} \mu d\Omega \quad (3.3.7.e)$$

em  $\Gamma_5$  e para  $t^* > 0$

$$k_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} + h^{rad*} T^* + \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m \pi I_{bm}^* = h^{rad*} T_\infty^* + \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m \int_{\mu>0} I_m^{l*} \mu d\Omega + \varepsilon_l q_l^*(x^*, y^*, t^*) \quad (3.3.7.f)$$

em  $\Gamma_6$  e para  $t^* > 0$

A condição inicial é dada por um campo de temperatura constante no domínio:

$$T^* = T_0^* \quad \text{em } 0 < x^* < a^*, 0 < y^* < b^*, 0 < z^* < c^* \text{ e para } t^* = 0 \quad (3.3.8)$$

No objetivo de facilitar e otimizar a implementação deste sistema de equações, é preciso substituir as variáveis dimensionais atuando nas equações por variáveis adimensionais.

### 3.3.2 Escolha das variáveis adimensionais

A introdução de variáveis adimensionais, além de reduzir o número de parâmetros do problema, tem por objetivo trazer a mesma ordem de grandeza, geralmente da ordem da unidade, as variáveis do problema. No caso das componentes da condutividade térmica, são definidas as seguintes variáveis adimensionais:

$$k_x = \frac{k_x^*}{k_{ref}^*} \quad ; \quad k_y = \frac{k_y^*}{k_{ref}^*} \quad ; \quad k_z = \frac{k_z^*}{k_{ref}^*} \quad (3.3.9.a-c)$$

onde  $k_{ref}^*$  é uma condutividade térmica de referência. Uma redução semelhante é feita para as variáveis de posição e de distância, onde a dimensão de referência  $d_{ref}^*$  é introduzida:

$$x = \frac{x^*}{d_{ref}^*} \quad ; \quad y = \frac{y^*}{d_{ref}^*} \quad ; \quad z = \frac{z^*}{d_{ref}^*} \quad (3.3.9.d-f)$$

$$a = \frac{a^*}{d_{ref}^*} \quad ; \quad b = \frac{b^*}{d_{ref}^*} \quad ; \quad c = \frac{c^*}{d_{ref}^*} \quad (3.3.9.g-i)$$

Uma capacidade térmica volumétrica de referência,  $C_{ref}^*$ , também é introduzida, de modo que pode se escrever:

$$C = \frac{C^*}{C_{ref}^*} \quad (3.3.9.j)$$

De modo semelhante, pode se adimensionalizar o fluxo de calor nas superfícies do domínio:

$$q = \frac{q^*}{q_{ref}^*} \quad (3.3.9.k)$$

Nota-se que  $C_{ref}^*$  pode ser tomado igual a  $C^*$ ,  $k_{ref}^*$  igual a  $k_z^*$  e  $q_{ref}^*$  igual a  $q^*$ .

Para o problema 1, a medida relevante para o problema inverso é a pequena variação de temperatura observada após a aplicação na fronteira oposta de um fluxo laser. Portanto, a temperatura adimensional é escrita como:

$$T = \frac{T^* - T_0^*}{\Delta T_{max}^*} \quad \text{onde} \quad \Delta T_{max}^* = T_{max}^* (0, 0, 0, t^*) - T_0^* \quad (3.3.9.l,m)$$

Com relação à adimensionalização da variável tempo, utiliza-se:

$$t = \frac{k_{ref}^* t^*}{C_{ref}^* d_{ref}^{*2}} \quad (3.3.9.n)$$

Para simplificar a expressão da equação da energia, define-se um divergente do fluxo radiativo adimensional:

$$\nabla \cdot q^{rad} = \frac{d_{ref}^{*2}}{k_{ref}^* \Delta T_{max}^*} \nabla \cdot q^{rad*} \quad (3.3.9.o)$$

O número de Biot radiativo, caracterizando principalmente a razão entre a resistência térmica radiativa interna e a resistência térmica radiativa externa, também aparece na formulação adimensional do problema, sendo definido como:

$$Bi^{rad} = \frac{h^{rad*} d_{ref}^*}{k_{ref}^*} = \frac{\left( h^* + 4\sigma T_{\infty}^{*3} \left( \sum_{m=1}^{N_f} \varepsilon_m F_m(T_{\infty}^*) \right) \right) d_{ref}^*}{k_{ref}^*} \quad (3.3.9.p)$$

As variáveis e parâmetros que compõem o sistema formado pela equação da energia e as suas condições de contorno foram adimensionalizadas. No entanto, é preciso adimensionalizar a Equação de Transferência Radiativa e as condições de contorno radiativas. Uma intensidade radiativa e parâmetros radiativos adimensionais são introduzidos:

$$\text{Intensidade radiativa adimensional:} \quad I_{\lambda} = \frac{I_{\lambda}^*}{4\sigma T_0^{*4}} \quad (3.3.9.q)$$

$$\text{Espessura ótica:} \quad \tau_{0\lambda} = \beta_{\lambda}^* d_{ref}^* \quad (3.3.9.r)$$

$$\text{Coeficiente de absorção adimensional:} \quad \kappa_{a\lambda} = \kappa_{a\lambda}^* d_{ref}^* \quad (3.3.9.s)$$

$$\text{Coeficiente de espalhamento adimensional:} \quad \sigma_{s\lambda} = \sigma_{s\lambda}^* d_{ref}^* \quad (3.3.9.t)$$

O número de Planck adimensional  $N_{pl}$ , caracterizando a razão entre os efeitos condutivos e radiativos no meio, aparece na formulação do problema adimensional, junto com o número de Biot radiativo:

$$N_{pl\lambda} = \frac{\beta_{\lambda}^* k_{ref}^* \Delta T_{max}^*}{4\sigma T_0^{*4}} \quad (3.3.9.u)$$

Como se pode observar, o número de Planck é composto da condutividade térmica de referência e do coeficiente de extinção do meio semitransparente.

### 3.3.3 Formulação adimensional

Substituindo as variáveis adimensionais, dadas pelas equações (3.3.9.a-u), nas equações (3.3.1,2) dimensionais, a ETR adimensional em coordenadas cartesianas é escrita para um meio cinza por bandas como:

$$\xi \frac{\partial I_m^l}{\partial x} + \eta \frac{\partial I_m^l}{\partial y} + \mu \frac{\partial I_m^l}{\partial z} = -(\kappa_{am} + \sigma_{sm}) I_m^l + S_m^l \quad (3.3.10)$$

para  $\xi, \eta$  e  $\mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  e  $0 < z < c$

onde

$$S_m^l = \kappa_{am} I_{bm}(T) + \frac{\sigma_{sm}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I_m^l P_m(\Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega' \quad (3.3.11)$$

é o termo fonte radiativo adimensional. As condições de contorno são re-escritas na forma reduzida como:

$$I_m(\xi, \eta, \mu) = I_m(-\xi, \eta, \mu) \quad (3.3.12.a)$$

para  $\xi \in ]0, 1]$ ,  $\eta$  e  $\mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_1 : (x = 0, 0 < y < b$  e  $0 < z < c)$

$$I_m(-\xi, \eta, \mu) = \varepsilon_m I_{bm} + \frac{1 - \varepsilon_m}{\pi} \int_{\xi' > 0} I_m(\xi', \eta', \mu') \xi' d\Omega' \quad (3.3.12.b)$$

para  $\xi \in ]0, 1]$ ,  $\eta$  e  $\mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_2 : (x = a, 0 < y < b$  e  $0 < z < c)$

$$I_m(\xi, \eta, \mu) = I_m(\xi, -\eta, \mu) \quad (3.3.12.c)$$

para  $\eta \in ]0, 1]$ ,  $\xi$  e  $\mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_3 : (0 < x < a, y = 0$  e  $0 < z < c)$

$$I_m(\xi, -\eta, \mu) = \varepsilon_m I_{bm} + \frac{1 - \varepsilon_m}{\pi} \int_{\eta' > 0} I_m(\xi', \eta', \mu') \eta' d\Omega' \quad (3.3.12.d)$$

para  $\eta \in ]0, 1]$ ,  $\xi$  e  $\mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_4 : (0 < x < a, y = b$  e  $0 < z < c)$

$$I_m(\xi, \eta, \mu) = \varepsilon_m n_r^2 I_{bm} + \frac{1 - \varepsilon_m}{\pi} \int_{\mu' < 0} I_m(\xi', \eta', \mu') \mu' d\Omega' \quad (3.3.12.e)$$

para  $\mu \in ]0, 1]$ ,  $\xi$  e  $\eta \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_5 : (0 < x < a, 0 < y < b$  e  $z = 0)$

$$I_m(\xi, \eta, -\mu) = \varepsilon_m I_{bm} + \frac{1 - \varepsilon_m}{\pi} \int_{\mu' > 0} I_m(\xi', \eta', \mu') \mu' d\Omega' \quad (3.3.12.f)$$

para  $\mu \in ]0, 1]$ ,  $\xi$  e  $\eta \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_6 : (0 < x < a, 0 < y < b$  e  $z = c)$

A equação de condução do calor adimensional fica:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \nabla \cdot q^{\text{rad}} \quad (3.3.13)$$

em  $0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c$  e para  $t > 0$

A utilização de uma temperatura adimensional modifica a expressão do divergente do fluxo radiativo, onde aparece o número de Planck:

$$\nabla \cdot q^{\text{rad}} = \sum_{m=1}^{N_f} \frac{K_{am} \tau_{0m}}{N_{plm}} \left[ 4\pi I_{bm} - \int_{\Omega=4\pi} I_m^l d\Omega \right] \quad (3.3.14)$$

Nota-se que, graças à formulação adimensional, o termo de emissão do corpo negro pode ser simplificado da seguinte forma:

$$4\pi I_{bm} = n_r^2 F_m(T) T^4 \quad (3.3.15)$$

As condições de contorno térmicas são escritas adimensionalizando o termo de balanço de fluxo radiativo na fronteira:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \text{ e para } t > 0 \quad (3.3.16.a)$$

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \text{Bi}^{\text{rad}} T + \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\varepsilon_m \tau_{0m}}{N_{plm}} \pi I_{bm} = \text{Bi}^{\text{rad}} T_\infty + \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\varepsilon_m \tau_{0m}}{N_{plm}} \int_{\xi>0} I_m^l \xi d\Omega \quad (3.3.16.b)$$

em  $\Gamma_2$  e para  $t > 0$

$$\frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{em } \Gamma_3 \text{ e para } t > 0 \quad (3.3.16.c)$$

$$k_y \frac{\partial T}{\partial y} + \text{Bi}^{\text{rad}} T + \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\varepsilon_m \tau_{0m}}{N_{plm}} \pi I_{bm} = \text{Bi}^{\text{rad}} T_\infty + \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\varepsilon_m \tau_{0m}}{N_{plm}} \int_{\eta>0} I_m^l \eta d\Omega \quad (3.3.16.d)$$

em  $\Gamma_4$  e para  $t > 0$

$$-k_z \frac{\partial T}{\partial z} + \text{Bi}^{\text{rad}} T + \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\varepsilon_m \tau_{0m}}{N_{plm}} \pi I_{bm} = \text{Bi}^{\text{rad}} T_\infty + \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\varepsilon_m \tau_{0m}}{N_{plm}} \int_{\mu<0} I_m^l \mu d\Omega \quad (3.3.16.e)$$

em  $\Gamma_5$  e para  $t > 0$

$$k_z \frac{\partial T}{\partial z} + \text{Bi}^{\text{rad}} T + \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\varepsilon_m \tau_{0m}}{N_{plm}} \pi I_{bm} = \text{Bi}^{\text{rad}} T_\infty + \sum_{m=1}^{N_f} \frac{\varepsilon_m \tau_{0m}}{N_{plm}} \int_{\mu>0} I_m^l \mu d\Omega + \varepsilon_l q_l(x, y, t) \quad (3.3.16.f)$$

em  $\Gamma_6$  e para  $t > 0$

A condição inicial é dada por uma temperatura adimensional nula no domínio:

$$T = 0 \quad \text{em } 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c \quad \text{e para } t = 0 \quad (3.3.17)$$

Nota-se que a função de fluxo do laser aparece só no contorno  $\Gamma_6$ .

### 3.4 Formulação Matemática do Problema 2

No problema 2, o corpo de prova encontra-se aquecido pelos dois lados principais, por um fluxo contínuo. O problema não depende da variável tempo  $t^*$ . Por outro lado, sendo medida a emissão radiativa do corpo de prova, as fronteiras  $\Gamma_5$  e  $\Gamma_6$  são semitransparentes com mudança de índice de refração. Para simplificar a solução do problema 2, as superfícies  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_4$ , de tamanho e de fator de forma desprezíveis com respeito aos das superfícies  $\Gamma_5$  e  $\Gamma_6$ , foram consideradas transparentes sem mudança de índice de refração; a intensidade emergente neste caso é perdida no meio ambiente e não sofre alteração de direção. Tal simplificação permite reduzir o número de direções de controle, sem alterar de maneira significativa a solução do problema 2. A figura 3.3.3 ilustra o problema físico em questão.

#### 3.4.1 Formulação dimensional

A ETR dimensional 3D e seu termo fonte radiativo, para um meio considerado cinza por bandas, já foram dados pelas equações (3.1.1) e (3.1.2). As fronteiras principais  $z^* = 0$  e  $z^* = c^*$  são consideradas semitransparentes com mudança de índice de refração. Em aplicação da lei de Snell original, a onda incidente na superfície semitransparente com um ângulo  $\theta_1$  inferior ao ângulo crítico  $\theta_1 < \theta_{cr}$  emerge da superfície com o ângulo de refração  $\theta_2$ . No caso particular de que  $\theta_1 > \theta_{cr}$  a onda incidente é refletida pela superfície plana de maneira especular sem redução de amplitude. Define-se então o co-seno diretor do ângulo polar crítico de refração  $\mu_{cr}$ :

$$\mu_{cr} = \cos(\theta_{cr}) = \sqrt{1 - n_r^{-1}} \quad (3.4.1)$$

onde  $n_r = n_{r1}/n_{r2}$  é a parte real do índice relativo de refração. Assumindo a parte real do índice de refração do ar seco igual a 1, obviamente o índice de refração relativo pode ser substituído pelo índice do meio semitransparente. Usando o co-seno diretor do ângulo crítico com respeito à direção  $\vec{k}$ , as condições de contorno ficam:

$$I_m^*(\xi, \eta, \mu) = I_m^*(-\xi, \eta, \mu) \quad (3.4.2.a)$$

para  $\xi \in ]0, 1], \eta \text{ e } \mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_1 : (x^* = 0, 0 < y^* < b^* \text{ e } 0 < z^* < c^*)$

$$I_m^*(-\xi, \eta, \mu) = 0 \quad (3.4.2.b)$$

para  $\xi \in ]0, 1], \eta \text{ e } \mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_2 : (x^* = a^*, 0 < y^* < b^* \text{ e } 0 < z^* < c^*)$

$$I_m^*(\xi, \eta, \mu) = I_m^*(\xi, -\eta, \mu) \quad (3.4.2.c)$$

para  $\eta \in ]0, 1], \xi \text{ e } \mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_3 : (0 < x^* < a^*, y^* = 0 \text{ e } 0 < z^* < c^*)$

$$I_m^*(\xi, -\eta, \mu) = 0 \quad (3.4.2.d)$$

para  $\eta \in ]0, 1], \xi \text{ e } \mu \in [-1, 1]$  e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_4 : (0 < x^* < a^*, y^* = b^* \text{ e } 0 < z^* < c^*)$

$$I_m^*(\xi, \eta, \mu) = \begin{cases} I_m^*(\xi, \eta, -\mu) & \text{para } 0 < \mu < \mu_{cr} \\ 0 & \text{para } \mu \geq \mu_{cr} \end{cases}, \quad \xi \text{ e } \eta \in [-1, 1] \quad (3.4.2.e)$$

e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_5 : (0 < x^* < a^*, 0 < y^* < b^* \text{ e } z^* = 0)$

$$I_m^*(\xi, \eta, -\mu) = \begin{cases} I_m^*(\xi, \eta, \mu) & \text{para } 0 < \mu < \mu_{cr} \\ 0 & \text{para } \mu \geq \mu_{cr} \end{cases}, \quad \xi \text{ e } \eta \in [-1, 1] \quad (3.4.2.f)$$

e para  $m = 1, \dots, N_f$ ,  
em  $\Gamma_6 : (0 < x^* < a^*, 0 < y^* < b^* \text{ e } z^* = c^*)$

Os contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$  são planos de simetria matemáticos: a intensidade nestas fronteiras é refletida de maneira especular.

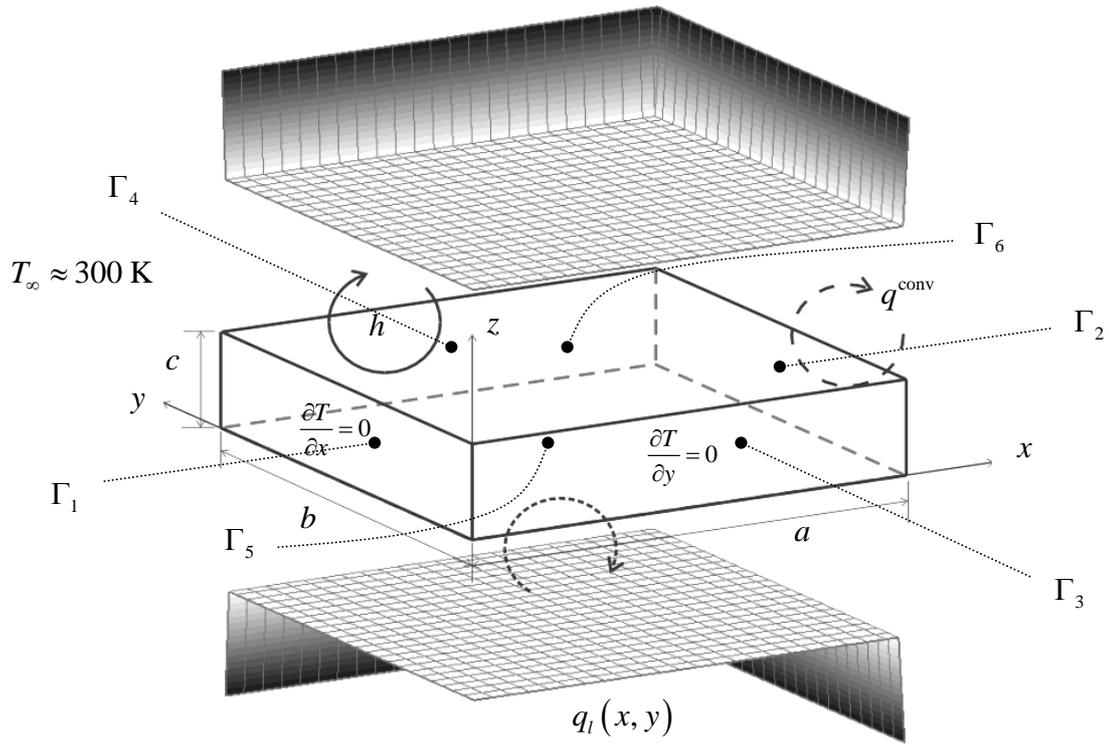
Para a solução do problema de condução do problema 2, a equação de condução de calor é escrita em regime permanente:

$$\frac{\partial}{\partial x^*} \left( k_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left( k_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( k_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = \nabla \cdot q^{\text{rad}*} \quad (3.4.3)$$

em  $0 < x^* < a^*, 0 < y^* < b^*, 0 < z^* < c^*$ ,

onde o divergente do fluxo radiativo é dado por:

$$\nabla \cdot q^{\text{rad}*} = \sum_{m=1}^{N_f} \kappa_{am}^* \left[ 4\pi I_{bm}^*(T^*) - \int_{\Omega=4\pi} I_m^* d\Omega \right] \quad (3.4.4)$$



*Figura 3.3.3: Representação do problema matemático 2 em coordenadas cartesianas.*

O aquecimento do corpo de prova pelas faces  $\Gamma_5$  e  $\Gamma_6$  é permanente. Por este motivo, as condições de contorno térmicas (3.4.5.e,f) para o problema 2 são escritas em função do fluxo laser  $q_l^*(x^*, y^*)$ , dependente só do espaço.

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad ; \quad k_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + h^* T^* = h^* T_\infty^* \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.4.5.a,b)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{em } \Gamma_3 \quad ; \quad k_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + h^* T^* = h^* T_\infty^* \quad \text{em } \Gamma_4 \quad (3.4.5.c,d)$$

$$-k_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} + h^* T^* = h^* T_\infty^* + q_l^*(x^*, y^*) \quad \text{em } \Gamma_5 \quad (3.4.5.e)$$

$$k_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} + h^* T^* = h^* T_\infty^* + q_l^*(x^*, y^*) \quad \text{em } \Gamma_6 \quad (3.4.5.f)$$

Neste ponto acaba de ser formulado o problema 2 na sua forma dimensional. Porém, sendo a intensidade radiativa a variável medida, outra técnica de adimensionalização foi escolhida para reduzir o problema 2. Novas variáveis são definidas a seguir.

### 3.4.2 Escolha das variáveis adimensionais

O problema 2 tem por solução o campo de intensidade radiativa espectral e direcional na amostra. A temperatura, cuja variação infinitesimal não é desta vez investigada, foi adimensionalizada da seguinte forma:

$$T = \frac{T^*}{T_0^*} \quad (3.4.6.a)$$

A nova expressão da temperatura muda conseqüentemente a expressão do número de Planck, dado inicialmente pela equação (3.3.9.u) do problema 1:

$$N_{pl\lambda} = \frac{\beta_{\lambda}^* k_{ref}^*}{4\sigma T_0^{*3}} \quad (3.4.6.b)$$

Como pode ser notado, o número de Planck é composto da condutividade térmica de referência e do coeficiente de extinção radiativo do meio semitransparente.

Outras modificações são trazidas ao problema 2. De acordo com a adimensionalização da temperatura, equação (3.4.6.a), o fluxo de calor adimensional não é mais escrito em função de um fluxo de calor de referência, mas da seguinte forma:

$$q = \frac{d_{ref}^* q^*}{k_{ref}^* T_0^*} \quad (3.4.6.c)$$

Também, por conta da temperatura reduzida, o divergente do fluxo radiativo fica:

$$\nabla \cdot q^{rad} = \frac{d_{ref}^{*2}}{k_{ref}^* T_0^*} \nabla \cdot q^{rad*} \quad (3.4.6.d)$$

Devida à ausência de tinta nas fronteiras do corpo de prova, foi introduzido o número de Biot original para quantificar a razão entre os efeitos condutivos e convectivos nas fronteiras:

$$Bi = \frac{h^* d_{ref}^*}{k_{ref}^*} \quad (3.4.6.e)$$

As outras variáveis adimensionais utilizadas no problema 2 foram definidas na seção 3.3.2 pelas equações (3.3.9.a-j) e (3.3.9.q-t), e conservadas.

### 3.4.3 Formulação adimensional

A formulação da ETR cinza por bandas adimensional, dada pelas equações (3.3.10) e (3.3.11), serve para a solução do problema 2 adimensional. No entanto, outras

condições de contornos adimensionais precisam ser levadas em conta. Substituindo as variáveis adimensionais (3.3.9.q-t) dentro das equações (3.4.2.a-f), as condições de contorno radiativas adimensionais para o problema 2 ficam:

$$I_m(\xi, \eta, \mu) = I_m(-\xi, \eta, \mu) \quad \text{para } \xi \in ]0, 1], \eta \text{ e } \mu \in [-1, 1] \quad (3.4.7.a)$$

e para  $m = 1, \dots, N_f$ , em  $\Gamma_1$

$$I_m(-\xi, \eta, \mu) = 0 \quad \text{para } \xi \in ]0, 1], \eta \text{ e } \mu \in [-1, 1] \quad (3.4.7.b)$$

e para  $m = 1, \dots, N_f$ , em  $\Gamma_2$

$$I_m(\xi, \eta, \mu) = I_m(\xi, -\eta, \mu) \quad \text{para } \eta \in ]0, 1], \xi \text{ e } \mu \in [-1, 1] \quad (3.4.7.c)$$

e para  $m = 1, \dots, N_f$ , em  $\Gamma_3$

$$I_m(\xi, -\eta, \mu) = 0 \quad \text{para } \eta \in ]0, 1], \xi \text{ e } \mu \in [-1, 1] \quad (3.4.7.d)$$

e para  $m = 1, \dots, N_f$ , em  $\Gamma_4$

$$I_m(\xi, \eta, \mu) = \begin{cases} I_m(\xi, \eta, -\mu) & \text{para } 0 < \mu < \mu_{cr} \\ 0 & \text{para } \mu \geq \mu_{cr} \end{cases}, \xi \text{ e } \eta \in [-1, 1] \quad (3.4.7.e)$$

e para  $m = 1, \dots, N_f$ , em  $\Gamma_5$

$$I_m(\xi, \eta, -\mu) = \begin{cases} I_m(\xi, \eta, \mu) & \text{para } 0 < \mu < \mu_{cr} \\ 0 & \text{para } \mu \geq \mu_{cr} \end{cases}, \xi \text{ e } \eta \in [-1, 1] \quad (3.4.7.f)$$

e para  $m = 1, \dots, N_f$ , em  $\Gamma_6$

Utilizando as variáveis adimensionais (3.3.9.a-j), (3.3.9.q-t) e (3.4.6.a-e), a equação de condução do calor permanente na forma adimensional torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \nabla \cdot q^{\text{rad}} \quad (3.4.8)$$

em  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  e  $0 < z < c$

onde

$$\nabla \cdot q^{\text{rad}} = \sum_{m=1}^{N_f} \frac{K_{am} \tau_{0m}}{N_{plm}} \left[ 4\pi I_{bm} - \int_{\Omega=4\pi} I_m^l d\Omega \right] \quad (3.4.9)$$

Nota-se a posição do número de Planck na definição do divergente do fluxo radiativo, caracterizando a importância da geração de calor por radiação no perfil de temperatura do meio. As condições de contorno condutivas para o problema 2, dadas na forma adimensional, se escrevem:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad ; \quad k_x \frac{\partial T}{\partial x} + \text{Bi}T = \text{Bi}T_\infty \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.4.10.a,b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{em } \Gamma_3 \quad ; \quad k_y \frac{\partial T}{\partial y} + \text{Bi}T = \text{Bi}T_\infty \quad \text{em } \Gamma_4 \quad (3.4.10.c,d)$$

$$-k_z \frac{\partial T}{\partial z} + \text{Bi}T = \text{Bi}T_\infty + q_l(x, y) \quad \text{em } \Gamma_5 \quad (3.4.10.e)$$

$$k_z \frac{\partial T}{\partial z} + \text{Bi}T = \text{Bi}T_\infty + q_l(x, y) \quad \text{em } \Gamma_6 \quad (3.4.10.f)$$

A formulação matemática dos problemas 1 e 2 de acoplamento condução-radiação foi estabelecida neste capítulo. No entanto, em vista da complexidade da formulação matemática, os problemas 1 e 2 precisam ser resolvidos por métodos numéricos. Estes métodos, baseados na discretização do domínio em “volumes finitos”, são apresentados na seção a seguir.

# Capítulo 4

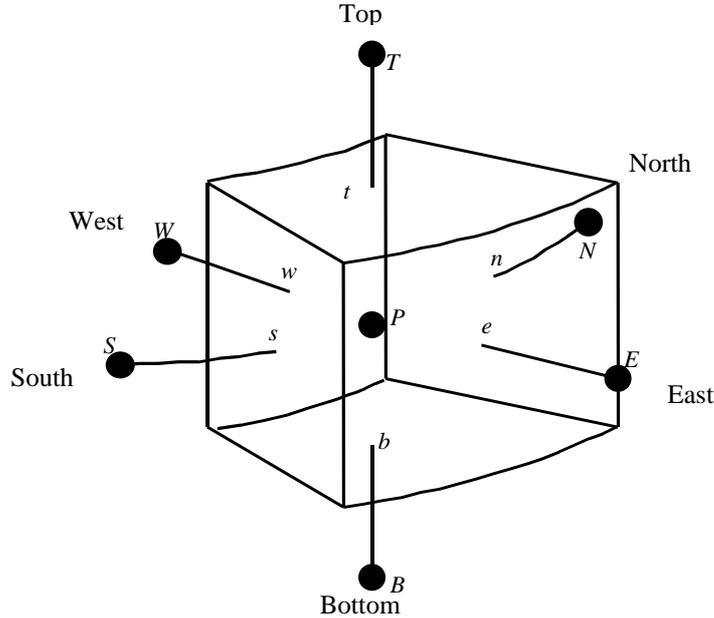
## Método de Solução do Problema Direto

Para solucionar os problemas 1 e 2 no domínio caracterizado na seção 3.1, usa-se o Método de Volumes Finitos. O Método de Volumes Finitos (FVM) foi introduzido por Patankar [37], em 1980, e consiste em resolver, num domínio discretizado em volumes elementares, um conjunto de equações escritas na forma integrada. Em consequência, o usuário tem a liberdade de escolher a estrutura da malha, regular ou irregular, a forma e o tamanho dos volumes, garantindo sempre o aspecto conservativo. Os fundamentos do método não serão discutidos neste capítulo, a não ser a descrição do método e a integração das equações para resolver problemas de acoplamento condução-radiação.

Vimos no Capítulo 3 que a formulação dos problemas 1 e 2 se decompõe em dois problemas distintos que tratam respectivamente da parte radiativa e da parte condutiva, ambas sendo acopladas através de termos fontes. Usando das vantagens do Método de Volumes Finitos, a malha escolhida para resolver ambos os problemas é tomada idêntica, respeitando a ortogonalidade da estrutura em todos os pontos. A formulação discreta de cada equação é especificada na continuidade deste capítulo, além de algoritmos de solução apropriados.

A aplicação do Método de Volumes Finitos requer a divisão do espaço em um determinado número de volumes elementares, que podem variar de tamanho de acordo com a precisão desejada em qualquer posição do domínio. O volume elementar  $\Delta V$ , representado na figura 4.1.1 em três dimensões, possui seis faces chamadas pelo nome dos pontos cardinais. As letras minúsculas representam o centro das faces que delimitam o volume enquanto as letras maiúsculas representam o centro dos volumes vizinhos. O ponto  $P$  constitui o centro do volume de controle. Neste ponto  $P$ , os valores das variáveis e das propriedades referentes ao meio são tomados iguais à média obtida por integração no volume. Portanto, as propriedades são supostas constantes

dentro do volume, já que o volume de controle é considerado uma entidade elementar de tamanho infinitesimal.



*Figura 4.1.1: Volume de controle específico ao esquema FVM.*

Quando a equação leva em conta um termo gradiente, a lei de conservação da divergência do fluxo, dada pela equação (4.1.1), estipula que:

$$\iiint_{\Delta V} \nabla \cdot \vec{\varphi} dV = \iint_A \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dA \quad (4.1.1)$$

O divergente do vetor fluxo  $\vec{\varphi}$  integrado no volume de controle exprime-se como uma função do produto escalar do vetor fluxo com a área da fronteira de direção normal  $\vec{n}$ .

A seguir, as equações de transferência radiativa e de condução do calor são integradas. Em seguida, alguns algoritmos usados na solução do problema radiativo e do problema condutivo são apresentados.

## 4.1 Problema de Radiação

A ETR é uma equação diferencial de variáveis espaciais e angulares. Por isso, a integração da ETR se realiza sobre um elemento de volume  $\Delta V$ , e sobre um ângulo sólido notado  $\Omega^l$ , onde  $l$  é o número da direção principal  $\Omega$ , de modo que  $\sum_l \Omega^l = 4\pi$  [49].  $\Omega^l$  representa um setor angular da esfera unitária direcional. A ETR

integrada se escreve como:

$$\int_{\Omega'} \int_{\Delta V} (\Omega \cdot \nabla) I_m(\mathbf{r}, \Omega) dV d\Omega = \int_{\Omega'} \int_{\Delta V} -(\kappa_{am} + \sigma_{sm}) I_m(\mathbf{r}, \Omega) dV d\Omega + \int_{\Omega'} \int_{\Delta V} S_m(\mathbf{r}, \Omega) dV d\Omega \quad (4.1.2)$$

onde o termo fonte radiativo é

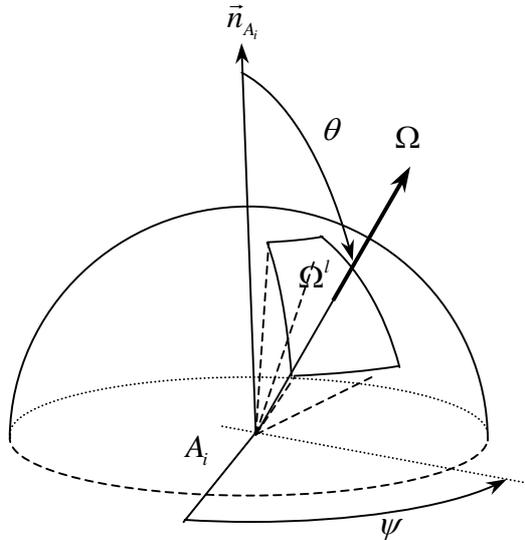
$$\int_{\Omega'} \int_{\Delta V} S_m(\mathbf{r}, \Omega) dV d\Omega = \int_{\Omega'} \int_{\Delta V} \kappa_{am} I_{bm}(\mathbf{r}, T) dV d\Omega + \int_{\Omega'} \int_{\Delta V} \frac{\sigma_{sm}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I_m(\mathbf{r}, \Omega') p_m(\Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega' dV d\Omega \quad (4.1.3)$$

Modificando a integral espacial do primeiro termo da equação (4.1.2), em aplicação da lei de conservação do divergente do fluxo, temos:

$$\int_{\Delta V} (\Omega \cdot \nabla) I_m dV = \int_{\Delta V} \nabla I_m \cdot \Omega dV = \int_{\Delta V} \nabla \cdot (I_m \Omega) dV = \int_A I_m \Omega \cdot \vec{n} dA \quad (4.1.4)$$

e definindo as integrais dos co-senos diretores da direção  $\Omega$  com a normal das superfícies  $\vec{n}_{A_i}$ :

$$D_i^l = \int_{\Omega'} \vec{n}_{A_i} \cdot \Omega d\Omega \quad (4.1.5)$$



*Figura 4.1.2: Integração do co-seno diretor de uma direção de controle com a normal a uma superfície do volume de controle.*

obtem-se uma nova expressão do termo gradiente da ETR:

$$\int_{\Omega'} \int_{\Delta V} (\Omega \cdot \nabla) I_m(\mathbf{r}, \Omega) dV d\Omega = \int_A I_m^l D_A^l dA = \sum_{e,w,n,s,t,b} A_i D_i^l (I_m^l)_i \quad (4.1.6)$$

Por exemplo, define-se as integrais dos co-senos diretores de uma direção  $\Omega$  com a normal das superfícies  $\vec{n}_{A_i}$  num sistema de coordenadas cartesianas:

$$D_w^l = \int_{\Omega^l} \vec{i} \cdot \Omega d\Omega = \int_{\psi^-}^{\psi^+} \int_{\theta^-}^{\theta^+} \cos\psi \sin^2\theta d\theta d\psi \quad (4.1.7.a)$$

$$D_e^l = \int_{\Omega^l} -\vec{i} \cdot \Omega d\Omega = -\int_{\psi^-}^{\psi^+} \int_{\theta^-}^{\theta^+} \cos\psi \sin^2\theta d\theta d\psi \quad (4.1.7.b)$$

$$D_s^l = \int_{\Omega^l} \vec{j} \cdot \Omega d\Omega = \int_{\psi^+}^{\psi^-} \int_{\theta^-}^{\theta^+} \sin\psi \sin^2\theta d\theta d\psi \quad (4.1.7.c)$$

$$D_n^l = \int_{\Omega^l} -\vec{j} \cdot \Omega d\Omega = -\int_{\psi^+}^{\psi^-} \int_{\theta^-}^{\theta^+} \sin\psi \sin^2\theta d\theta d\psi \quad (4.1.7.d)$$

$$D_b^l = \int_{\Omega^l} \vec{k} \cdot \Omega d\Omega = \int_{\psi^-}^{\psi^+} \int_{\theta^-}^{\theta^+} \cos\theta \sin\theta d\theta d\psi \quad (4.1.7.e)$$

$$D_t^l = \int_{\Omega^l} -\vec{k} \cdot \Omega d\Omega = -\int_{\psi^-}^{\psi^+} \int_{\theta^-}^{\theta^+} \cos\theta \sin\theta d\theta d\psi \quad (4.1.7.f)$$

Os termos de extinção e de emissão do corpo negro se escrevem respectivamente como:

$$\int_{\Omega^l} \int_{\Delta V} -(\kappa_{am} + \sigma_{sm}) I_m(\mathbf{r}, \Omega) dV d\Omega = -(\kappa_{am} + \sigma_{sm}) I_m^l \Omega^l \Delta V \quad (4.1.8)$$

e

$$\int_{\Omega^l} \int_{\Delta V} \kappa_{am} I_{bm}(\mathbf{r}, T) dV d\Omega = I_{bm} \Omega^l \Delta V \quad (4.1.9)$$

O termo que contém a função de fase  $p_m(\Omega' \rightarrow \Omega)$  precisa ser integrado angularmente duas vezes. Esta última se reescreve na sua forma discretizada  $\overline{p_m^{l'l}}$ :

$$\int_{\Omega^l} \int_{\Delta V} \frac{\sigma_{sm}}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} I_m(\mathbf{r}, \Omega') p_m(\Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega' dV d\Omega = \Omega^l \Delta V \frac{\sigma_{sm}}{4\pi} \sum_{l'=1}^{N_l} I_m^l \overline{p_m^{l'l}} \Omega^{l'} \quad (4.1.10)$$

onde

$$\overline{p_m^{l'l}} = \frac{1}{\Omega^l \Omega^{l'}} \int_{\Omega'} \int_{\Omega^l} p_m(\Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega d\Omega' \quad (4.1.11)$$

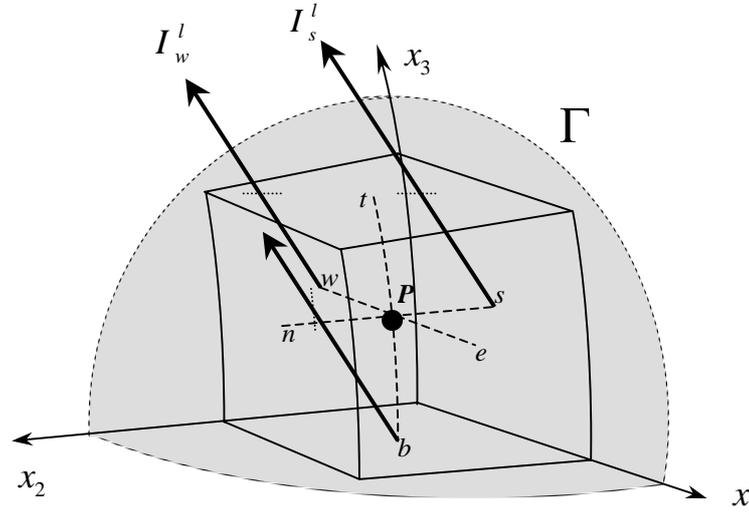
$N_l$  representa o número de direções de controle utilizado para completar a esfera de valor  $4\pi$ . A função de fase discretizada precisa, no entanto, respeitar a condição de normalização para manter o método FVM conservativo:

$$\sum_{l'=1}^{N_l} \overline{p_m^{l'l}} = 1 \quad \text{para} \quad l = 1, \dots, N_l \quad (4.1.12)$$

Para cada direção  $l$  de incidência, o valor da função de redistribuição integrado sobre  $4\pi$  precisa ser normalizado. Um método, desenvolvido por Barkstrom [145] e Altimir [146], permite a correção da função de fase com simetria azimutal. Ele consiste na solução de um sistema de  $N_l$  equações lineares em vista da determinação de  $N_l$  fatores corretivos  $\delta_l$ . O sistema é mostrado a seguir:



volume localizado no canto do sólido, mostrado na figura 4.1.3, a radiação entrando no domínio é conhecida em três das faces do volume elementar (superfícies  $w$ ,  $s$  e  $b$  na figura 4.1.3). No entanto, a aplicação da equação (4.1.16) requer o valor das intensidades em toda fronteira do volume elementar, na direção  $\Omega$ , para determinar a intensidade radiativa presente no centro deste volume.



*Figura 4.1.3: Utilização do contorno para iniciar a progressão e a determinação do campo radiativo.*

Por isso, usa-se o seguinte esquema de diferenças finitas com fator de ponderação, que relaciona o valor da intensidade no centro do volume com os valores em fronteiras opostas:

$$I_P^l = f_{x_i}^l I_{x_i^+}^l + (1 - f_{x_i}^l) I_{x_i^-}^l \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.1.17)$$

$x_i^- = \text{const.}$  é a coordenada de entrada da intensidade no volume elementar  $\Delta V$  e  $x_i^+ = \text{const.}$ , a coordenada pela qual o raio sai do volume  $\Delta V$ . Reescrevendo a equação (4.1.17) como

$$I_{x_i^+}^l = \frac{I_P^l}{f_{x_i}^l} - \frac{(1 - f_{x_i}^l)}{f_{x_i}^l} I_{x_i^-}^l \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.1.18)$$

consegue-se calcular  $I_{pm}^l$ . Transformando a equação (4.1.16) de maneira a expandir a expressão dos coeficientes  $a_i^l$ , onde  $i = e, w, n, s, t, b, P$ , e introduzindo o fator de peso  $f_{x_i}^l$  de maneira que

$$a_p^l = \sum_{e,w,s,n,t,b} \max\left(-\frac{A_i D_i^l}{f_{x_i}^l}, 0\right) + \tilde{\beta}_m^l \Delta V \Omega^l \quad , \quad (4.1.19.a)$$

$$a_i^l = \max\left(-\frac{A_i D_i^l}{f_{x_i}^l}, 0\right) \quad , \quad b_p^l = \tilde{S}_m^l \Delta V \Omega^l \quad , \quad (4.1.19.b,c)$$

$$\tilde{\beta}_m^l = \beta_m - \frac{\sigma_{sm}}{4\pi} \overline{p_m^{ll}} \Omega^l \quad e \quad \tilde{S}_m^l = \kappa_{am} I_{bm} + \frac{\sigma_{sm}}{4\pi} \sum_{l' \neq l} I_p^{l'} \overline{p_m^{l'l}} \Omega^{l'} \quad (4.1.19.d,e)$$

é possível determinar a intensidade radiativa  $I_{pm}^l$  no centro de qualquer volume do domínio e para qualquer direção escolhida  $\Omega$ . As áreas que delimitam o volume de controle se escrevem para um sistema de coordenadas cartesianas como

$$\begin{aligned} A_e &= A_w = \Delta y \Delta z \\ A_n &= A_s = \Delta z \Delta x \\ A_t &= A_b = \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

$\tilde{\beta}_m^l$  e  $\tilde{S}_m^l$  resultam do tratamento de linearização do termo fonte  $S_m^l$  necessário a robustez do algoritmo de volumes finitos [147]. Dependendo também da direção  $\Omega$  escolhida, o volume de controle para iniciar a progressão pode variar de tamanho.

O fator de peso  $f_{x_i}^l$  é tomado no intervalo  $[\frac{1}{2}, 1]$ . O esquema com  $f_{x_i}^l = 0,5$ , chamado “esquema diamante”, é de segunda ordem. Quando  $0,5 < f_{x_i}^l < 1$ , o esquema vira de primeira ordem, mas possui o inconveniente de gerar intensidades negativas ao longo do processo de resolução da ETR [119,148]. Só o esquema  $f_{x_i}^l = 1$ , chamado “esquema degrau”, não gera nenhuma intensidade negativa apesar de gerar difusão numérica. Portanto, a determinação do fator de peso foi o objeto de estudos para tentar diminuir os dois efeitos antagônicos que são a difusão numérica e as oscilações responsáveis pela geração das intensidades negativas. O “esquema diamante” e o “esquema exponencial” foram propostos por Carlson e Lathrop em 1968 [149]. O esquema exponencial se baseia sobre o princípio da atenuação por absorção radiativa no volume de controle. Logo depois, em 1969, Lathrop [150] propôs um esquema dependendo do ângulo e do tamanho do volume de controle, de princípio exclusivamente numérico, que garante a positividade das intensidades radiativas. Outros esquemas foram propostos mais tarde tal como o “esquema integral” usado por El Wakil [151]. Em 1994, o esquema exponencial de Lathrop foi modificado por Chai *et*

al. [147], dando um esquema exponencial robusto garantindo a positividade das intensidades e convergindo para a solução com um preço computacional menor.

O peso  $f$  escolhido neste trabalho para garantir a positividade das intensidades radiativas segue a proposta de Lathrop [150]:

$$f_x^l = \max \left( 1 - \frac{\Delta y \Delta z |D_w^l|}{2(\Delta z \Delta x |D_s^l| + \Delta x \Delta y |D_b^l|) + \beta_m^l \Omega^l \Delta V}, 0.5 \right) \quad (4.1.21.a)$$

$$f_y^l = \max \left( 1 - \frac{\Delta z \Delta x |D_s^l|}{2(\Delta y \Delta z |D_w^l| + \Delta x \Delta y |D_b^l|) + \beta_m^l \Omega^l \Delta V}, 0.5 \right) \quad (4.1.21.b)$$

$$f_z^l = \max \left( 1 - \frac{\Delta x \Delta y |D_b^l|}{2(\Delta y \Delta z |D_w^l| + \Delta z \Delta x |D_s^l|) + \beta_m^l \Omega^l \Delta V}, 0.5 \right) \quad (4.1.21.c)$$

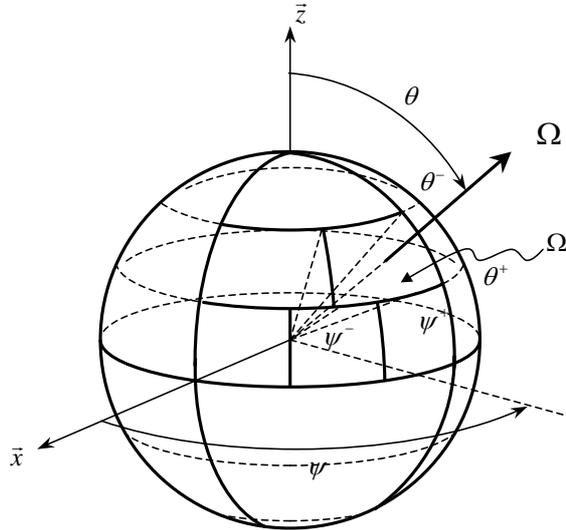
O procedimento de atualização das intensidades radiativas  $I_m^l$  deve ser repetido no domínio até convergência e para todas as frequências do espectro. Uma vez concluído esta tarefa, é preciso determinar o divergente do fluxo radiativo, somando as intensidades espectrais e direcionais. O divergente do fluxo radiativo foi dado para os problemas 1 e 2 pelas equações respectivas (3.3.14) e (3.4.9), idênticas. Transformando a integral direcional por um somatório, a formulação FVM discreta do divergente do fluxo radiativo para os problemas 1 e 2 fica:

$$\nabla \cdot q^{\text{rad}} = \sum_{m=1}^{N_f} \frac{K_{am} \tau_{0m}}{N_{plm}} \left[ 4\pi I_{bm} - \sum_{l=1}^{N_l} I_m^l \Omega^l \right] \quad (4.1.22)$$

Para otimizar o custo computacional, algumas sugestões de discretização do domínio direcional foram propostas. Estas propostas consistem em discretizar a esfera unitária com o menor número possível de direções de controle, sendo o custo computacional diretamente proporcional ao número de direções escolhido. Dois modelos são apresentados a seguir; um foi desenvolvido para meios de refração uniforme, e o outro foi desenvolvido para resolver a ETR em dois meios de refração diferente.

Em coordenadas cartesianas, uma discretização do domínio angular foi proposta por Kim e Huh [148]. O procedimento desenvolvido para problemas tridimensionais consiste em dimensionar os ângulos de controle da maneira mais homogênea possível. Seja  $N_\theta$  o número de divisões operadas no domínio polar  $\theta \in [0, \pi]$ , o número de

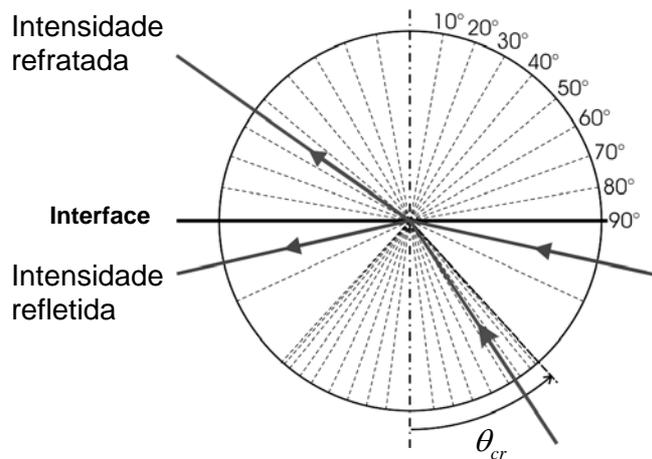
divisões no domínio azimutal  $\psi \in [0, 2\pi]$  varia com  $\theta$  segundo a seqüência: 4, 8, 12, ...,  $2N_\theta - 4$ ,  $2N_\theta$ ,  $2N_\theta - 4$ , ..., 12, 8, 4 (ver figura 4.1.4). Para cada seqüência, as divisões são repartidas de maneira uniforme. O número de direções de controle total neste modelo de discretização é equivalente a  $4(N_\theta^2 + N_\psi)$ ,  $N_\psi$  denotando o número de divisões existentes ao longo do equador da esfera.



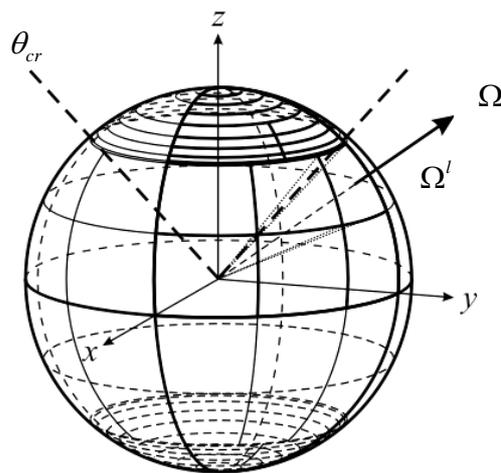
*Figura 4.1.4: Discretização do domínio angular em coordenadas cartesianas [148].*

A discretização abordada acima é a mais econômica para resolver problemas de radiação em três dimensões. Porém, esta forma não pode ser implementada quando fronteiras semitransparentes são consideradas no domínio. Efetivamente, a fronteira caracteriza a separação entre dois meios de índices de refração diferentes, sendo parte da intensidade refratada com ângulo  $\theta_2 \neq \theta_1$  e a outra parte refletida, como o mostra a figura 4.1.5. O valor da parte real do índice de refração relativo condiciona a escolha das direções de controle. Por exemplo, ao dividir em 9 direções o hemisfério relativo à intensidade refratada, 9 outros ângulos são escolhidos menores que o ângulo crítico definido na seção 3.2.3.1. As 9 direções de controle geradas, que correspondem à intensidade que vai ser refratada na interface, devem ser incluídas no esquema de discretização da esfera unitária. O resto da esfera é dividido em direções relativas a intensidade que vai ser refletida pela interface (ver figura 4.1.5).

Usando como base a discretização polar proposta na figura 4.1.5 e as propostas de discretização do domínio direcional formuladas por [148], pode-se discretizar o domínio direcional para meios de índice de refração real superior a unidade, em coordenadas cartesianas, conforme mostrado na figura 4.1.6.



*Figura 4.1.5: Fenômeno de refração e de reflexão na interface de dois meios de índice de refração diferente.*



*Figura 4.1.6: Discretização do domínio angular para um meio delimitado por fronteiras semitransparentes com mudança de índice de refração.*

Este modelo de discretização da esfera direcional é utilizado para o problema 2, que envolve fronteiras semitransparentes com mudança de índice de refração, em  $\Gamma_5$  e  $\Gamma_6$ . Para o problema 1, são utilizadas as versões propostas por Kim e Huh [148], o meio sendo delimitado por fronteiras físicas opacas.

## 4.2 Problema de Condução

A equação de condução de calor transiente é uma equação diferencial composta do divergente do fluxo de calor e de uma derivada primeira com respeito ao tempo. A discretização da equação de condução por FVM consiste na sua integração no volumes elementar  $\Delta V$  e no intervalo de tempo  $\Delta t$  :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_V C \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_V \nabla \cdot (k \nabla T(\mathbf{r}, t)) dV dt - \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta V} \nabla \cdot q^{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) dV dt \quad (4.2.1)$$

Para chegar à expressão final da equação discretizada, procede-se à integração de cada termo, um por um. O termo acumulador integrado no tempo e no volume corresponde à energia acumulada no volume elementar durante o tempo  $dt$  :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta V} C \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \left( C \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \Delta V \right) dt = C [T_p(t + \Delta t) - T_p(t)] \Delta V = C (T_p^{n+1} - T_p^n) \Delta V \quad (4.2.2)$$

A forma expandida do termo difusivo obtém-se usando a lei de conservação do divergente do fluxo:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta V} \nabla \cdot (k \nabla T(\mathbf{r}, t)) dV dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_A (k \nabla T(\mathbf{r}, t)) \cdot \bar{n} dA dt = \int_t^{t+\Delta t} \sum_{e,w,n,s,t,b} A_i (k \nabla T(\mathbf{r}, t)) dt \quad (4.2.3.a)$$

Para integrar no tempo a equação (4.2.3.a), usa-se um fator de peso  $f$  variando entre 0 a 1. Se  $f = 0$ , o esquema é dito “explícito” e se  $f = 1$ , o esquema é dito “implícito”. Quando  $f = 0,5$ , o esquema semi-implícito é chamado “Crank-Nicolson”, de segunda ordem no tempo:

$$\int_t^{t+\Delta t} \sum_{e,w,n,s,t,b} A_i (k \nabla T(\mathbf{r}, t)) dt = \sum_{e,w,n,s,t,b} A_i [k (f \nabla T(\mathbf{r}, t + \Delta t) + (1-f) \nabla T(\mathbf{r}, t))] \Delta t = \sum_{e,w,n,s,t,b} A_i k (f \nabla T_i^{n+1} + (1-f) \nabla T_i^n) \Delta t \quad (4.2.3.b)$$

Finalmente, o divergente do fluxo radiativo integrado explicitamente sobre  $dt$  e no volume elementar se escreve como:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\Delta V} \nabla \cdot q^{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) dV dt = (\nabla \cdot q^{\text{rad}})^n \Delta V \Delta t \quad (4.2.4)$$

Substituindo as equações (4.2.2-4) na equação (4.2.1), a forma integral da equação de condução se escreve:

$$\left[ \frac{(T_P^{n+1} - T_P^n) \Delta V}{\Delta t} \right] = \left[ \sum_{e,w,n,s,t,b} A_i k (f \nabla T_i^{n+1} + (1-f) \nabla T_i^n) \right] + \left[ (\nabla \cdot q^{\text{rad}})^n \Delta V \right] \quad (4.2.5)$$

Os métodos ADI, que se baseiam na aproximação das derivadas por diferenças finitas, foram desenvolvidos nos anos 60 para resolver equações parabólicas em três dimensões. Estes métodos poderosos decompõem e tratam separadamente cada direção ortogonal do espaço. Portanto, a implementação deles conduz à solução de sistemas tridiagonais, os quais são muito procurados em computação numérica por reduzir incrivelmente o tempo de cálculo e a memória a disponibilizar. Algoritmos TMDA ou CTMDA [37] resolvem vetorialmente os sistemas tridiagonais.

Embora a solução dos métodos ADI seja computacionalmente rápida, a ordem de precisão se limita à ordem segunda no espaço e no tempo. Portanto, estes métodos não são bem apropriados para a equação de condução do calor não-linear. Para combinar alta precisão e robustez, algoritmos não alternativos de quarta ordem foram desenvolvidos para a solução de problemas de condução com forte geração de calor [152,153]. No entanto, a solução dos sistemas multidiagonais gerados por esses algoritmos pode se revelar bastante lenta, e descartou a hipótese de implementá-los em problemas de condução transiente.

Voltando para os métodos ADI, Gao e Wang (1996) [154] propõem um método baseado na formulação de Peaceman e Rachford generalizado a N-dimensões. Sendo o método condicionalmente estável, foi preferida neste trabalho a utilização de métodos mais antigos, que permitem escolher o passo de tempo  $\Delta t$  sem restrições. Na família dos métodos incondicionalmente estáveis, métodos desenvolvidos respectivamente por Douglas e Rachford (1956) [155], Brian (1961) [156] e Douglas (1962) [157] conservam a ordem segunda no tempo e no espaço, a menos para a primeira versão de Douglas e Rachford, de ordem primeira no tempo. Esta última versão foi retificada por Douglas e Gunn em 1964 [158], tornando-se de ordem segunda no espaço para a equação de conservação da energia linear, e de primeira ordem para a mesma equação

na forma não-linear. O método de Douglas-Gunn [158], apresentado a seguir, resulta de uma modificação alternativa de um esquema Crank-Nicolson:

$$\text{Passo 1: } \frac{T^* - T^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \delta_x^2 (T^* + T^n) + \delta_y^2 T^n + \delta_z^2 T^n, \quad (4.2.6.a)$$

$$\text{Passo 2: } \frac{T^{**} - T^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \delta_x^2 (T^* + T^n) + \frac{1}{2} \delta_y^2 (T^{**} + T^n) + \delta_z^2 T^n, \quad (4.2.6.b)$$

$$\text{Passo 3: } \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \delta_x^2 (T^* + T^n) + \frac{1}{2} \delta_y^2 (T^{**} + T^n) + \frac{1}{2} \delta_z^2 (T^{n+1} + T^n), \quad (4.2.6.c)$$

onde  $T^*$  e  $T^{**}$  representam os valores intermediários da temperatura.  $\delta^2$  significa o operador de diferenças finitas centradas de segunda ordem:

$$\delta_x^2 T^n = \frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} \quad (4.2.7.a)$$

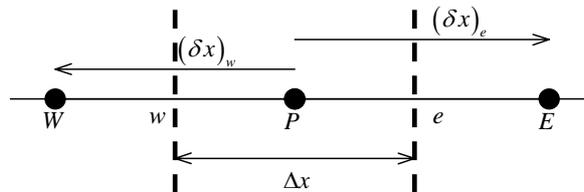
$$\delta_y^2 T^n = \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} \quad (4.2.7.b)$$

$$\delta_z^2 T^n = \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} \quad (4.2.7.c)$$

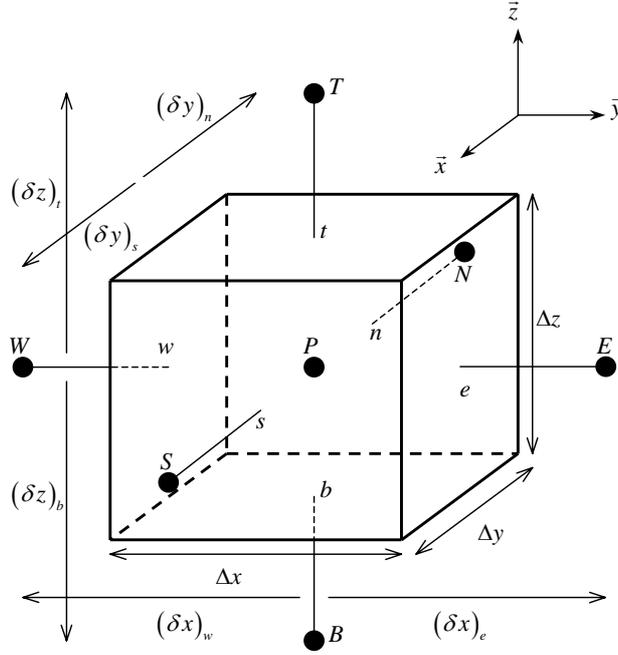
Uma modificação do método ADI de Douglas-Gunn [158] é proposta para sua adaptação no domínio discretizado pelo FVM. Imediatamente, a expressão da aproximação das derivadas é ligada ao volume de controle e seus vizinhos:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_P = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_P = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T_e - T_w}{\Delta x} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\partial T_e}{\partial x} - \frac{\partial T_w}{\partial x} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_e} - \frac{T_W - T_P}{(\delta x)_w} \right) \quad (4.2.8)$$

A nova expressão da derivada segunda envolve o centro dos volumes vizinhos, assim como as distâncias internodais  $(\delta x)_w$  e  $(\delta x)_e$  (ver figura 4.2.1). A equação (4.2.8) é válida também para as derivadas segundas nas direções  $y$  e  $z$  respectivamente (ver figura 4.2.2).



*Figura 4.2.1: Representação das distâncias internodais.*



*Figura 4.2.2: Volume de controle para o sistema de coordenadas cartesianas.*

Integrando as equações (4.2.6.a-c) no volume  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ , e substituindo a nova aproximação das derivadas segundas, equação (4.2.8), o algoritmo de Douglas-Gunn escreve-se na forma integral como:

Passo 1: 
$$\left( \frac{a_e}{2} + \frac{a_w}{2} + a_p^0 \right) T_p^* = \frac{a_e}{2} T_E^* + \frac{a_w}{2} T_W^* + S^n \quad (4.2.9.a)$$

onde 
$$S^n = \frac{a_e}{2} (T_E^n - T_P^n) + \frac{a_w}{2} (T_W^n - T_P^n) + a_n (T_N^n - T_P^n) + a_s (T_S^n - T_P^n) + a_t (T_T^n - T_P^n) + a_b (T_B^n - T_P^n) + a_p^0 T_P^n - \Delta V (\nabla \cdot q^{\text{rad } n})$$

Passo 2: 
$$\left( \frac{a_n}{2} + \frac{a_s}{2} + a_p^0 \right) T_p^{**} = \frac{a_n}{2} T_N^{**} + \frac{a_s}{2} T_S^{**} + S^* \quad (4.2.9.b)$$

onde 
$$S^* = \frac{a_e}{2} (T_E^* - T_P^* + T_E^n - T_P^n) + \frac{a_w}{2} (T_W^* - T_P^* + T_W^n - T_P^n) + \frac{a_n}{2} (T_N^n - T_P^n) + \frac{a_s}{2} (T_S^n - T_P^n) + a_t (T_T^n - T_P^n) + a_b (T_B^n - T_P^n) + a_p^0 T_P^n - \Delta V (\nabla \cdot q^{\text{rad } n})$$

Passo 3: 
$$\left( \frac{a_t}{2} + \frac{a_b}{2} + a_p^0 \right) T_p^{n+1} = \frac{a_t}{2} T_T^{n+1} + \frac{a_b}{2} T_B^{n+1} + S^{**} \quad (4.2.9.c)$$

onde 
$$S^{**} = \frac{a_e}{2} (T_E^* - T_P^* + T_E^n - T_P^n) + \frac{a_w}{2} (T_W^* - T_P^* + T_W^n - T_P^n) + \frac{a_n}{2} (T_N^{**} - T_P^{**} + T_N^n - T_P^n) + \frac{a_s}{2} (T_S^{**} - T_P^{**} + T_S^n - T_P^n) + \frac{a_t}{2} (T_T^n - T_P^n) + \frac{a_b}{2} (T_B^n - T_P^n) + a_p^0 T_P^n - \Delta V (\nabla \cdot q^{\text{rad } n})$$

Os coeficientes  $a_i$ , necessariamente positivos [37], são proporcionais ao tamanho das áreas que delimitam o volume de controle:

$$a_e = \frac{k_{xe} \Delta y \Delta z}{(\delta x)_e} \quad , \quad a_w = \frac{k_{xw} \Delta y \Delta z}{(\delta x)_w} \quad (4.2.10.a,b)$$

$$a_n = \frac{\Delta x \Delta z k_{yn}}{(\delta y)_n} \quad , \quad a_s = \frac{k_{ys} \Delta x \Delta z}{(\delta y)_s} \quad (4.2.10.c,d)$$

$$a_t = \frac{k_{zt} \Delta x \Delta y}{(\delta z)_t} \quad , \quad a_b = \frac{k_{zb} \Delta x \Delta y}{(\delta z)_b} \quad (4.2.10.e,f)$$

$$a_p^0 = \frac{C \cdot \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t / 2} = \frac{C \cdot \Delta V}{\Delta t / 2} \quad (4.2.10.g)$$

Em coordenadas cartesianas e para um meio ortotrópico homogêneo, a condutividade térmica não varia ao longo de uma direção principal, ou seja,  $k_{xe} = k_{xw} = k_x$ ,  $k_{yn} = k_{ys} = k_y$  e  $k_{zt} = k_{zb} = k_z$ . É importante notar que o termo fonte não foi linearizado seguindo a prescrição de Patankar [37] na formulação do algoritmo ADI, equações (4.2.9.a-c), devida a expressão complexa e numérica do divergente de fluxo radiativo, dado na forma discreta pela equação (4.1.22).

Uma adaptação similar do método ADI de Douglas e Rachford para FVM foi realizada por Ferreira e Yanagihara [159] para resolver um problema de condução 3D em um cilindro de seção elíptica. Neste trabalho, o sistema de coordenadas do problema computacional foi transformado com relação ao problema físico, sendo sempre necessário conservar a ortogonalidade dos eixos principais.

O problema direto e seus métodos de solução tendo sido definidos, apresentam-se a seguir as diversas técnicas de estimativa de parâmetros usadas na identificação de propriedades dos MST a altas temperaturas.

# Capítulo 5

## Métodos de Solução do Problema Inverso

Neste estudo, são considerados dois vetores de parâmetros desconhecidos, sendo cada um o objeto de uma estimativa independente. Em primeiro lugar considera-se a estimativa do vetor de parâmetros para o problema 1, que é definido como:

$$\mathbf{P}^T = [C, k_x, k_y, k_z, \text{Bi}^{rad}] \quad (5.1.1)$$

onde  $C$  é a capacidade térmica volumétrica adimensional;  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$  representam as componentes de condutividade térmica ortotrópica reduzida; e  $\text{Bi}^{rad}$  é o número de Biot, definido pela equação (3.3.9.p), envolvendo as perdas de calor por convecção e por radiação. A identificação deste vetor pretende se fazer a partir de medidas de temperatura transiente  $T^*(x^*, y^*, t^*)$  realizadas em diversos pontos da amostra de material, a qual é aquecida pontualmente. Portanto representa-se o conjunto de medidas na forma de um vetor:

$$\mathbf{Y}^T = [T_{t=0}^{m=1}, \dots, T_{t=0}^{m=M}, T_{t=dt}^{m=1}, \dots, T_{t=dt}^{m=M}, T_{t=t_f}^{m=1}, \dots, T_{t=t_f}^{m=M}] \quad (5.1.2)$$

onde  $m = 1, \dots, M$  indiciam os pontos de localização das medidas transientes.

O segundo vetor de parâmetros, relativo ao problema 2, contém o coeficiente de absorção monocromático adimensional  $\kappa_{a\lambda}$ , o coeficiente de espalhamento monocromático adimensional  $\sigma_{s\lambda}$  e o fator de assimetria da função de fase radiativa monocromática  $g_\lambda$ , para todas as bandas de comprimentos de onda que constituem o espectro infravermelho:

$$\mathbf{P}^T = [\kappa_{a\lambda_1}, \sigma_{s\lambda_1}, g_{\lambda_1}, \kappa_{a\lambda_2}, \sigma_{s\lambda_2}, g_{\lambda_2}, \dots, \dots, \kappa_{a\lambda_{N_f}}, \sigma_{s\lambda_{N_f}}, g_{\lambda_{N_f}}] \quad (5.1.3)$$

Sendo a espessura ótica e o albedo uma combinação dos coeficientes de absorção e de espalhamento, o vetor (5.1.3) pode ser substituído pelo seguinte vetor:

$$\mathbf{P}^T = [\tau_{0\lambda_1}, \omega_{\lambda_1}, g_{\lambda_1}, \tau_{0\lambda_2}, \omega_{\lambda_2}, g_{\lambda_2}, \dots, \dots, \tau_{0\lambda_{N_f}}, \omega_{\lambda_{N_f}}, g_{\lambda_{N_f}}] \quad (5.1.4)$$

Por sua vez, a estimativa do vetor (5.1.3) ou do vetor (5.1.4) pretende se realizar usando medidas de fator de emissão espectral e direcional  $\tilde{\varepsilon}(\theta, \lambda)$  no centro da face  $\Gamma_6$  amostra (ver figura 3.1.5). Uma representação explícita das medidas é dada pelo vetor:

$$\mathbf{Y}^T = \left[ \tilde{\varepsilon}_{m=1}^{\theta=0^\circ}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{m=1}^{\theta=85^\circ}, \tilde{\varepsilon}_{m=2}^{\theta=0^\circ}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{m=2}^{\theta=85^\circ}, \tilde{\varepsilon}_{m=N_f}^{\theta=0^\circ}, \dots, \tilde{\varepsilon}_{m=N_f}^{\theta=85^\circ} \right], \quad (5.1.5)$$

onde  $\theta = 0^\circ, 5^\circ, \dots, 85^\circ$  representa por exemplo medições direcionais realizadas a passo de  $5^\circ$ , iniciando-se perpendicularmente à superfície  $\Gamma_6$  do corpo de prova e terminando-se nas direções rente a esta superfície.

Voltando aos métodos de solução de problemas inversos, este capítulo apresenta os algoritmos de estimativa de parâmetros usados para a identificação dos vetores dados pelas equações (5.1.1) e (5.1.4). A noção de coeficientes de sensibilidade é depois introduzida, a fim de definir a análise estatística dos resultados, que tem por objetivo delimitar a região de confiança dos parâmetros estimados. Os coeficientes de sensibilidade também permitem otimização de experimento, conforme descrito na seção 5.6.

Vários métodos eficientes de estimativa de parâmetros são apresentados ao longo das seções 5.1 e 5.2. Primeiro, na seção 5.1, são apresentados os métodos baseados no gradiente da função objetivo, a saber: o *Método de Levenberg-Marquardt*, o *Método BFGS* e o *Método de Gauss* com função objetivo maximum a posteriori. Na seção 5.2 é considerada outra classe de métodos, chamados de métodos estocásticos, incluindo o *Método de Evolução Diferencial* e o *método Enxame de partículas*. A implementação dos métodos determinísticos costuma ser mais rápido que a dos métodos estocásticos, embora eles possam convergir para um mínimo local em vez do mínimo global. Por outro lado, os métodos estocásticos possibilitam a convergência para o mínimo global, apesar dela ser lenta e requerer a solução do problema direto em um número muito grande de vezes. Uma alternativa consiste em se usar os chamados *métodos Híbridos*, que aproveitam as vantagens de cada classe de métodos; os *métodos híbridos* são capazes de selecionar um algoritmo ou outro, dando um compromisso entre robustez e velocidade de convergência. Tais métodos são apresentados em seção 5.3.

## 5.1 Métodos de Gradiente

### 5.1.1 Método de Levenberg-Marquardt

Antes de estabelecer um procedimento de solução de problema inverso, é preciso definir uma função objetivo a ser minimizada. Utilizando-se as hipóteses de que os erros experimentais são aditivos e não-correlacionados, com distribuição normal, média zero e desvio-padrão constante e conhecido, e que não há informação a priori sobre os parâmetros, a função objetivo que resulta em estimativas com variância mínima é a norma dos mínimos-quadrados [64,70] que pode ser escrita como:

$$S_{MQ}(\mathbf{P}^k) = [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^k)]^T [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^k)] \quad (5.1.6.a)$$

onde  $S_{MQ}$  é a norma dos mínimos-quadrados,

$\mathbf{P}$  o vetor de parâmetros desconhecidos,

$\mathbf{X}(\mathbf{P}^k)$  o vetor de variáveis estimadas (temperatura ou fator de emissão) e

$\mathbf{Y}$  o vetor de variáveis medidas (temperatura dimensional ou fator de emissão).

O índice T caracteriza a transposição da matriz ou do vetor. O vetor contendo as diferenças entre as variáveis medidas e estimadas pode ser escrito na forma:

$$[\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P})]^T = [\bar{Y}_1 - \bar{X}_1(\mathbf{P}), \bar{Y}_2 - \bar{X}_2(\mathbf{P}), \dots, \bar{Y}_I - \bar{X}_I(\mathbf{P})] \quad (5.1.6.b)$$

onde  $I$  é o número de medidas no tempo. Cada elemento  $[\bar{Y}_i - \bar{X}_i(\mathbf{P})]$  é um vetor linha de dimensão igual ao número de sensores  $M$ , isto é,

$$[\bar{Y}_i - \bar{X}_i(\mathbf{P})] = [Y_{i1} - X_{i1}(\mathbf{P}), Y_{i2} - X_{i2}(\mathbf{P}), \dots, Y_{iM} - X_{iM}(\mathbf{P})] \quad (5.1.6.c)$$

para  $i = 1, 2, \dots, I$

Para minimizar a norma dos mínimos-quadrados, equação (5.1.6), é necessário igualar a zero as derivadas de  $S_{MQ}(\mathbf{P})$  com respeito a cada um dos parâmetros desconhecidos  $P_j$ , ou seja,

$$\frac{\partial S_{MQ}(\mathbf{P})}{\partial P_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.1.7.a)$$

que na forma matricial, pode-se escrever

$$\frac{\partial S_{MQ}(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} = 2 \left[ -\frac{\partial \mathbf{X}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \right] [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P})] = 0, \quad (5.1.7.b)$$

onde

$$\frac{\partial \mathbf{X}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial P_1} \\ \frac{\partial}{\partial P_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial P_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{X}_1 & \vec{X}_2 & \vec{X}_3 & \cdots & \vec{X}_I \end{bmatrix}, \quad (5.1.8.a)$$

$$\text{onde } \vec{X}_i = [\vec{X}_{i1}, \vec{X}_{i2}, \dots, \vec{X}_{iM}] \quad (5.1.8.b)$$

A chamada “matriz de sensibilidade” ou matriz “Jacobiana” é definida como

$$\mathbf{J}(\mathbf{P}^k) = \left[ \frac{\partial \mathbf{X}^T(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{X}_1^T}{\partial P_1} & \frac{\partial \vec{X}_1^T}{\partial P_2} & \cdots & \frac{\partial \vec{X}_1^T}{\partial P_N} \\ \frac{\partial \vec{X}_2^T}{\partial P_1} & \frac{\partial \vec{X}_2^T}{\partial P_2} & \cdots & \frac{\partial \vec{X}_2^T}{\partial P_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \vec{X}_I^T}{\partial P_1} & \frac{\partial \vec{X}_I^T}{\partial P_2} & \cdots & \frac{\partial \vec{X}_I^T}{\partial P_N} \end{bmatrix}, \quad (5.1.9.a)$$

$$\text{onde } \frac{\partial \vec{X}_i^T}{\partial P_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{i1}}{\partial P_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial X_{iM}}{\partial P_j} \end{bmatrix} \quad \text{para } i=1, 2, \dots, I \quad \text{e } j=1, 2, \dots, N. \quad (5.1.9.b)$$

Os elementos da matriz de sensibilidade são chamados de “coeficientes de sensibilidade” e são definidos como a primeira derivada da variável estimada com respeito ao parâmetro  $P_j$ , isto é,

$$J_{sj} = \frac{\partial X_s}{\partial P_j} \quad \text{para } j=1, 2, \dots, N \quad (5.1.10)$$

onde o índice  $s$  se refere à linha da matriz de sensibilidade e está relacionado ao número de sensores  $M$  e ao número de medidas  $I$  no tempo como

$$s = (i-1)M + m \quad \text{para } m=1, 2, \dots, M \quad \text{e } i=1, 2, \dots, I \quad (5.1.11)$$

Logo,  $1 \leq s \leq MI$ .

Usando a definição da matriz de sensibilidade dada pela equação (5.1.9), a equação (5.1.7.b) torna-se

$$-2\mathbf{J}^T(\mathbf{P})[\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P})] = 0 \quad (5.1.12)$$

Para problemas inversos *lineares*, a matriz de sensibilidade não é uma função dos parâmetros desconhecidos. Neste caso, a equação (5.1.12) pode ser resolvida de forma explícita e o vetor de parâmetros é então dado por [70]:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{Y} \quad (5.1.13)$$

No caso de um problema inverso *não-linear*, a matriz de sensibilidade tem alguma dependência funcional com o vetor de parâmetros desconhecidos  $\mathbf{P}$ . A solução da equação (5.1.12) para estimativa de problemas então requer um procedimento iterativo, o qual pode ser obtido pela linearização da estimativa da medida  $\mathbf{X}(\mathbf{P})$  com uma expansão em série de Taylor, em torno da solução atual  $\mathbf{P}^k$ , para a iteração  $k$ . Tal linearização é dada por

$$\mathbf{X}(\mathbf{P}) = \mathbf{X}(\mathbf{P}^k) + \mathbf{J}(\mathbf{P} - \mathbf{P}^k) \quad (5.1.14)$$

A equação (5.1.14) é substituída na equação (5.1.12) e o resultado da expressão é rearranjado do modo a formar um procedimento iterativo para obter o vetor de parâmetros  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^k)] \quad (5.1.15)$$

O procedimento iterativo, dado pela equação (5.1.15), é chamado de *Método de Gauss*. Tal método é na realidade uma aproximação do *Método de Newton-Raphson* [64].

Nota-se na equação (5.1.13), assim como para a implementação do procedimento iterativo dado pela equação (5.1.15), que a matriz  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  deve ser não singular, ou seja,

$$|\mathbf{J}^T \mathbf{J}| \neq 0 \quad (5.1.16)$$

onde  $|\cdot|$  é o determinante.

A equação (5.1.16) dá a condição de identificação dos parâmetros, isto é, se o determinante de  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  é zero, ou muito pequeno, os parâmetros  $\mathbf{P}_j$ , para  $j=1, \dots, N$ , não podem ser determinados usando-se o procedimento iterativo da equação (5.1.15). Problemas que satisfazem  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}| \approx 0$  são chamados de *mal-condicionados*. Problemas inversos em transmissão de calor são geralmente mal-condicionados, especialmente próximo da estimativa inicial usada para os parâmetros desconhecidos, criando dificuldades na aplicação das equações (5.1.13) ou (5.1.15). Porém, existem métodos que reduzem as dificuldades provenientes da ocorrência de valores baixos para  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}|$ , como o método de Levenberg-Marquardt.

O Método de Levenberg-Marquardt é uma técnica iterativa para resolver problemas não-lineares de estimativa de parâmetros. O método foi derivado primeiramente por

Levenberg em 1944 [62], modificando a norma dos mínimos-quadrados. Mais tarde, em 1963, Marquardt [63] derivou basicamente o mesmo método usando uma formulação diferente. A intenção de Marquardt foi a de obter um método que tendesse ao método de Gauss na vizinhança do mínimo da norma dos mínimos-quadrados e tendesse ao método de *steepest-descent* na vizinhança da estimativa inicial. O procedimento iterativo deste método é dado por:

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + (\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \mu^k \mathbf{\Omega}^k)^{-1} \mathbf{J}^T [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^k)] \quad (5.1.17)$$

ou

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + \Delta \mathbf{P}^k \\ \Delta \mathbf{P}^k = [(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k + \mu^k \mathbf{\Omega}^k]^{-1} (\mathbf{J}^k)^T [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^k)] \end{cases} \quad (5.1.18)$$

onde  $\mu^k$  é um escalar positivo chamado de parâmetro de relaxação, e  $\mathbf{\Omega}^k$  é uma matriz diagonal.

O termo matricial,  $\mu^k \mathbf{\Omega}^k$ , introduzido nas equações (5.1.17-18), tem por objetivo diminuir as oscilações e instabilidades que acontecem em problemas mal-condicionados. Tal termo é grande no início do processo iterativo já que o problema é, de um modo geral, mal condicionado na região ao redor da estimativa inicial usada para o procedimento iterativo. Com esta modificação, a matriz  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  não precisa ser necessariamente inversível e o método tende para o *Método de Steepest Descent*. O parâmetro  $\mu^k$  é então gradualmente reduzido com o avanço das iterações para a solução do problema inverso e então o método de Levenberg-Marquardt tende para o método de *Gauss* dado pela equação (5.1.15).

Os seguintes critérios, propostos por Dennis e Schnabel [160] são usados como critérios de parada do procedimento iterativo de Levenberg-Marquardt:

$$(i) \quad S_{MQ}(\mathbf{P}^{k+1}) < \varepsilon_1 \quad (5.1.19.a)$$

$$(ii) \quad \left\| (\mathbf{J}^k)^T [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^k)] \right\| < \varepsilon_2 \quad (5.1.19.b)$$

$$(iii) \quad \left\| \mathbf{P}^{k+1} - \mathbf{P}^k \right\| < \varepsilon_3 \quad (5.1.19.c)$$

onde  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  são tolerâncias prescritas pelo usuário e  $\| \cdot \|$  é a norma euclidiana do vetor, isto é,  $\| \mathbf{x} \| = \sqrt{(\mathbf{x}^T \mathbf{x})}$ , onde o sobre-escrito T representa a matriz transposta.

O critério dado pela equação (5.1.19.a) testa se a norma dos mínimos-quadrados é suficientemente pequena, o que é esperado na vizinhança da solução do problema. De modo semelhante, a equação (5.1.19.b) testa se a norma do gradiente de  $S_{MQ}(\mathbf{P})$  é

suficientemente pequena, já que esta se anula no ponto onde  $S_{MQ}(\mathbf{P})$  é mínimo. Embora a condição de gradiente nulo seja também válida para pontos de máximo e pontos de sela, o método de Levenberg-Marquardt dificilmente converge para estes pontos. O último critério dado pela equação (5.1.19.c) resulta do fato de que a mudança no vetor de parâmetros é muito pequena quando o método está convergido.

Diferentes versões do método de Levenberg-Marquardt podem ser encontradas na literatura, dependendo da escolha da matriz diagonal  $\mathbf{\Omega}^k$  e da forma da escolha do parâmetro de relaxação  $\mu^k$ . Dentro delas, a versão dada por [68] no livro “Numerical Recipes” através da sub-rotina MRQMIN define a matriz  $\mathbf{\Omega}^k$  como

$$\mathbf{\Omega}^k = \text{diag}[(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k] \quad (5.1.20)$$

Em função da convergência do método, o parâmetro de relaxação  $\mu^k$  é multiplicado ou dividido por dez:

$$\text{Se } S_{MQ}(\mathbf{P}^{k+1}) \geq S_{MQ}(\mathbf{P}^k) \quad \Rightarrow \quad \mu^{k+1} = 10\mu^k \text{ e } \mathbf{P}^{k+1} \text{ não é aceito} \quad (5.1.21.a)$$

$$\text{Se } S_{MQ}(\mathbf{P}^{k+1}) < S_{MQ}(\mathbf{P}^k) \quad \Rightarrow \quad \mu^{k+1} = 0.1\mu^k \text{ e } \mathbf{P}^{k+1} \text{ é aceito} \quad (5.1.21.b)$$

Para obter mais detalhes sobre a implementação deste método, o leitor pode consultar [68,69].

Outra versão do método de Levenberg-Marquardt é dada por Moré [161], onde a matriz  $\mathbf{\Omega}^k$  é dada pela matriz identidade e o parâmetro de relaxação  $\mu^k$  é escolhido baseado no algoritmo chamado de região de confiança [160]. As sub-rotinas BCLSF, BCLSJ, UNLSF e UNLSJ da biblioteca IMSL [162] são baseadas nesta versão do método de Levenberg-Marquardt.

### 5.1.2 Método BFGS

O Método BFGS (ou método Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) se baseia no Método de Quasi-Newton, porém é mais robusto [65-67]. Aplicado a problemas não-lineares, ele converge para um mínimo local via o processo iterativo seguinte:

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k \quad (5.1.22)$$

onde  $\alpha^k$  é o passo de procura e  $\mathbf{d}^k$  a direção de procura. Para convergir, isto é, para verificar a condição  $S_{MQ}(\mathbf{P}^{k+1}) < S_{MQ}(\mathbf{P}^k)$ ,  $\mathbf{d}^k$  deve ser escrita de tal maneira que

$$\mathbf{d}^k = -\mathbf{R}\nabla S_{MQ}(\mathbf{P}^k) = \mathbf{R}(\mathbf{J}^k)^T [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^k)] \quad (5.1.23)$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz positiva definida [64].

No método de Newton-Raphson, a matriz  $\mathbf{R}$  é definida como sendo o inverso da matriz Hessiana, que corresponde à derivada de segunda ordem da função objetivo com relação aos parâmetros. No método de Quasi-Newton, a matriz Hessiana é aproximada de maneira a reduzir o custo computacional. Por isso, é introduzida no método BFGS uma matriz  $\mathbf{H}$  simétrica e positiva definida tal que:

$$\mathbf{H}^k \cong [\mathbf{D}^2 S_{MQ}(\mathbf{P})]^{-1} \quad (5.1.24)$$

onde  $\mathbf{D}^2$  é o operador derivada de segunda ordem e  $S_{MQ}(\mathbf{P})$  a norma dos mínimos-quadrados. A matriz  $\mathbf{H}$  é conseguida numericamente através do procedimento seguinte [65-67]:

$$\mathbf{H}^0 = \mathbf{I} \quad \text{para } k = 0 \quad (5.1.25.a)$$

$$\mathbf{H}^k = \mathbf{H}^{k-1} + \mathbf{M}^{k-1} + \mathbf{N}^{k-1} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \quad (5.1.25.b)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Observa-se que, na primeira iteração, o método funciona como o método *Steepest Descent*, o que tende a aumentar a velocidade de convergência longe do mínimo global. As matrizes  $\mathbf{M}^{k-1}$  e  $\mathbf{N}^{k-1}$  são depois calculadas na seqüência [65-67]:

$$\mathbf{M}^{k-1} = \left( \frac{1 + (\mathbf{G}^{k-1})^T \mathbf{H}^{k-1} \mathbf{G}^{k-1}}{(\mathbf{G}^{k-1})^T \Delta \mathbf{P}^{k-1}} \right) \frac{\Delta \mathbf{P}^{k-1} (\Delta \mathbf{P}^{k-1})^T}{(\Delta \mathbf{P}^{k-1})^T \mathbf{G}^{k-1}} \quad (5.1.26.a)$$

$$\mathbf{N}^{k-1} = - \frac{\Delta \mathbf{P}^{k-1} (\mathbf{G}^{k-1})^T \mathbf{H}^{k-1} + \mathbf{H}^{k-1} \mathbf{G}^{k-1} (\Delta \mathbf{P}^{k-1})^T}{(\mathbf{G}^{k-1})^T \Delta \mathbf{P}^{k-1}} \quad (5.1.26.b)$$

$$\text{onde } \mathbf{G}^{k-1} = (\mathbf{J}^k)^T [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^k)] - (\mathbf{J}^{k-1})^T [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^{k-1})] \quad (5.1.26.c)$$

O passo de procura é escolhido de maneira a minimizar a função:

$$f(\alpha^k) = S_{MQ}(\mathbf{P}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k) \quad (5.1.27)$$

Substituindo as equações (5.1.23-26) dentro da equação (5.1.22), o procedimento iterativo do método BFGS é dado por:

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + \alpha^k \mathbf{H}^k (\mathbf{J}^k)^T [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^k)] \quad (5.1.28)$$

O método BFGS, bem como o método de Levenberg-Marquardt, são métodos determinísticos muito eficientes, adaptando a sua tática de procura a medida que o funcional se aproxima do mínimo global. Por isso, são métodos robustos e de convergência rápida.

### 5.1.3 Método de Gauss com função objetivo MAP

Como foi visto anteriormente, o método de Gauss tradicional usando a função objetivo *mínimos quadrados*, dado pela equação (5.1.15), pode não convergir em razão do caráter mal condicionado da matriz  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ . Um termo de suavização  $\mu^k \mathbf{\Omega}^k$ , variando de acordo com o processo de convergência, foi por esta razão introduzido na equação (5.1.15), através do método de Levenberg-Marquardt. Nesta seção é mostrado como melhorar a convergência do método de Gauss usando a função objetivo *máximo a posteriori*.

Ao contrário das funções de minimização mínimos-quadrados e máxima de verossimilhança, a função objetivo *máximo a posteriori* tem fundamentos da teoria de Bayes [70,163]:

$$\underbrace{\pi(\mathbf{P} | \mathbf{Y})}_{\text{função de probabilidade posterior}} = \frac{\overbrace{\pi(\mathbf{Y} | \mathbf{P})}^{\text{função de verossimilhança}} \cdot \overbrace{\pi(\mathbf{X})}^{\text{função de probabilidade a priori}}}{\underbrace{\pi(\mathbf{Y})}_{\text{constante}}} \quad (5.1.29)$$

Esta função, relacionada à *função de distribuição de probabilidade posterior*, leve em conta informações *a priori* sobre os parâmetros desconhecidos, além de informações relativas a distribuição probabilística das medidas, caracterizadas através da função de distribuição de *verossimilhança*, de comportamento gaussiano.

A função objetivo *máximo a posteriori*, que precisa ser minimizada para a estimativa do vetor de parâmetros  $\mathbf{P}$ , é definida como sendo [70]:

$$S_{MAP}(\mathbf{P}) = [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P})]^T \mathbf{W} [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P})] + (\mathbf{\Psi} - \mathbf{P})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{\Psi} - \mathbf{P}) \quad (5.1.30)$$

onde  $\mathbf{W}$  é a matriz peso das medidas. A expressão do vetor contendo as diferenças entre as variáveis medidas e estimadas  $[\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P})]^T$  é dada pela equação (5.1.6.b). O termo  $(\mathbf{\Psi} - \mathbf{P})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{\Psi} - \mathbf{P})$  funciona como um termo de regularização para a função objetivo *máximo de verossimilhança*. Nota-se que uma estimativa de parâmetros que resulta da minimização da função *máximo a posteriori*, implique obrigatoriamente de maximizar a função de distribuição de probabilidade posterior [163]:

$$\hat{\mathbf{P}} = \arg \max (\pi(\mathbf{P} | \mathbf{Y})) \quad (5.1.31)$$

Para que o uso da função objetivo *máximo a posteriori* resulte em parâmetros estimados com variância mínima, são necessárias as seguintes hipóteses estatísticas: os

erros nas medidas são aditivos, com média zero, e distribuição normal; os parâmetros estatísticos que descrevem os erros são conhecidos; as variáveis independentes não apresentam erro, o vetor  $\mathbf{P}$  é randômico, com média  $\Psi$  e matriz de covariância  $\mathbf{V}$  conhecidas;  $\mathbf{P}$  possui uma distribuição normal;  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{V}$  são independentes.

É importante notar que nas hipóteses relacionadas acima, não foi feita nenhuma consideração quanto aos erros serem correlacionados ou não, ou quanto à matriz de covariância das medidas ser constante. A minimização da função  $S_{MAP}(\mathbf{P})$  dada pela equação (5.1.30) requer que o gradiente de  $S_{MAP}(\mathbf{P})$  seja nulo. Assim,

$$\nabla S_{MAP}(\mathbf{P}) = -2\mathbf{J}^T \mathbf{W} [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P})] - 2\mathbf{V}^{-1} (\Psi - \mathbf{P}) = 0 \quad (5.1.32)$$

Para casos não-lineares, um processo iterativo para a estimativa do vetor de parâmetros  $\mathbf{P}$  é obtido através da linearização do vetor de temperaturas estimadas  $\mathbf{X}(\mathbf{P})$  com uma expansão em série de Taylor, em torno da função atual  $\mathbf{P}^k$ , equação (5.1.14), na iteração  $k$ . Substituindo-se a equação (5.1.14) na equação (5.1.32) e rearranjando-se a expressão resultante obtém-se o seguinte procedimento iterativo para a estimativa do vetor de parâmetros  $\mathbf{P}$ .

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + [\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} + \mathbf{V}^{-1}]^{-1} \{ \mathbf{J}^T \mathbf{W} [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^k)] + \mathbf{V}^{-1} (\Psi - \mathbf{P}^k) \} \quad (5.1.33)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz de sensibilidade definida na equação (5.1.9). Assumindo que os erros das medidas são não-correlacionados, a matriz  $\mathbf{W}$  é dada por [70]:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{W}_I \end{bmatrix}, \quad (5.1.34.a)$$

$$\text{onde } \mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{W}_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{W}_{iM} \end{bmatrix}, \text{ e } W_{im} = \frac{1}{\sigma_{im}^2} \quad \begin{array}{l} \text{para } i = 1, 2, \dots, I \\ \text{e } m = 1, 2, \dots, M. \end{array} \quad (5.1.34.b)$$

A matriz de covariância dos parâmetros invertida,  $\mathbf{V}^{-1}$ , ajuda a melhorar o condicionamento da matriz  $[\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} + \mathbf{V}^{-1}]^{-1}$ , trazendo estabilidade ao método de Gauss.

Para reduzir o custo computacional, os elementos do triplo produto matricial  $\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}$  podem ser calculados como mostrado a seguir:

$$\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} = \left[ \sum_{s=1}^{MI} J_{sj}^k J_{sk}^k \sigma^{-2}(s) \right] \quad \text{para } j, k = 1, 2, \dots, N \quad (5.1.35.a)$$

onde  $M$  corresponde ao número de sensores utilizados e  $I$  ao número de medidas por sensor.  $N$  representa o número de parâmetros a estimar. De modo semelhante, os elementos de  $\mathbf{J}^T \mathbf{W} [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P})]$  podem ser calculados como segue:

$$\mathbf{J}^T \mathbf{W} [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^k)] = \left[ \sum_{s=1}^{MI} J_{sj}^k (Y(s) - X(s)) \sigma^{-2}(s) \right] \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N \quad (5.1.35.b)$$

Enfim, o cálculo de  $[\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} + \mathbf{V}^{-1}]^{-1}$  supõe a inversão de uma matriz  $(N \times N)$ .

Nota-se que a atualização do vetor de parâmetro  $\mathbf{P}$  através da adição de novas medidas resulta no procedimento de estimativa chamado “Estimativa seqüencial”. Este método, desenvolvido por Beck [71], é apropriado para a estimativa de parâmetros usando informações de dois ou mais experimentos de configurações diferentes como, por exemplo: medidas de temperatura feitas no mesmo aparato experimental, mas em posições ou tempos diferentes; ou aparatos experimentais totalmente diferentes, mas envolvendo a estimativa dos mesmos parâmetros.

## 5.2 Métodos Estocásticos

Ao contrário dos métodos de gradiente, os métodos estocásticos não precisam avaliar o gradiente da função objetivo para convergir até o mínimo global. Esta operação é realizada de outro modo: a evolução e o direcionamento de uma população randômica de vetor de parâmetros através de um processo genético. Os métodos estocásticos procuram incluir fenômenos do tipo seleção, cruzamento e mutação, a fim de direcionar uma determinada população (vetores de parâmetros) a buscar o meio ambiente adequado (mínima da função objetivo). Os métodos apresentados nesta seção se baseiam sobre princípio dos Algoritmos Genéticos: são eles, *Método de Evolução Diferencial* e *Método Enxame de Partículas*. Extremamente robustos, os métodos estocásticos sempre alcançam o mínimo global.

### 5.2.1 Método de Evolução Diferencial

O Método de Evolução Diferencial é um método evolutivo baseado sobre a teoria de Darwin de evolução das espécies. Ele foi criado por dois pesquisadores do Berkeley (Kenneth Price e Rainer Storn [73]), em 1995, como alternativa ao algoritmo genético. Segundo a teoria de evolução das espécies, os mais resistentes dos indivíduos de uma população são os mais capazes de sobreviver dentro de um certo ambiente. A escala microscópica, durante o processo de divisão celular, os cromossomos de dois indivíduos se combinam seguindo o processo chamado cruzamento. Neste momento, mutações podem ocorrer, o que pode ser bom (indivíduo relacionado a um funcional mínimo) ou ruim (indivíduo relacionado a um funcional grande). As mutações são a chave para evitar a convergência em um mínimo local. Porém, o uso excessivo delas pode levar à não convergência do método.

O método se inicia escolhendo, de maneira randômica, uma população em um espaço delimitado pelo domínio de definição dos parâmetros. Com as sucessivas combinações de cromossomos, as mutações se realizam gerando novas gerações de indivíduos até o valor mínimo do funcional ser atingido. O procedimento iterativo do Método de Evolução Diferencial é dado por [73,81]:

$$\mathbf{P}_i^{k+1} = \delta_1 \mathbf{P}_i^k + \delta_2 [\boldsymbol{\alpha} + f(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma})] \quad (5.2.1)$$

onde  $\mathbf{P}_i$  é o número  $i$  vetor de parâmetros gerado,

$\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  e  $\boldsymbol{\gamma}$  são três indivíduos da matriz população  $\mathbf{\Pi}$ , escolhida aleatoriamente,

$f$  é uma função peso que define a mutação ( $0.5 < f < 1.0$ ),

$k$  é o número de gerações e

$\delta_1$  e  $\delta_2$  são funções Dirac que definem a mutação.

Durante o processo de minimização da função objetivo, se  $S_{MQ}(\mathbf{P}^{k+1}) < S_{MQ}(\mathbf{P}^k)$ , o vetor  $\mathbf{P}^{k+1}$  substitui o vetor  $\mathbf{P}^k$  dentro da matriz  $\mathbf{\Pi}$ . No caso contrário, o vetor  $\mathbf{P}^k$  é guardado. O procedimento de cruzamento é definido como:

$$\delta_1 = \begin{cases} 0, & \text{se } R < CR \\ 1, & \text{se } R > CR \end{cases}, \quad \delta_2 = \begin{cases} 0, & \text{se } R > CR \\ 1, & \text{se } R < CR \end{cases} \quad (5.2.2.a,b)$$

onde  $CR$  é um fator que define a proporção do cruzamento e  $R$  é um número randômico com distribuição uniforme entre 0 e 1. Neste trabalho, foi escolhido como função peso  $f = 0.9$  e como proporção de cruzamento  $CR = 0.8$ . Os geradores de

números randômicos com distribuição uniforme utilizados neste trabalho foram obtidos das referências [164-168].

## 5.2.2 Método Enxame de Partículas

Outra alternativa se encontra através do Método “Enxame de Partículas” que foi criado em 1995 pelo engenheiro elétrico Russel Eberhart e pelo psicólogo James Kennedy [74-76]. O método se baseia no comportamento social de uma espécie e tende a equilibrar as noções de individualismo e de sociabilidade em cada indivíduo, sendo o objetivo localizar o mínimo global. A idéia original de Eberhart e Kennedy nasceu da observação dos pássaros a escolha do local de construção do ninho: quanto maior estiver o aspecto individual do pássaro, maior estará o seu empenho na busca do melhor lugar para construir o seu ninho. No entanto, se o nível de individualismo do pássaro estiver alto demais, a busca nunca chegará à conclusão. Por outro lado, quanto maior estiver o aspecto social do pássaro, mais ele aprende dos outros pássaros. Todavia, se o nível de sociabilidade dos pássaros estiver alto, eles tendem a se agrupar em um lugar que não corresponde necessariamente ao mínimo global. O procedimento iterativo do método Enxame de Partículas é dado por [74,77,81]:

$$\mathbf{P}_i^{k+1} = \mathbf{P}_i^k + \Delta_i^{k+1} \quad (5.2.3.a)$$

$$\Delta_i^{k+1} = \alpha \Delta_i^k + \beta r_{1i} (\mathbf{P}_b - \mathbf{P}_i^k) + \beta r_{2i} (\mathbf{P}_g - \mathbf{P}_i^k) \quad (5.2.3.b)$$

onde  $\mathbf{P}_i$  é o vetor de parâmetro individual número  $i$ ,

$\Delta_i$  é o vetor velocidade relativo a  $\mathbf{P}_i$  ( $\Delta_i = 0$  para  $k = 0$ ),

$r_{1i}$  e  $r_{2i}$  são números randômicos com distribuição uniforme entre 0 e 1,

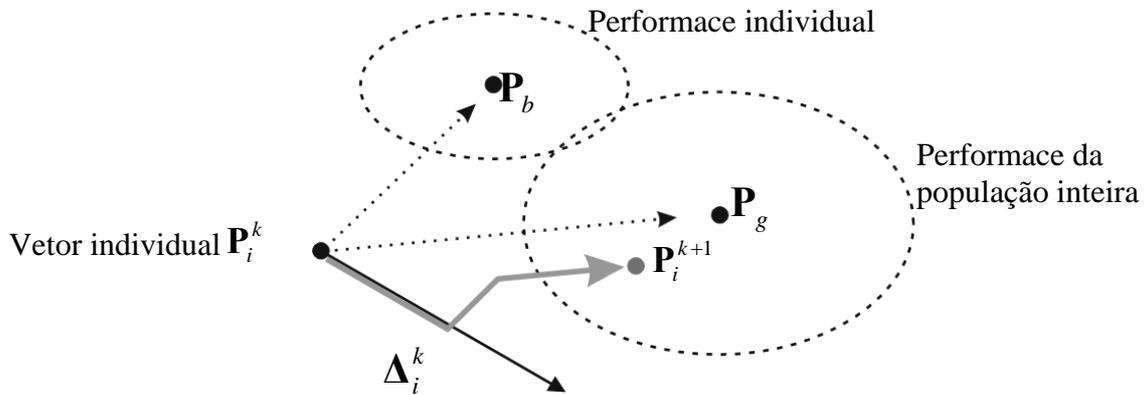
$\mathbf{P}_b$  é o melhor vetor de parâmetros dentro dos vetores individuais,

$\mathbf{P}_g$  é o melhor vetor de parâmetros dentro da população inteira  $\mathbf{\Pi}$ ,

$0 < \alpha < 1$  ;  $1 < \beta < 2$  .

Na equação (5.2.3.b), o segundo termo do lado direito da equação representa a individualidade do pássaro e o terceiro termo a sociabilidade. O primeiro termo representa a inércia da partícula: esta deve ser diminuída ( $\alpha \rightarrow 0$ ) a medida que o número de iterações aumenta. No termo de individualidade, o vetor  $\mathbf{P}_b$  representa a melhor combinação de parâmetros já encontrados no processo iterativo para o vetor  $i$ . Por isso, ele envolve a diferença entre o atual vetor número  $i$  e o melhor vetor

encontrado no passado. Já o termo social contém o vetor  $\mathbf{P}_g$  que possui as melhores características de toda população. Por isso, o termo social compara o vetor atual  $\mathbf{P}^k$  com o melhor vetor de toda população  $\mathbf{\Pi}$  (e não só o vetor individual) encontrado no passado. O compromisso entre o aspecto individual e social no método de minimização é mostrado na seguinte figura:



*Figura 5.2.1: Princípio do método Enxame de Partículas.*

Os mesmos geradores de números randômicos usados para o método de evolução diferencial foram usados para o método Enxame de Partículas.

## 5.3 Combinação de Métodos

### 5.3.1 Métodos híbridos

Os chamados Métodos híbridos, criados a partir de uma combinação de métodos determinísticos e de métodos estocásticos, reúnem as vantagens de cada um. Particularmente, eles usam o método estocástico evolutivo para localizar a região do mínimo global e mudam para um método determinístico, a fim de convergir para o mínimo com rapidez. Sendo assim, diversas versões diferentes deste método podem ser desenvolvidas. Apresenta-se na figura 5.3.1 a versão utilizada aqui [78-81]:



*Figura 5.3.1: Princípio do método híbrido utilizado neste trabalho.*

O principal módulo é o método Enxame de Partículas que realiza a parte de otimização preliminar: quando algum percentual de partículas acha um mínimo, o algoritmo muda para o Método de Evolução Diferencial, onde as partículas se reproduzem. Se acontecer uma redução do funcional, o algoritmo volta a utilizar o método Enxame de Partículas, a fim de procurar outro mínimo de valor inferior. Se não tiver diminuição do funcional, isto significa que o mínimo global pode se encontrar na região investigada. Por consequência o algoritmo muda para o método BFGS e localiza diretamente o mínimo da região. Finalmente, o algoritmo volta sempre a utilizar o método Enxame de Partículas a fim de verificar se não há outra região com menor valor do funcional. Em torno de 500 partículas ou vetores de parâmetros são gerados a cada iteração dos métodos Enxame de Partículas e Evolução Diferencial, sendo que o método híbrido é suposto convergir para o mínimo global da função objetivo relativa ao problema 1 em menos de 50 iterações. Algumas aplicações dos métodos híbridos se encontram nas referências [78-81].

### 5.3.2 Gradiente de baixa resolução

Em situações que se deve usar um método estocástico, deve-se formular um problema direto reduzido. Efetivamente, a necessidade de localizar a região do mínimo global com segurança implica necessariamente a solução de milhares de vezes do problema direto, o qual constitui um gasto computacional muito grande. Supomos, por exemplo, que o problema direto precise de 30 minutos para ser resolvido e que o algoritmo genético utilizado convirja com 10000 tentativas para o mínimo global; o tempo levado para resolver o problema inverso seria de 6 meses e 25 dias! Neste caso, ou torna-se impossível usar o problema direto completo ou torna-se impossível usar o algoritmo genético. O compromisso se situa na formulação de um problema direto reduzido.

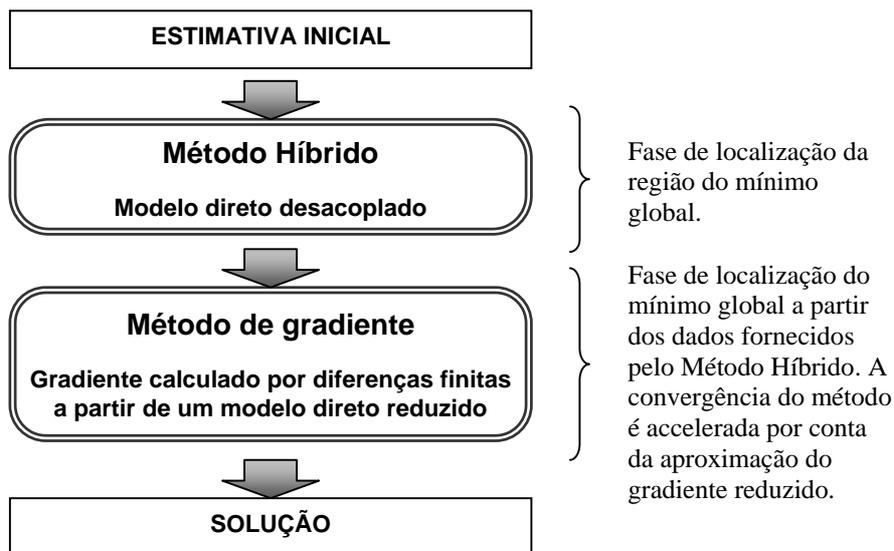
Os modos de reduzir um problema direto são diversos: pode-se reduzir o refinamento da malha, mas também se pode aproximar uma condição de contorno ou um termo fonte, desde que a aproximação não tenha uma influência significativa na solução. A tática de uso de um modelo direto reduzido pode também depender do problema inverso: o modelo reduzido pode ser aplicado ao método estocástico para a localização a região do mínimo global como pode servir para calcular o gradiente da função objetivo para a otimização da velocidade de convergência de um método

determinístico. Esta última proposta já foi investigada recentemente por Balabanov e Venter [169].

A redução do problema direto precisa respeitar uma condição: a solução do problema reduzido e a solução do problema completo devem apresentar comportamentos semelhantes. Particularmente, as mesmas ordens de magnitude e os pontos de inflexão precisam ser conservados.

Neste trabalho, uma versão reduzida do problema direto 1 foi usada, desprezando-se o divergente do fluxo radiativo na equação (3.3.13). Assim, o problema de condução ficou desacoplado ao problema de radiação e o custo computacional foi reduzido por 40 vezes. A figura 5.3.2 ilustra o método Híbrido descrito acima, utilizando-se o modelo reduzido. Nota-se que, depois de identificada a região do mínimo global com o método Híbrido, passo 1, um método de gradiente é utilizado para a localização do mínimo global.

Na implementação do segundo passo, o problema direto é resolvido usando o modelo completo. Neste caso, o gradiente da função objetivo é calculado por esquema de diferenças finitas usando o modelo reduzido ou o modelo completo. No caso do modelo reduzido, o divergente do fluxo radiativo aproximado é introduzido na equação (3.3.13) resultando em uma diminuição do custo computacional de até 90 % por iteração. O esquema em dois passos [170] do procedimento de estimativa de parâmetros usado neste trabalho é mostrado na figura 5.3.2.



*Figura 5.3.2: Processo de estimativa dos parâmetros do problema 1 dividido em 2 passos.*

## 5.4 Definição dos Coeficientes de Sensibilidade

A matriz de sensibilidade desempenha um papel muito importante em problemas de estimativa de parâmetros. Um estudo dos coeficientes de sensibilidade permite estimar uma melhor localização da posição dos sensores e o intervalo de tempo de medida, assim como o tempo de aquecimento a ser utilizado.

O coeficiente de sensibilidade  $J_{sj}$ , definido na equação (5.1.10), é uma medida da sensibilidade das variáveis estimadas  $X_s$  com respeito a mudanças no parâmetro  $P_j$ , onde  $j = 1, 2, \dots, N$ . Um valor de magnitude pequena para  $J_{sj}$  indica que uma grande variação do parâmetro  $P_j$  resulta numa pequena variação na medida simulada  $X_s$ . Neste caso a estimativa do parâmetro  $P_j$  é extremamente difícil, porque basicamente o mesmo valor para a variável  $X_s$  pode representar uma grande faixa de valores para  $P_j$ . De fato, quando os coeficientes de sensibilidade são pequenos, tem-se que  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}| \approx 0$  e o problema é mal-condicionado, conforme foi explicado anteriormente. Pode-se também mostrar que  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}|$  é nulo se alguma coluna de  $\mathbf{J}$  pode ser expressa como uma combinação linear das outras colunas. Portanto, torna-se desejável ter coeficientes de sensibilidade  $J_{sj}$  linearmente independentes e com grandes magnitudes. Deste modo, o problema inverso não é muito sensível a erros nas medidas e parâmetros mais acurados podem ser obtidos. A maximização de  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}|$  é geralmente usada a fim de projetar os experimentos ótimos para a estimativa de parâmetros desconhecidos. A otimização de experimentos será explicada melhor na seção 5.6.

Devida a natureza numérica das soluções para o problema direto em questão, determinam-se os coeficientes de sensibilidade usando a aproximação usual da derivada primeira das medidas por diferenças finitas avançadas:

$$J_{sj} \cong \frac{X_s(P_1, P_2, \dots, P_j + \delta P_j, \dots, P_N) - X_s(P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_N)}{\delta P_j} \quad (5.4.1)$$

para  $s = 1, 2, \dots, MI$  e  $j = 1, 2, \dots, N$ . Isso consiste em realizar uma execução adicional do problema direto, perturbando levemente o parâmetro  $P_j$  por  $\delta P_j$ . Utilizou-se aqui  $\delta P_j \approx 10^{-3} P_j$ .

## 5.5 Análise Estatística dos Resultados

Com a análise estatística dos resultados é possível obter-se uma estimativa para o grau de incerteza dos parâmetros  $\hat{P}_j$ , que são os valores estimados para os parâmetros desconhecidos  $P_j$ , onde  $j=1, 2, \dots, N$ . Se forem usadas hipóteses de que as medidas contêm erros aditivos e não correlacionados, com distribuição normal, média zero e desvio padrão  $\sigma$ , a *matriz de covariância*  $\mathbf{V}_{MQ}$  para os parâmetros estimados com a norma de mínimos-quadrados é dada por Beck e Arnold [70] como:

$$\mathbf{V}_{MQ} \equiv \begin{bmatrix} \text{cov}(\hat{P}_1, \hat{P}_1) & \text{cov}(\hat{P}_1, \hat{P}_2) & \cdots & \text{cov}(\hat{P}_1, \hat{P}_N) \\ \text{cov}(\hat{P}_2, \hat{P}_1) & \text{cov}(\hat{P}_2, \hat{P}_2) & \cdots & \text{cov}(\hat{P}_2, \hat{P}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(\hat{P}_N, \hat{P}_1) & \text{cov}(\hat{P}_N, \hat{P}_2) & \cdots & \text{cov}(\hat{P}_N, \hat{P}_N) \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \sigma^2 \quad (5.5.1)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz de sensibilidade dada pela equação (5.1.9).

Já, utilizando o procedimento dado pela equação (5.1.33), a matriz de covariância  $\mathbf{V}_{MAP}$  dos parâmetros estimados depende da matriz de covariância a priori dos parâmetros desconhecidos:

$$\mathbf{V}_{MAP} = (\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} + \mathbf{V}^{-1})^{-1} \quad (5.5.2)$$

Os *desvios-padrão* para os parâmetros estimados podem ser obtidos a partir dos elementos da diagonal de  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{MQ}$  ou  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{MAP}$  como:

$$\sigma_{\hat{P}_j} \equiv \sqrt{\text{cov}(\hat{P}_j, \hat{P}_j)} = \sqrt{V_{jj}} \quad \text{para } j=1, 2, \dots, N \quad (5.5.3)$$

Os intervalos de confiança para uma população de medidas não-correlacionadas, seguindo a lei de distribuição estatística de Gauss para 99 % de nível de confiança para os parâmetros estimados, são então obtidos como

$$\hat{P}_j - 2.576 \sigma_{\hat{P}_j} \leq P_j \leq \hat{P}_j + 2.576 \sigma_{\hat{P}_j} \quad \text{para } j=1, 2, \dots, N \quad (5.5.4)$$

sendo que

$$\int_{\hat{P}_j - 2.576 \sigma_{\hat{P}_j}}^{\hat{P}_j + 2.576 \sigma_{\hat{P}_j}} \frac{1}{\sigma_{\hat{P}_j} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\hat{P}_j - P_j)^2}{2\sigma_{\hat{P}_j}^2}\right) d\hat{P}_j = 0.99 \quad (5.5.5)$$

Os intervalos de confiança não dão uma boa aproximação para a região de confiança para os parâmetros estimados. De fato, o intervalo de confiança é obtido para cada parâmetro, indiferentemente da estimativa dos outros parâmetros. A região de confiança obtida a partir de intervalos de confiança pode conter regiões que não

pertençam à região de confiança real e ao mesmo tempo pode deixar de conter regiões que pertençam à região de confiança real.

Uma aproximação melhor consiste em definir um hiperelipsóide de confiança centrado nas coordenadas  $(\hat{P}_j - P_j)$ , onde  $j=1, 2, \dots, N$ . Este hiperelipsóide de confiança é definido como

$$(\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{P})^T \mathbf{V}^{-1} (\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{P}) \leq \chi_N^2 \quad (5.5.6)$$

onde  $\chi_N^2$  é a distribuição Chi-quadrado com  $N$  graus de liberdade, onde  $N$  é o número de parâmetros a serem estimados. Por exemplo, para 99 % de nível de confiança sobre 5 parâmetros estimados, a equação (5.5.6) se escreve:

$$(\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{P})^T \mathbf{V}^{-1} (\hat{\mathbf{P}} - \mathbf{P}) \leq 15.1 \quad (5.5.7)$$

## 5.6 Projeto Ótimo

A análise do comportamento dos coeficientes de sensibilidade, antes de estimar os parâmetros desconhecidos, é importante para a identificação de períodos que envolvam dependência linear e pequenas magnitudes, já que as medidas realizadas nestes períodos não contribuem para a solução do problema inverso. Por outro lado, a otimização de experimento permite definir as condições em que o experimento precisa ser conduzido para obterem-se resultados com a maior exatidão. Efetivamente, a variância dos parâmetros estimados depende de fontes de incerteza, como a incerteza das medidas e a incerteza dos parâmetros independentes ao problema de estimativa, tais como a posição de um sensor, o tempo de amostragem, a má definição de uma condição de contorno, etc.

Modelos de otimização de experimentos foram iniciados por Beck e Arnold [70], baseados na maximização da matriz de informação  $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}|$ . Este critério foi amplamente investigado por [84-89,92] no objetivo de determinar regiões onde a variância dos parâmetros  $P_i$  é mínima, e onde a sensibilidade dos parâmetros  $\eta_j$  independentes do problema de estimativa também é mínima. Estas duas regiões infelizmente não costumam se confundir. Segundo Emery e Nenarokomov [92], a maximização da *Matriz de informação de Fisher*, “estendida” por esses mesmos autores, permitiria se situar no compromisso entre os dois fenômenos, e determinar por consequência a região de medida ótima para o experimento.

A extensão da *matriz de Fisher* proposta por Emery e Fadale [90] leva em conta uma informação suplementar: a incerteza de parâmetros que influenciam o problema direto sem pertencer aos parâmetros da estimativa. Definindo o vetor de parâmetros independentes  $\boldsymbol{\eta}^T : \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_Q\}$ , de valor e de incerteza conhecidos; definindo também a matriz de sensibilidade das medidas  $\boldsymbol{\Theta}$  com relação a estes parâmetros  $\eta_i$ ; e definindo a matriz de covariância dos parâmetros  $\mathbf{G}$ , a *matriz de Fisher estendida*  $\tilde{\mathbf{F}}$  se escreve como

$$\tilde{\mathbf{F}}_{r,s} = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \left[ \left( \frac{\partial X_{im}}{\partial P_r} \right)^T \boldsymbol{\Sigma}_{im}^{-1} \left( \frac{\partial X_{im}}{\partial P_s} \right) + \frac{1}{2} \text{trace} \left[ \boldsymbol{\Sigma}_{im}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{im}}{\partial P_s} \boldsymbol{\Sigma}_{im}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{im}}{\partial P_r} \right] \right] \quad (5.6.1)$$

onde  $\boldsymbol{\Sigma}_{im} = \sigma_{im}^2 \mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_{im} \mathbf{G}_{im} \boldsymbol{\Theta}_{im}^T$  é a matriz de covariância estendida das medidas. A notação da matriz de Fisher é realizada na forma de um somatório onde  $I$  é o número de medidas no tempo realizadas por um sensor,  $M$  o número de sensores. Os subscritos  $r, s = 1, 2, \dots, N$  se referem a linha e coluna da matriz  $\mathbf{F}$  respectivamente.

O somatório pode ser extraído reformulando-se cada componente das matrizes na forma de um vetor de dimensão  $MI$ , onde os dados a cada passo  $i$  e  $m$  são rearrumados. Para a formulação acima, as medidas são supostas conter erros aditivos e não correlacionados, com distribuição normal, média zero e desvio padrão  $\sigma$ . Deve-se notar que a *matriz de Fisher estendida* foi obtida no processo de minimização da função objetivo *máxima de verossimilhança* que leva em conta as incertezas sobre as medidas.

Quando os parâmetros independentes ao problema de estimativa são conhecidos com exatidão, o termo traço da matriz de Fisher estendida se anula. Neste caso, a matriz de covariância das medidas  $\boldsymbol{\Sigma}_{im}$  é substituída por  $\mathbf{W}_{im}^{-1} = \sigma_{im}^2 \mathbf{I}$  e a matriz de Fisher se escreve como o inverso da matriz de covariância,

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} = \mathbf{V}^{-1} \quad (5.6.2)$$

Se o desvio padrão das medidas for constante para qualquer passo  $i$  e  $m$ , a matriz  $\mathbf{F}$  se re-escreve como o produto [89]

$$\mathbf{F} = \sigma^{-2} \mathbf{J}^T \mathbf{J} \quad (5.6.3)$$

e o essencial da informação levada pela matriz de Fisher é contido no produto matricial  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ .

A análise da matriz de Fisher deu nascimento a vários critérios de otimização de experimento tais como os critérios A-, C-, D-, E-, L- e T-ótimos. Os mais comuns são

os critérios D- e E-ótimo. De naturezas diferentes, o critério D-ótimo consiste na maximização da matriz original de informação, isso é, a minimização do elipsóide de confiança dos parâmetros estimados,

$$\max [\det(\mathbf{F})] \Rightarrow \mathbf{P}^* \quad (5.6.4)$$

enquanto o critério E-ótimo consiste na maximização da raiz quadrada do menor autovalor da matriz  $\mathbf{F}$ ,

$$\max [\sqrt{\varphi_{\min}}] \Rightarrow \mathbf{P}^* \quad (5.6.5)$$

Os demais critérios, discutidos por Emery e Nenarokomov [92], não serão comentados neste trabalho.

Voltando ao critério D-ótimo, que é o critério de otimização de experimento mais popular, define-se a matriz  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{J}^T \mathbf{J}$  cujos elementos são dados por

$$\mathbf{F}_{r,s} \equiv [\mathbf{J}^T \mathbf{J}]_{r,s} = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^I \left( \frac{\partial X_{im}}{\partial P_r} \right) \left( \frac{\partial X_{im}}{\partial P_s} \right) \quad \text{para } r, s = 1, 2, \dots, N \quad (5.6.6)$$

onde  $I$  é o número de medidas no tempo realizadas por um sensor,  $M$  o número de sensores, e os subscritos  $r$  e  $s$  se referem a linha e coluna da matriz  $\mathbf{F}$  respectivamente.

Para casos envolvendo um grande, porém fixo, número de medidas igualmente espaçadas com valor máximo conhecido na região  $X_{max}$ , torna-se mais conveniente procurar a maximização do determinante da matriz  $\mathbf{F}_I$  em lugar da matriz  $\mathbf{F}$  [69]. Os elementos da matriz  $\mathbf{F}_I$  são definidos por

$$[\mathbf{F}_I]_{r,s} = \frac{1}{Mt_f} \sum_{m=1}^M \int_{t=0}^{t_f} \left( P_r \frac{\partial X_m}{\partial P_r} \right) \left( P_r \frac{\partial X_m}{\partial P_r} \right) \left( \frac{1}{X_{max}} \right)^2 dt \quad \text{para } r, s = 1, 2, \dots, N \quad (5.6.7)$$

onde  $t_f$  é a duração do experimento. O comportamento dos coeficientes de sensibilidade e do determinante da matriz  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  é analisado para os problemas 1 e 2 no próximo capítulo.

# Capítulo 6

## Resultados e discussões

Neste capítulo serão mostrados os resultados da estimativa de parâmetros obtidos com o uso de medidas experimentais simuladas. Mas, antes de abordar a solução do problema inverso, um procedimento de verificação precisa ser efetuado. O procedimento de verificação do problema consiste em: 1) validar o problema direto, 2) analisar os coeficientes de sensibilidade e 3) otimizar o experimento. A qualidade da estimativa de parâmetros depende da obtenção sucessiva de resultados satisfatórios nessas etapas preliminares.

### 6.1 Validação do Problema Direto

Antes de dar seqüência à formulação do problema inverso, apresentamos aqui uma comparação dos resultados numéricos obtidos neste trabalho com resultados obtidos na literatura [31,34,36,137,148]. A solução, analítica ou numérica, depende muito do problema teste e dos modos de transferência de calor considerados.

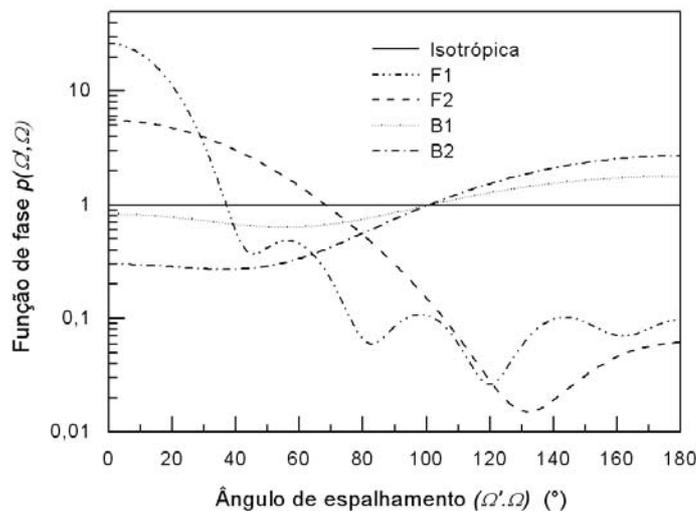
A solução de problemas de radiação multidimensionais pode ser formulada analiticamente assumindo o material totalmente absorvente ou espalhante e assumindo um campo de temperatura uniforme no domínio de estudo [128,148]. Neste caso, os resultados do problema radiativo serão comparados com resultados numéricos tirados da literatura, os quais admitem um campo de temperatura não uniforme. Ao contrário, configurações multidimensionais em condução de calor com heterogeneidade são facilmente resolvidas por técnicas analíticas: a técnica de Transformada Integral [137] permite a inclusão na solução de não-homogeneidades tanto no domínio de estudo tanto quanto nos contornos. Em caso de problemas de acoplamento condução com radiação, soluções analíticas transiente são obtidas usando as técnicas de substituição de núcleo [28,29] ou de Quadrípolos Térmicos [34]. Porém, a técnica se aplica especificamente a problemas unidimensionais com não-homogeneidades simples.

O processo de validação do problema direto será encaminhado em três etapas progressivas: 1) a validação da solução numérica da ETR, 2) a validação da solução numérica do problema de condução e 3) a validação da solução numérica de problemas com acoplamento condução-radiação.

### 6.1.1 Problemas de radiação em MST

Uma grande variedade de problemas radiativos unidimensionais é resolvida de maneira analítica, embora assumindo o espalhamento isotrópico, a condição de simetria, o equilíbrio radiativo, ou a temperatura homogênea no domínio e no contorno. No entanto, a solução de problemas bi e tridimensionais torna-se extremamente complicada, descartando a possibilidade de usar a ferramenta analítica para validação. Uma alternativa prática consiste em implementar soluções numéricas de casos-teste.

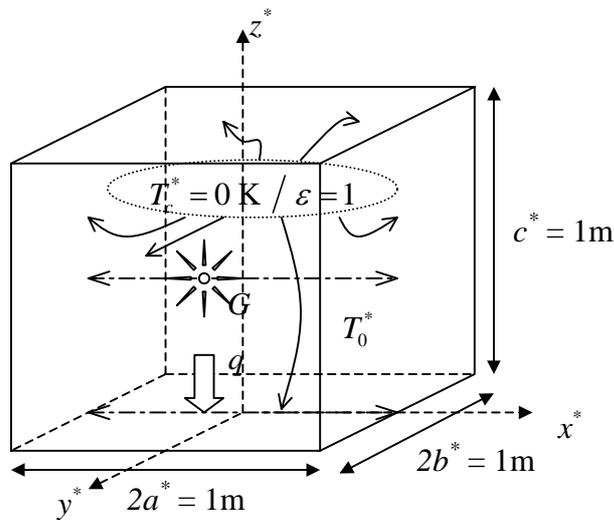
Outra vantagem de implementar soluções numéricas de casos-teste é de validar um programa onde é levado em conta perfis de espalhamento radiativo diferentes do espalhamento isotrópico. Assim, diversos tipos de espalhamento, orientados para frente ou orientados para trás, podem ser investigados com a escolha do grau de anisotropia. Nesta validação foram escolhidas 5 funções de fase padrão [171], utilizadas em diversas referências bibliográficas [40,41,44-46,147,148]. Além da função isotrópica, as funções definidas em [171] são chamadas de F1, F2, B1 e B2 onde a letra B denota o espalhamento orientado para trás e a letra F, o espalhamento orientado para frente. A figura 6.1.1 mostra o comportamento direcional das funções:



*Figura 6.1.1: Funções de fase teste utilizadas na validação do programa.*

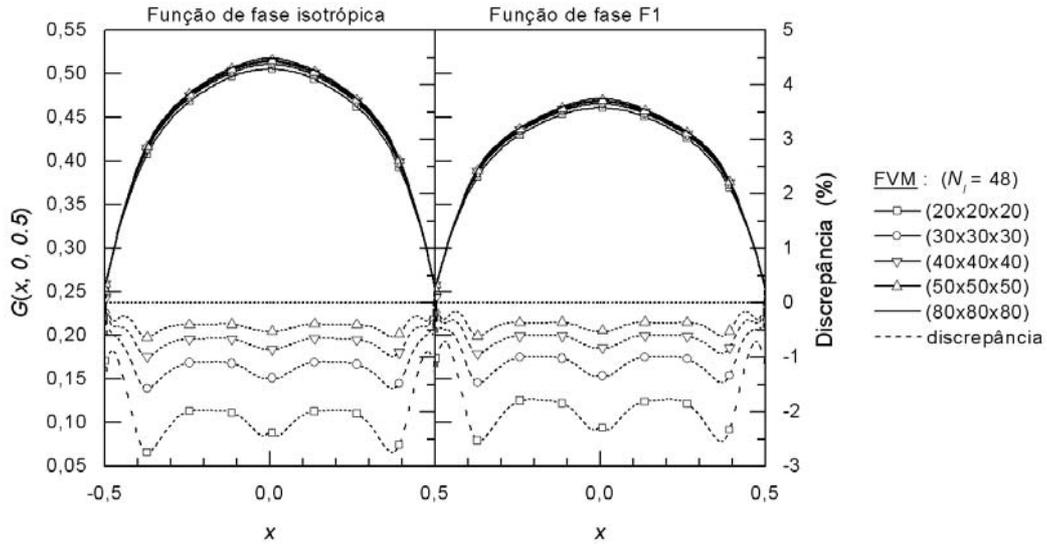
Antes de entrar na fase de validação propriamente dita, mostra-se primeiro o efeito do refinamento de malha sobre a solução numérica implementada aqui. Consideramos o MST quente (ver figura 6.1.2) de temperatura homogênea  $T^*(x^*, y^*, z^*) = T_0^*$ , na forma de uma cavidade cúbica ( $2a^* = 2b^* = c^* = 1 \text{ m}$ ) com paredes frias ( $T_c^* = 0$ ) e negras ( $\varepsilon = 1$ ). O meio é cinza, absorve, emite e espalha, com coeficiente de extinção e albedo, respectivamente de  $\beta^* = 2 \text{ m}^{-1}$  e  $\omega = 0.5$ . Dois tipos de espalhamento são analisados: o espalhamento isotrópico e o espalhamento orientado para frente, usando a função de fase F1. A figura 6.1.3 abaixo mostra os resultados da variação de radiação incidente normalizada  $G = G^*/4\sigma T_0^{*4}$ , em  $z^* = c^*/2$  e  $y^* = 0$ , sendo  $x = x^*/2a^*$ ,  $y = y^*/2b^*$  e  $z = z^*/c^*$ , usando 5 refinamentos de malha. O número de volumes por direção varia de 20 a 50, enquanto a malha direcional usa 48 direções de controle para completar o ângulo sólido total de  $4\pi$ . A radiação incidente dimensional  $G^*$  é dada por:

$$G^* = \int_{\Omega=4\pi} I^*(\Omega) d\Omega \approx \sum_{l=1}^{N_l} I^{*l} \Omega^l \quad (6.1.1)$$



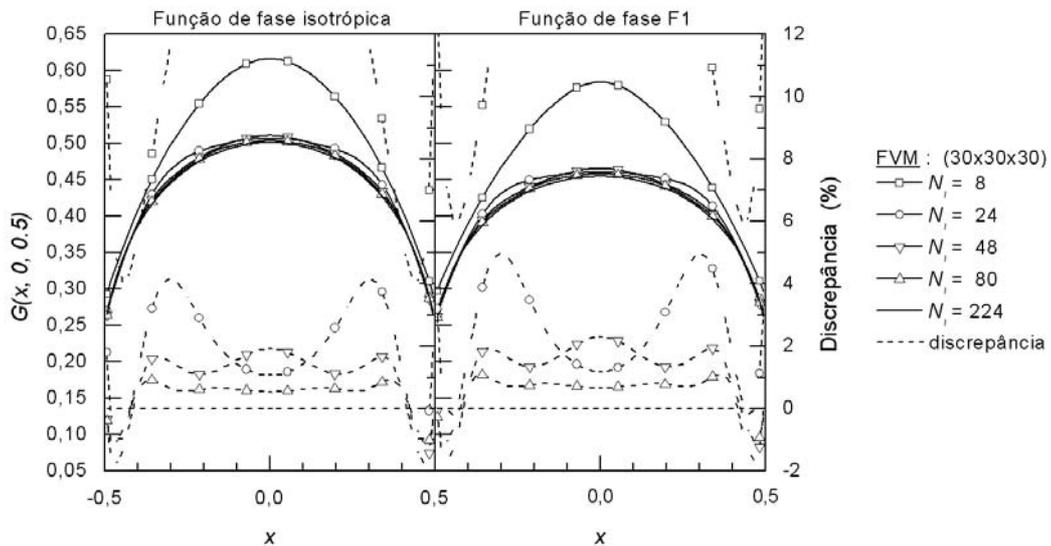
*Figura 6.1.2: MST quente, absorvente e difuso contido numa cavidade cúbica fria e negra.*

Nota-se na figura 6.1.3 que a solução numérica praticamente apresenta convergência em escala gráfica, quando se compara os resultados das malhas com  $30 \times 30 \times 30$  volumes e com  $80 \times 80 \times 80$  volumes. No entanto, a discrepância máxima entre os resultados destas duas malhas é de 1 %.



*Figura 6.1.3: Efeito do refinamento de malha espacial para o caso-teste apresentado na figura 6.1.2.*

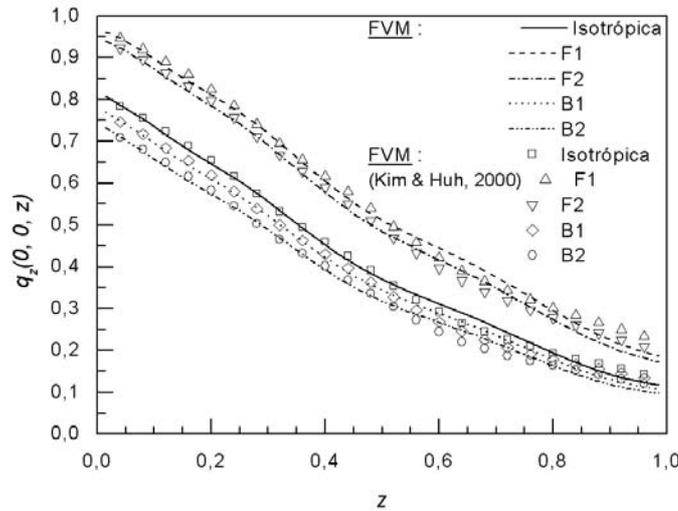
Por outro lado, foi observado nos testes numéricos realizados que a influência do número de direções é bem mais significativa na convergência dos resultados, do que o número de volumes usados na discretização. Tal fato é mostrado na figura 6.1.4, que apresenta os resultados para o mesmo caso teste da figura 6.1.3, obtidos com  $30 \times 30 \times 30$  volumes de controle e com 5 diferentes números de direções usadas na discretização. Nota-se na figura 6.1.4 a convergência em escala gráfica quando 80 direções são usadas na discretização. Por outro lado, a discrepância entre os resultados das malhas de 48 direções e de 224 direções foi de 2 %, para as duas funções de fase.



*Figura 6.1.4: Efeito da precisão de malha direcional sobre uma solução radiativa.*

Os testes de validação do problema radiativo são realizados a seguir com a malha  $(N_x \times N_y \times N_z) \times N_t = (30 \times 30 \times 30) \times 80$ . Com o objetivo de validar o programa resolvido pelo método de volumes finitos, três casos testes tridimensionais foram resolvidos. As soluções obtidas são comparadas com os resultados implementados por Kim e Huh [148], que utilizam igualmente o método de volumes finitos como método de solução. A malha usada por [148] foi de  $(N_x \times N_y \times N_z) \times N_t = (25 \times 25 \times 25) \times 80$ .

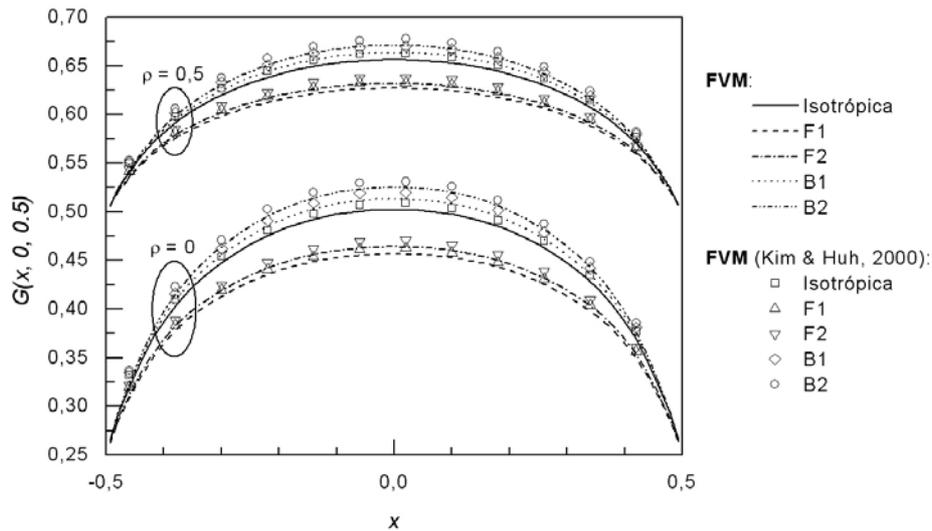
O primeiro teste considera a mesma cavidade cúbica negra de lado  $2a^* = 2b^* = c^* = 1 \text{ m}$ , envolvendo um meio totalmente espalhante ( $\beta^* = 1 \text{ m}^{-1}$  e  $\omega = 1$ ) e frio  $T^*(x^*, y^*, z^*) = 0$ . A superfície  $z^* = 0$  é elevada a temperatura  $T_c^*(x^*, y^*, 0) = T_0^*$ , enquanto as outras superfícies são guardadas frias. A variação de fluxo longitudinal normalizado  $q = q^* / \sigma T_0^{*4}$  ao longo da reta  $(0, 0, z^*)$  é mostrada na figura 6.1.5 para os 5 modos de espalhamento, usando as funções de fase F1, F2, B1 e B2.



*Figura 6.1.5: Variação do fluxo longitudinal normalizado ao longo da linha  $(0, 0, z^*)$ .*

Observe-se na figura 6.1.5 a diminuição quase linear do fluxo radiativo normalizado com o afastamento da superfície aquecida. Observe-se também a sobreposição das curvas obtidas aqui e as da referência [148], mesmo para um meio totalmente espalhante.

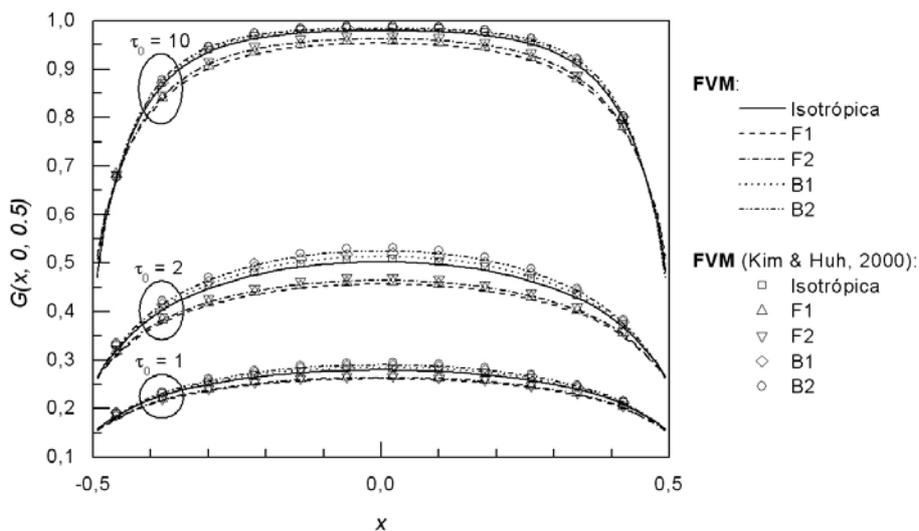
O segundo teste considera o mesmo problema físico da figura 6.1.2. A variação ao longo da reta  $(x^*, 0, c^*/2)$  da radiação incidente obtida neste trabalho e em [148] é apresentada na figura 6.1.6, com duas condições de contorno nas paredes da cavidade. No primeiro caso, as paredes são negras ( $\rho = 0$ ) e no segundo caso, as paredes refletem de maneira difusa ( $\rho = 0.5$ ):



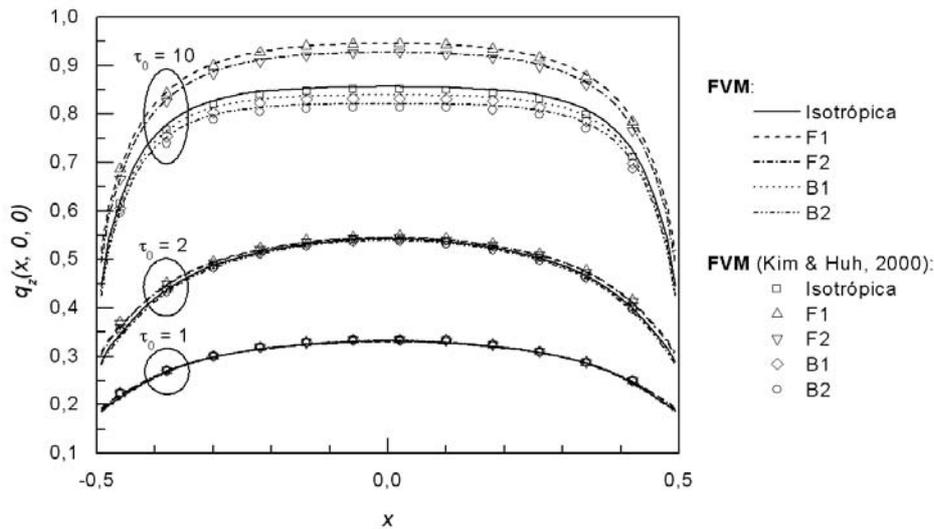
*Figura 6.1.6: Variação da radiação incidente ao longo da linha  $(x^*, 0, c^*/2)$ .*

Observa-se na figura 6.1.6 o aumento do campo radiativo devido à ação da refletividade no contorno e a excelente concordância entre os resultados obtidos aqui e os da referência [148].

Os terceiro e quarto testes mostram a influência da espessura ótica do MST sobre o campo radiativo dentro da cavidade. As fronteiras são consideradas negras. A espessura ótica do meio toma a seqüência de valores  $\tau_0 = 1, 2$  e  $10$  enquanto o albedo toma o valor constante  $\omega = 0.5$ . As variações de radiação incidente normalizada na linha central  $(x^*, 0, c^*/2)$  e de fluxo azimuthal recebido pela superfície inferior da cavidade, ao longo da linha  $(x^*, 0, 0)$ , são comparadas com as soluções de Kim e Huh [148] nas figuras 6.1.7 e 6.1.8, respectivamente, para as funções de fase isotrópica, F1, F2, B1 e B2:



*Figura 6.1.7: Variação de radiação incidente normalizada ao longo da linha  $(x^*, 0, c^*/2)$  para três espessuras óticas.*



*Figura 6.1.8: Variação do fluxo azimutal normalizado ao longo da linha  $(x^*, 0, 0)$  para três espessuras óticas.*

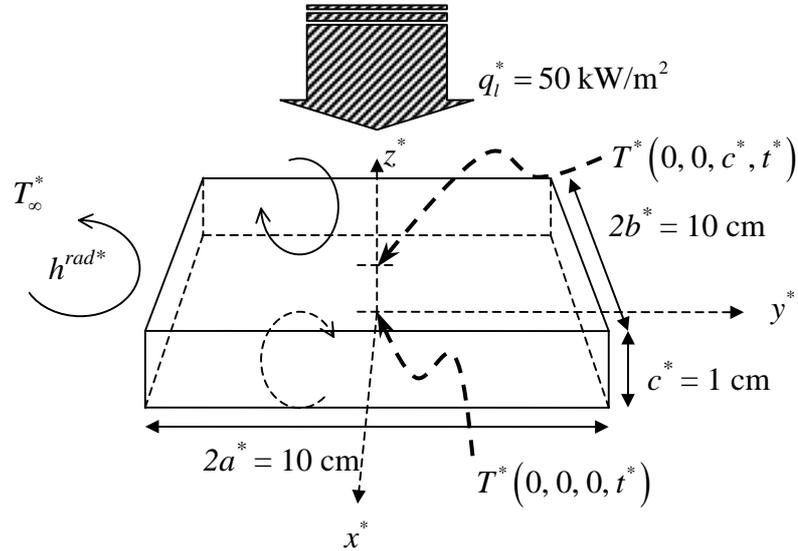
Observa-se a elevação do campo radiativo devido ao aumento da espessura ótica do meio emissivo. O comportamento dos resultados obtidos neste trabalho tem excelente concordância com os resultados obtidos por Kim e Huh [148], validando o programa de resolução da ETR em coordenadas cartesianas.

### 6.1.2 Problemas de condução de calor

A técnica da Transformada Integral Clássica [137] oferece a possibilidade de construir soluções analíticas de problemas multidimensionais envolvendo não-homogeneidades de temperatura ou de fluxo, tanto no contorno do domínio de estudo quanto nas suas fronteiras. Portanto, o problema de condução de calor, sem acoplamento com a radiação, será validado com sua solução analítica. O caso-teste a ser examinado é representativo de um experimento Flash constituído de uma amostra aquecida por um pulso de laser.

Considera-se uma amostra de material opaco, apresentada sob a forma de uma placa de lado  $2a^* = 2b^* = 10$  cm e de espessura  $c^* = 1$  cm. O material tem as seguintes propriedades termofísicas: o calor específico é  $C^* = 2.2 \times 10^6$  J/m<sup>3</sup>.K e a sua condutividade térmica é  $k^* = 1.5$  W/m.K, que correspondem às propriedades do vidro a altas temperaturas. Um fluxo de calor causado por um impulso laser de seção energética quadrada aquece a face superior da placa durante um período curto de 1 s com uma potência média de 50 kW/m<sup>2</sup>. A temperatura inicial da amostra  $T_0^* = 1000$  K, é tomada

igual à temperatura do meio ambiente  $T_{\infty}^*$ ; a troca de calor nas superfícies é caracterizada pelo coeficiente de transferência de calor de  $h^{rad*} = 227 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ . Uma representação do problema é dada pela figura 6.1.9 seguinte:



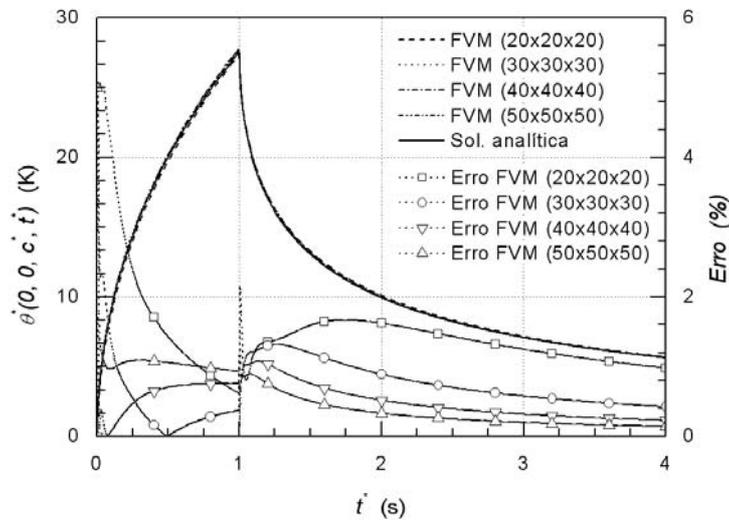
*Figura 6.1.9: Representação de uma amostra de material opaco submetida a um pulso de laser.*

A validação é realizada comparando as variações de temperatura transiente, no centro da face aquecida e no centro da face não aquecida da placa, obtidas por método analítico e numérico. A expressão da solução analítica é dada no apêndice A pela equação (A.1.4), onde as simplificações dadas pelas equações (A.2.1,2) são usadas.

Apresenta-se na figura 6.1.10 a variação da temperatura  $\theta^*(t^*) = T^*(t^*) - T_0^*$  no centro da face aquecida, assim como o erro numérico definido pela equação (6.1.1), para 4 refinamentos de malha, onde

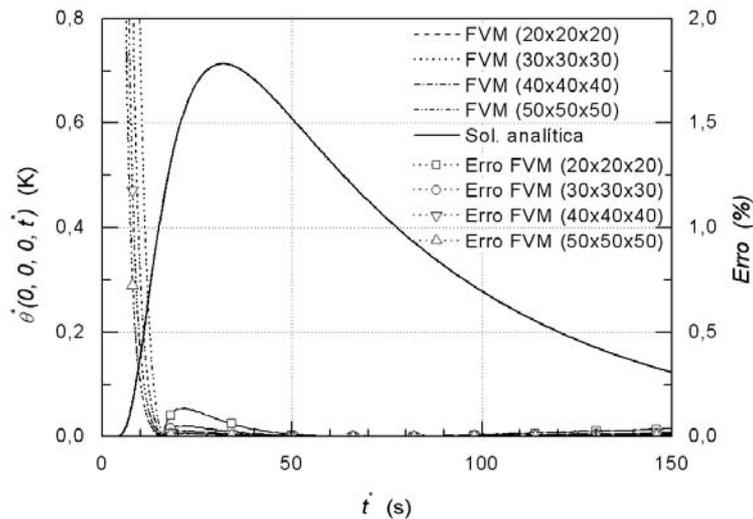
$$\text{Erro (\%)} = \left| \frac{\theta_{\text{num}}^*(t^*) - \theta_{\text{ana}}^*(t^*)}{\theta_{\text{ana}}^*(t^*)} \right| \times 100 \quad (6.1.2)$$

$\theta_{\text{num}}^*(t^*)$  e  $\theta_{\text{ana}}^*(t^*)$  representam respectivamente as temperaturas relativas obtidas numericamente e analiticamente.



*Figura 6.1.10: Variação de temperatura no centro da face aquecida pelo flash.*

Similarmente, a figura 6.1.11 apresenta os resultados para a variação de temperatura transiente, e o erro da solução numérica com a solução analítica, no centro da face não aquecida.



*Figura 6.1.11: Variação de temperatura no centro da face não aquecida.*

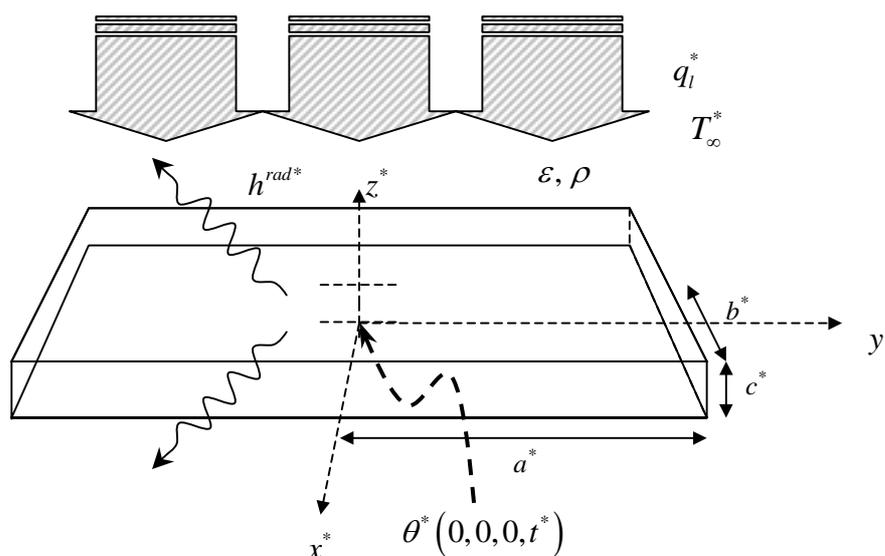
Observa-se na figura 6.1.11 que o erro fica desprezível quando o material entre em regime permanente, e que este não alcança 0,2 % em regime transiente para a malha grossa de  $(20 \times 20 \times 20)$  volumes, na face não aquecida. Na face aquecida, um erro máximo de 1 % é observado na queda de fluxo para uma malha de  $(30 \times 30 \times 30)$  volumes. Em escala gráfica, não é possível observar diferenças entre a solução numérica e a solução analítica. Os erros de maior amplitude observados no tempo inicial não são levados em conta, devido à amplitude pequena da temperatura relativa  $\theta^*(t^*)$ .

### 6.1.3 Problemas acoplados de condução-radiação

Com o objetivo de validar o problema em situação de acoplamento térmico condução-radiação, decidiu-se investigar os resultados da simulação de um experimento flash, onde a participação dos efeitos radiativos é importante para os materiais semitransparentes. Resultados gráficos numéricos e analíticos encontram-se na literatura [31,34-36] para simular a variação de temperatura transiente em vidro, na configuração unidimensional.

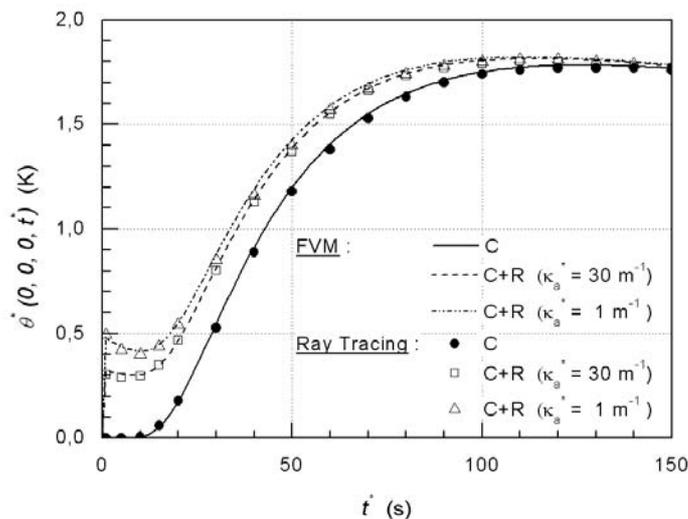
A fim de reproduzir a configuração unidimensional neste programa, amostras de comprimento e de largura superiores a dez vezes a espessura foram consideradas ( $a \approx b \gg c$ ). Em tal situação as curvas isothermas tendem a ser paralelas uma às outras, e, do ponto de vista radiativo, o fator de forma das superfícies maiores domina aquele das faces laterais.

A validação do programa é realizada através de 4 casos-teste de dificuldade crescente. O primeiro considera um meio cinza não espalhante contido entre duas fronteiras absolutamente negras. Já o segundo e terceiro casos-teste consideram o meio cinza espalhante. Nesta etapa, o efeito da refletividade das fronteiras é investigado. Finalmente, o quarto caso teste considera um material não cinza com fronteiras opacas e comportamento espectral dado. Uma malha  $(N_x \times N_y \times N_z) \times N_t = (25 \times 25 \times 25) \times 80$  é utilizada para todos os exemplos.



*Figura 6.1.12: Representação de uma amostra de MST submetida a um pulso laser (problema tridimensional reduzido à configuração unidimensional).*

O primeiro teste envolve um meio cinza absorvente, emissivo e não espalhante submetido a um pulso laser. A peça de MST, de dimensões  $a^* = b^* = 5 \text{ cm}$  e  $c^* = 1 \text{ cm}$ , é pintada com uma tinta preta ( $\varepsilon = 1$ ). Um pulso laser, de comprimento de onda  $\lambda_l = 10.6 \mu\text{m}$  e de fluxo  $q_l^* = 50 \text{ kW/m}^2$  aquece a face superior principal durante um período de 1 s. A condutividade térmica do material é tomada igual a  $k^* = 0.7 \text{ W/m.K}$  e a capacidade térmica volumétrica igual a  $2.2 \times 10^6 \text{ J/m}^3.\text{K}$ . As temperaturas iniciais da placa e do meio ambiente são idênticas  $T_0^* = T_\infty^* = 300 \text{ K}$ . Uma vez aquecida, a placa sofre trocas de calor por convecção e por radiação com o meio ambiente: o coeficiente de transferência de calor total é  $h^{rad*} = h^* + 4\varepsilon\sigma T_0^{*3}$ , onde  $h^* = 7 \text{ W/m}^2.\text{K}$  é o coeficiente devido à convecção natural ao redor da placa. Três valores do coeficiente de absorção radiativa  $\kappa_a^* = 1. \text{m}^{-1}$ ,  $30. \text{m}^{-1}$  e  $\infty$  são investigados supondo o índice de refração real do material constante ( $n_r = 1.5$ ).



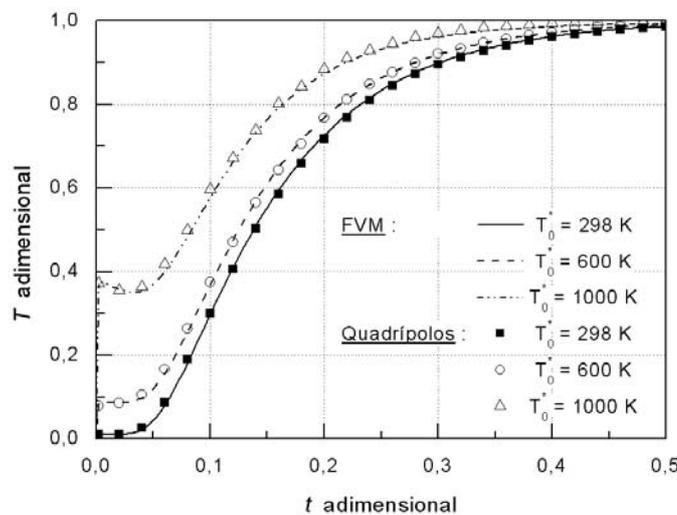
*Figura 6.1.13: Efeito absorção radiativa sobre a variação de temperatura na face inferior de um MST não espalhante submetido a um pulso laser.*

Apresenta-se na figura 6.1.13 os resultados obtidos neste trabalho, bem como os obtidos por Tan *et al.* [36] pelo método “Ray Tracing”, para este caso teste. Esta figura mostra a contribuição trazida pela radiação na resposta da temperatura da face inferior da amostra. Uma característica dos materiais óticamente finos é o pico de temperatura obtido no tempo inicial em resposta à irradiação da face superior sobre a face inferior. A face superior, submetida ao flash, sofre uma brusca elevação de temperatura e irradia a face inferior. Quando o meio é óticamente fino, o calor por radiação trocado entre as faces não consegue ser totalmente absorvido pelo meio, resultando em um brusco

aumento de temperatura. À medida que o tempo passa, a diferença de temperatura entre as duas superfícies diminui, alterando a contribuição radiativa. Para tempos longos, essa contribuição radiativa desaparece e a transferência de calor por condução no meio é responsável pela elevação de temperatura a partir de 10 s. Isso mostra o caráter instantâneo da transferência de calor por radiação, enquanto a transferência de calor por condução é um fenômeno difusivo e lento. Estes fenômenos são observados também nos resultados do segundo teste apresentados a seguir.

No segundo teste, o efeito da temperatura inicial é investigado. Uma placa de material diferente, de dimensão ( $a^* = 1 \text{ cm}$ ;  $b^* = 1 \text{ cm}$ ;  $c^* = 2 \text{ mm}$ ) é aquecida por um pulso de energia  $E_l^* = 3400 \text{ J/m}^2$ . O material cinza, protegido por uma tinta preta ( $\varepsilon = 1$ ), absorve, emite ( $\kappa_a^* = 75 \text{ m}^{-1}$ ) e espalha a radiação de maneira isotrópica ( $\sigma_s^* = 100 \text{ m}^{-1}$ ). A parte real do índice de refração do meio é de  $n_r = 1.36$ . A condutividade térmica é avaliada a  $k^* = 1.3 \text{ W/m.K}$ , enquanto a capacidade térmica volumétrica é de  $C^* = 1.7 \times 10^6 \text{ J/m}^3.\text{K}$ . As perdas de calor por convecção e por radiação estão aqui desprezadas.

A figura 6.1.14 compara os resultados obtidos neste trabalho com os resultados obtidos por André e Degiovanni [34] e Da Silva [35] para os valores de temperatura inicial  $T_0^* = T_\infty^* = 298, 600$  e  $1000 \text{ K}$ . Nesta figura, os resultados são apresentados na forma adimensional onde a temperatura é definida como  $T_{\text{adimensional}} = \theta^*(0,0,0,t^*) / (E_l^* / C^* c^*)$  e o tempo como  $t_{\text{adimensional}} = k^* t^* / (C^* c^{*2})$ :



*Figura 6.1.14: Efeito da temperatura inicial sobre a variação de temperatura na face inferior de um MST espalhante submetido a um pulso laser.*

Esta figura mostra a importância da troca de calor por radiação a altas temperaturas. Observa-se a rápida elevação do pico de temperatura em  $t^* = 0$  com a temperatura de funcionamento de experimento, obviamente proporcional a  $T_0^{*4}$ .

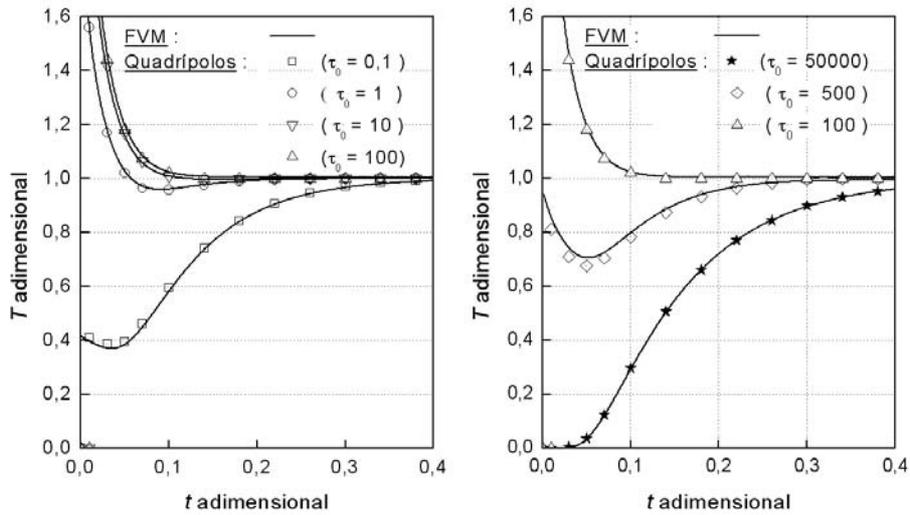
No terceiro teste, o efeito da espessura ótica é investigado. Uma placa de espessura variável, e de dimensão lateral extensa ( $a^* = b^* = 50$  m), é aquecida por um pulso de energia  $E_l^* = 8600$  J/m<sup>2</sup>. O material cinza, protegido por uma tinta preta ( $\varepsilon = 1$ ), espalha a radiação de maneira isotrópica sem absorvê-la. Neste exemplo o albedo foi aproximado a  $\omega = 0.9999$ , sendo impossível resolver problemas totalmente espalhante pelo método FVM explícito que requer então um número infinito de iterações para convergir. A parte real do índice de refração do meio é de  $n_r = 1$ . A condutividade térmica é tomada igual a  $k^* = 1$  W/m.K, enquanto a capacidade térmica volumétrica é de  $C^* = 2.15 \times 10^6$  J/m<sup>3</sup>.K. As perdas de calor por convecção e por radiação estão sendo de novo desprezadas.

A fim de cobrir uma faixa extensa de valor da espessura ótica ( $0.1 \leq \tau_0 \leq 50000$ ), foi escolhido primeiro variar a espessura da placa, sendo o material com propriedades radiativas constantes. A partir de  $\tau_0 > 100$ , foi escolhido aumentar o valor do coeficiente de espalhamento sem mudar a espessura da placa. A tabela 6.1.1 mostra as propriedades radiativas utilizadas, assim como a espessura para a realização da figura 6.1.15:

*Tabela 6.1.1: Parâmetros utilizados para a realização da figura 6.1.15:*

$\tau_0$	$\kappa_a^* (\text{m}^{-1})$	$\sigma_s^* (\text{m}^{-1})$	$c^* (\text{m})$
0.1	0.0023	23	0.004
1	0.0023	23	0.04
10	0.0023	23	0.4
100	0.0023	23	4
500	0.0115	115	4
50000	1.15	11500	4

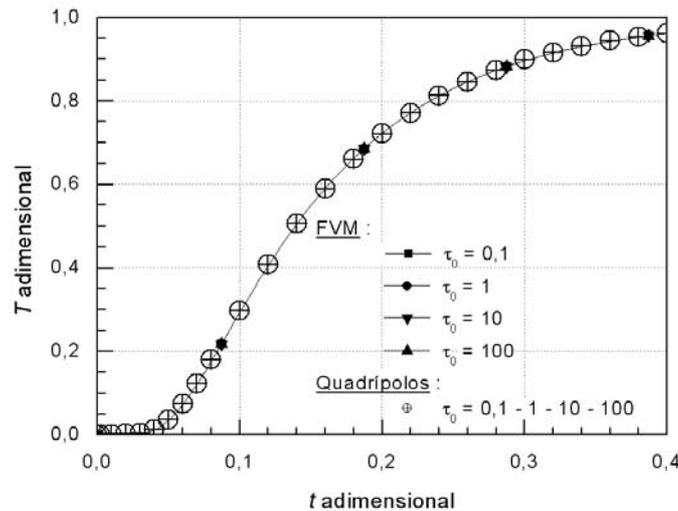
A figura 6.1.15 mostra a comparação dos resultados obtidos neste trabalho e por André e Degiovanni [34], pelo método de quadrípolos térmicos. Nesta figura, os resultados são apresentados na forma adimensional.



*Figura 6.1.15: Efeito da espessura ótica sobre a variação de temperatura na face inferior de um MST totalmente espalhante submetido a um pulso laser.*

A figura 6.1.15 mostra todas as características de um meio semitransparente com fronteiras negras aquecido por um pulso de curta duração: quando o coeficiente de extinção do meio é pequeno e a espessura do meio aumenta, o efeito principal observado é o pico de temperatura devido a transferência de calor por radiação entre as duas superfícies negras. À medida que se aumenta a espessura do material ( $c^* > 0.4 \text{ m} \Leftrightarrow \tau_0 > 10$ ), as curvas de temperatura adotam um perfil idêntico diferente do termograma típico de um material opaco ( $\tau \geq 10^4$ ). Isto mostra que o valor da espessura ótica ( $\tau_0 > 1$ ) não é um critério válido para afirmar se um material é opaco ou semitransparente, principalmente quando  $\omega$  tende para o valor 1 [34]. Efetivamente, ao analisar a figura 6.1.15, o material totalmente espalhante, de espessura significativa, só pode ser considerado opaco aumentando o coeficiente de espalhamento até um valor superior a  $10^4 \text{ m}^{-1}$ .

O mesmo teste foi realizado considerando as fronteiras da placa perfeitamente refletivas ( $\rho=1$ ). Os resultados obtidos na figura 6.1.16 mostram que o material semitransparente se comporta como um material opaco quando as fronteiras são totalmente refletivas. Por isso, recomenda-se que amostras de materiais semitransparentes sejam pintadas com ouro, caso um modelo puramente difusivo seja usado na identificação da difusividade térmica.



*Figura 6.1.16: Efeito da refletividade das fronteiras sobre a variação de temperatura na face inferior de um MST submetido a um pulso laser.*

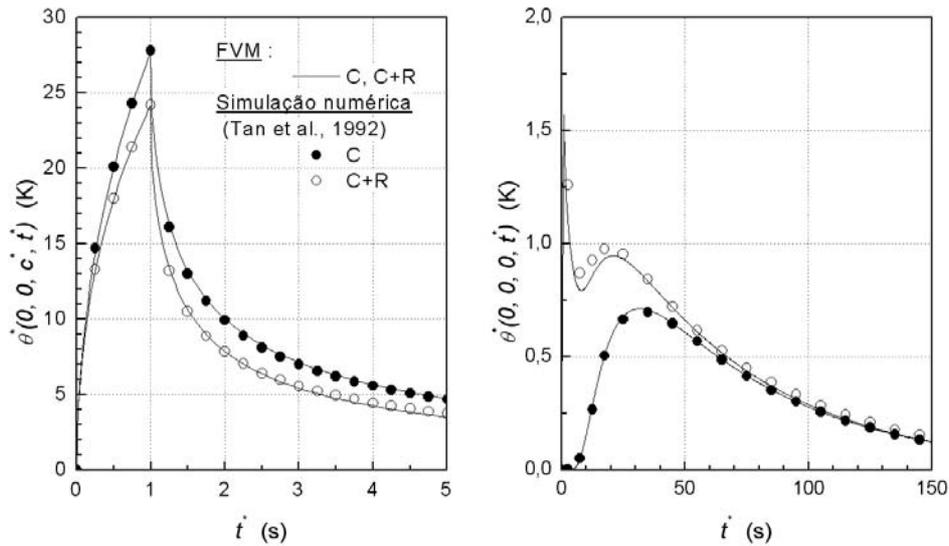
Quando as fronteiras são perfeitamente refletivas, e por conseqüência não emitem, não há mais salto de temperatura responsável pela troca de calor entre as superfícies. Também, a radiação emitida pelo próprio material não é absorvida pelas fronteiras, isto é, o termograma tem um comportamento típico de difusão de calor. Nestes exemplos, o método FVM explícito tem excelente concordância de resultados com o método de Quadrípolos térmicos implementado por André e Degiovanni [34], apesar do valor unitário do albedo e da refletividade da fronteira.

No último teste de validação do problema direto, o comportamento térmico de um material semitransparente não espalhante e não cinza, de comportamento espectral dado na tabela 6.1.2 é investigado. A dimensão da placa, o valor do fluxo de calor, a condutividade térmica e a capacidade térmica volumétrica são dados na seção 6.1.2 de validação do problema condutivo. O material, dentro de uma câmara de vácuo, é pintado de grafite preto para qualquer valor de comprimento de onda, e troca calor com o ambiente ocorre somente por radiação ( $h^{rad*} \approx 4\sigma T_0^{*4}$ ). A temperatura inicial da placa e a temperatura das fronteiras da cavidade são respectivamente levadas a 1000 K.

*Tabela 6.1.2: Propriedades radiativas do material de validação não cinza.*

$\lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	$n_r$	$\rho_\lambda$	$\kappa_{a\lambda}^*$ ( $\text{m}^{-1}$ )
0.5-2.7	1.5	0	10
2.7-4.5	1.5	0	1000
4.5-40.0	2.3	0	10000

Apresenta-se na figura 6.1.17 a variação da temperatura  $\theta^*(t^*) = T^*(t^*) - T_0^*$  no centro da face aquecida e no centro da face não aquecida. Nota-se que os resultados obtidos durante a validação do problema condutivo, na seção 6.1.2, são reproduzidos na figura 6.1.17 sobre a denominação “C”, a denominação “C+R” sendo representativa dos resultados onde ocorreu o acoplamento com a radiação. A figura 6.1.17 revela a excelente concordância entre os resultados obtidos pelo método FVM explícito e o método Ray-Tracing implementado por Tan *et al.* [31], tanto na face aquecida quanto na face não aquecida, mesmo usando um modelo cinza por banda.

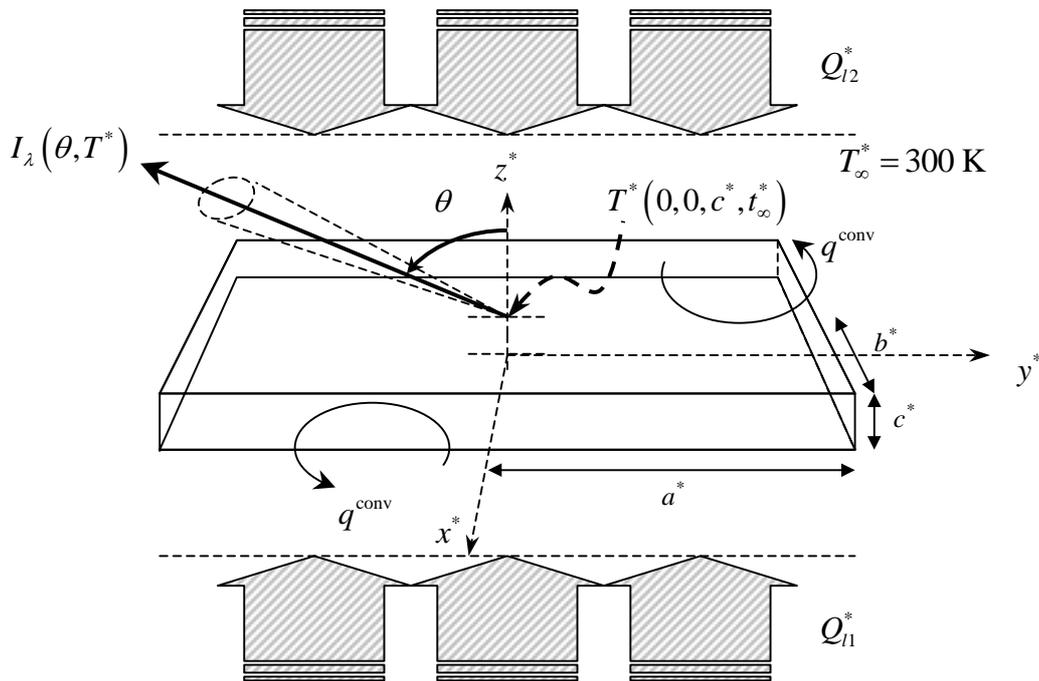


*Figura 6.1.17: Termograma na face superior e na face inferior de um MST não cinza e não espalhante submetido a um pulso laser.*

Desta forma, consideramos validado o programa desenvolvido para coordenadas cartesianas em 3D. Portanto, podemos prosseguir ao cálculo dos coeficientes de sensibilidade, visando à solução do problema inverso de estimativa de parâmetros.

## 6.2 Simulação Numérica do Fator de Emissão e do Campo de Temperatura

A simulação do fator de emissão é realizada através da solução do problema direto definido na seção 3.4. Quando a amostra entra em regime permanente, o fluxo radiativo direcional saindo da posição  $(0, 0, c^*)$  é comparado ao fluxo radiativo direcional emitido por um corpo negro levado à temperatura idêntica da do ponto  $(0, 0, c^*)$ . A figura 6.2.1 mostra o corpo de prova e as condições experimentais referentes ao dispositivo experimental 2.



*Figura 6.2.1: Amostra de cerâmica.*

Uma malha de refinamento  $(N_x \times N_y \times N_z) \times N_t = (25 \times 25 \times 25) \times 160$  foi usada para resolver o sistema de equações.

### 6.2.1 Predição do fator de emissão espectral e direcional

O material usado para a simulação do fator de emissão possui as características de uma alumina Al23 a temperatura 2000 K. O material é suposto ser constituído de partículas esféricas de tamanho único, de raio 20  $\mu\text{m}$ , sendo a fração volumétrica  $f_v = 0.7$ . A capacidade térmica volumétrica foi escolhida de  $C^* = 2.5 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$  para

esta temperatura e a condutividade térmica, de  $k^* = 5 \text{ W/m.K}$  para todas as direções [129].

O espectro de emissão da alumina foi discretizado em 8 bandas, número considerado suficiente para levar em conta as irregularidades e variações do comportamento emissivo no infravermelho. Em cada banda, as propriedades óticas e radiativas são consideradas constantes. A largura das bandas foi estabelecida em função da variação das propriedades óticas. Quando uma variação importante de coeficiente de absorção é observada num intervalo do espectro infravermelho, este intervalo é discretizado em várias bandas estreitas. As propriedades médias são avaliadas segundo o modelo do coeficiente de absorção médio de Rosseland [32,128], dado pela equação (6.2.1), onde  $\alpha$  pode ser o coeficiente de absorção radiativo, o coeficiente de espalhamento radiativo, o fator de assimetria ou ainda o índice de refração.

$$\frac{1}{\alpha_m} = \frac{\int_{\lambda=\lambda_m^-}^{\lambda_m^+} \frac{1}{\alpha_\lambda} \frac{dI_{b\lambda}(T)}{dT} d\lambda}{\int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{dI_{b\lambda}(T)}{dT} d\lambda} \quad (6.2.1)$$

Os limites  $\lambda_m^-$  e  $\lambda_m^+$  da banda  $m$  são escolhidos de maneira em que as propriedades radiativas médias nesta banda possam coincidir com as propriedades radiativas para o comprimento de onda de interferência de um filtro do radiômetro. Por exemplo, para uma banda  $m$  centrada em  $\lambda = 3 \mu\text{m}$ , os limites superior  $\lambda_m^+ = 3.7 \mu\text{m}$  e inferior  $\lambda_m^- = 2.7 \mu\text{m}$  são escolhidos porque o valor do coeficiente médio de absorção nesta banda  $\kappa_{a(m=2)}$  corresponde ao coeficiente de absorção para o comprimento de onda  $3 \mu\text{m}$   $\kappa_{a\lambda(\lambda=3\mu\text{m})}$ . Para discretizar o espectro adequadamente, é preciso previamente calcular as propriedades radiativas do meio pela teoria de Mie. A solução da teoria de Mie depende totalmente da função dielétrica (índice de refração complexo ao quadrado) introduzida.

Um modelo de predição da função dielétrica [50] baseado no modelo do oscilador de Lorentz e corrigido de um termo de relaxação foi introduzido para simular o fator de emissão de aluminas a altas temperaturas. O modelo depende de parâmetros específicos que variam em função da composição química do material e da temperatura. Para simular a função dielétrica da alumina, os parâmetros do oscilador foram determinados para o monocristal de safira a 2007 K. A função dielétrica entra depois como informação para a teoria de Mie junto com outras informações a respeito da estrutura

microscópica do material, ou seja, a fração volumétrica e o raio das partículas esféricas. O índice de refração médio assim como as propriedades radiativas médias são apresentados na tabela seguinte:

*Tabela 6.2.1: Propriedades radiativas da alumina Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> previstas pela teoria de Mie.*

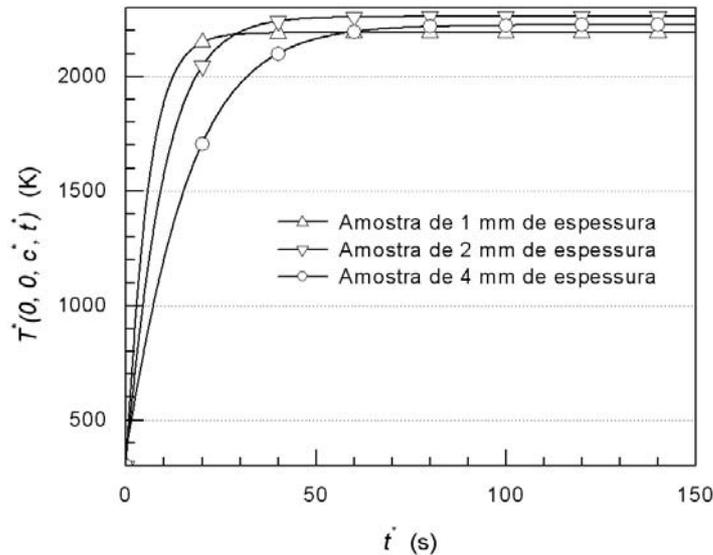
$m$	Faixa de comprimentos de onda ( $\mu\text{m}$ )	Coefficiente de absorção $\kappa_{am}$ médio ( $\text{m}^{-1}$ )	Coefficiente de espalhamento médio $\sigma_{sm}$ ( $\text{m}^{-1}$ )	Fator de assimetria $g_m$ (Função de fase Henyey-Greenstein)	Parte real do índice de refração $n_r$ calculado	Parte complexa do índice de refração $k_r$ calculado
1	$0.5 \leq \lambda < 2.7$	0.2	54 595	0.736	1.656	$7.282 \times 10^{-9}$
2	$2.7 \leq \lambda < 3.7$	8	56 607	0.700	1.633	$1.435 \times 10^{-6}$
3	$3.7 \leq \lambda < 4.7$	145	55 782	0.724	1.600	$4.387 \times 10^{-5}$
4	$4.7 \leq \lambda < 5.7$	1 237	54 241	0.708	1.555	$4.449 \times 10^{-4}$
5	$5.7 \leq \lambda < 6.7$	5 151	48 416	0.688	1.494	$2.319 \times 10^{-3}$
6	$6.7 \leq \lambda < 9.3$	12 671	52 890	0.710	1.307	$7.745 \times 10^{-3}$
7	$9.3 \leq \lambda < 11.5$	19 686	15 089	0.813	0.949	$5.251 \times 10^{-2}$
8	$11.5 \leq \lambda < 50.0$	16 514	55 348	0.561	0.413	1.590

Inicialmente a temperatura ambiente  $T_0^* = T_\infty^* = 300 \text{ K}$ , a amostra de cerâmica é aquecida por dois fluxos de repartição energética homogênea e de potência respectiva  $Q_{l1}^*$  e  $Q_{l2}^*$ , em suas faces principais  $\Gamma_5$  e  $\Gamma_6$ . Em situação experimental ideal,  $Q_{l1}^*$  e  $Q_{l2}^*$  são idênticos. A altas temperaturas, as superfícies da amostra trocam calor com o meio ambiente por convecção natural ( $h^* = 50 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ) e por radiação (emissão e reflexão nas fronteiras  $\Gamma_5$  e  $\Gamma_6$ ). Três espessuras diferentes da amostra são investigadas: 1 mm, 2 mm e 4 mm. As três amostras têm dimensões laterais idênticas, ou seja,  $2a^* = 1 \text{ cm}$  e  $2b^* = 1 \text{ cm}$ .

O volume das amostras sendo diferente, a potência necessária para aquecer cada uma delas a temperatura 2200 K varia de acordo com a espessura. Para atingir este nível de temperatura, é necessário aquecer a amostra de 1 mm de espessura com uma potência total de  $(Q_{l1}^* + Q_{l2}^*) = 70 \text{ W}$ . Para aquecer as amostras de 2 mm e de 4 mm de espessura, é necessário regular a potência total a 85 W e 100 W respectivamente. Os níveis de potência foram obtidos por simulação sucessiva do código computacional até a obtenção da temperatura final desejada. Foi notado, porém, uma extrema sensibilidade da potência administrada com relação ao espectro de absorção do material. Isto mostra a importância da discretização adotada para definir corretamente o espectro de absorção

do material. O coeficiente de absorção condiciona diretamente as perdas de calor por radiação a partir da superfície externa ou a partir do volume.

A figura 6.2.2 mostra a extensão do período de aquecimento para as três amostras de alumina:



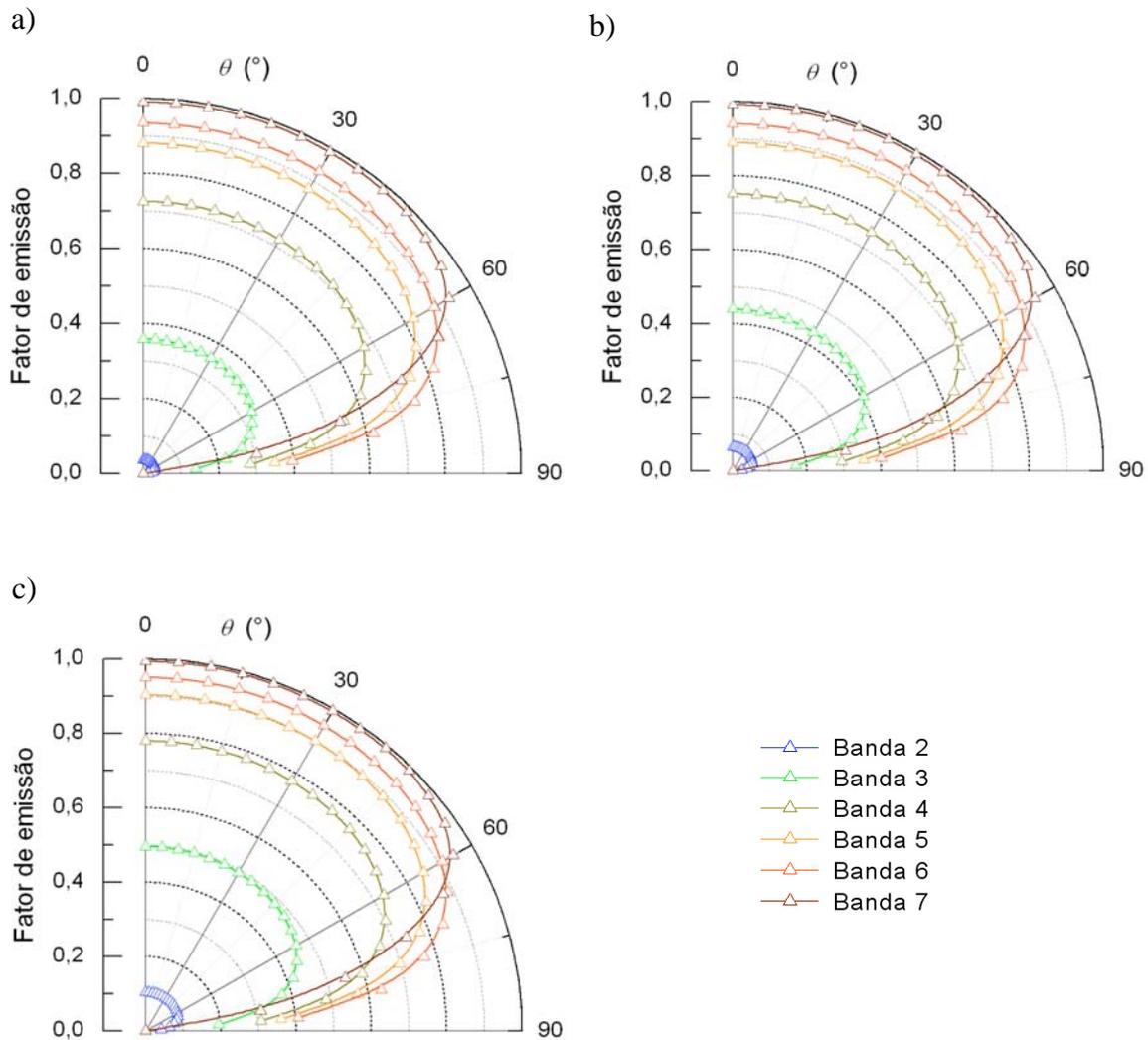
*Figura 6.2.2: Evolução da temperatura das amostras de alumina Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> em função do tempo.*

A figura 6.2.2 mostra que um tempo de 50 s, 100 s e 150 s é respectivamente necessário para as amostras de 1 mm, 2 mm e 4 mm atingirem o regime permanente. A determinação do tempo de aquecimento das amostras é essencial para realizar medições experimentais válidas.

Durante a experimentação, a intensidade radiativa saindo do corpo de prova é medida por radiometria. Outra medição da intensidade radiativa emitida por um corpo negro levado à mesma temperatura é depois realizada. Das duas medições, obtém-se o fator de emissão que depende da temperatura do meio, do ângulo de observação, do comprimento de onda e da espessura geométrica do corpo de prova, pois a radiação é emitida pelo volume inteiro. O fator de emissão pode ser calculado numericamente da forma seguinte:

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda(\tau_0, \theta, T) = \frac{I_\lambda(\tau_0, \theta, T)}{I_{b\lambda}(T)} \quad (6.2.2)$$

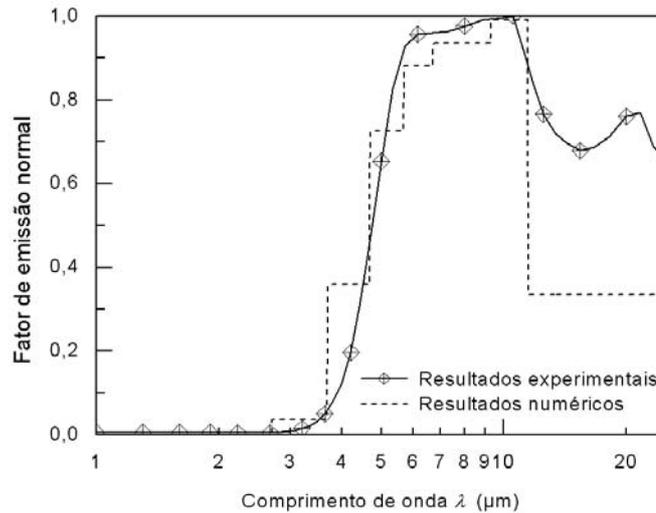
A figura 6.2.3 mostra um exemplo de fator de emissão espectral e direcional calculado numericamente para três amostras de espessura 1 mm, 2 mm e 4 mm:



*Figura 6.2.3: Fator de emissão espectral e direcional de amostras de alumina de espessura a)  $c^* = 1 \text{ mm}$ , b)  $c^* = 2 \text{ mm}$  e c)  $c^* = 4 \text{ mm}$ .*

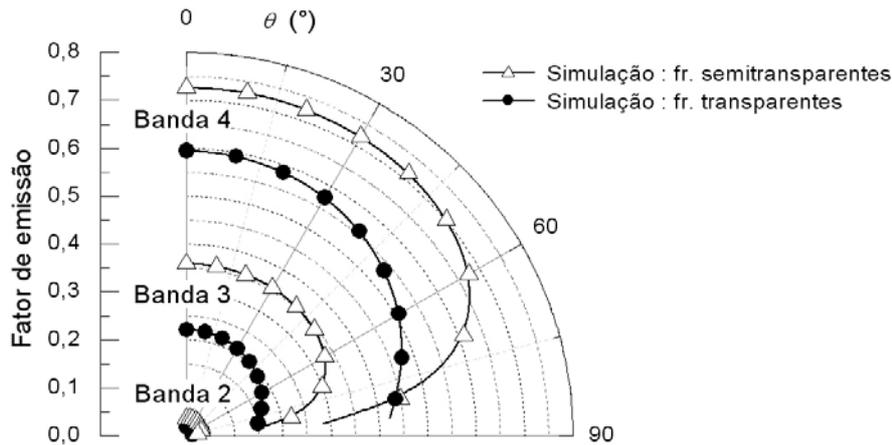
A figura 6.2.3 mostra que o fator de emissão varia pouco com a espessura a não ser nas bandas 2, 3 e 4, onde o comprimento de onda varia entre  $2.7 \mu\text{m}$  e  $5.7 \mu\text{m}$ . Esta faixa de frequência corresponde a um aumento brutal do coeficiente de absorção, como pode ser visto na tabela 6.2.1. O fator de emissão normal na banda 3 ( $\bar{\lambda} = 4 \mu\text{m}$ ) aumenta de 0.36 para 0.49 com o aumento da espessura da amostra de 1 mm a 4 mm. O fator de emissão, por depender muito do coeficiente de absorção, depende do

comprimento de onda. Para  $\lambda < 3 \mu\text{m}$ , o fator de emissão é próximo de zero: o material não absorve nesta faixa do espectro. Para  $6 \mu\text{m} < \lambda < 11 \mu\text{m}$ , o fator de emissão é próximo de 1: o material absorve toda radiação recebida nesta faixa do espectro. De um modo geral, o comportamento emissivo das aluminas é bastante irregular. Um exemplo de comportamento das aluminas é mostrado na figura 6.2.4 seguinte [50]:



*Figura 6.2.4: Fator de emissão espectral e normal para uma amostra de alumina Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> de espessura  $c^* = 1 \text{ mm}$  a 2000 K [50].*

Com respeito à distribuição direcional do fator de emissão, um comportamento quase-isotrópico representativo do comportamento em emissão de um dielétrico foi obtido. Para as bandas de comprimentos de onda de 2 a 6, o fluxo radiativo é emitido de maneira isotrópica nas direções de observação variando de  $0^\circ$  até  $70^\circ$ , seguido de uma forte diminuição nas direções rentes à superfície. A diminuição é causada pelo aumento da refletividade especular da interface  $\rho'_\lambda(\theta_r)$ . Na faixa espectral 3-8  $\mu\text{m}$  (bandas 2-6), a parte real do índice de refração é superior à unidade. Por esta razão, a caracterização das superfícies do corpo de prova por fronteiras semitransparentes modifica o resultado obtido para o fator de emissão espectral e direcional, como o revela a comparação de resultados obtidos numericamente com fronteiras transparentes e fronteiras semitransparentes na figura 6.2.5:



*Figura 6.2.5: Fator de emissão espectral e direcional para uma amostra de alumina de espessura  $c^* = 1 \text{ mm}$  considerando a) fronteiras transparentes e b) fronteiras semitransparentes.*

A curva referente à banda 7 ( $\bar{\lambda} = 10 \mu\text{m}$ ) se distingue das outras pela diminuição antecipada da emissão radiativa a partir do ângulo  $60^\circ$ . De fato, toda radiação emitida pela amostra atravessando a fronteira é refratada quando  $10 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 16 \mu\text{m}$ , o ar sendo mais refringente que a alumina. Nenhum fenômeno de reflexão pode acontecer qualquer direção que seja. Por isso, a curva de fator de emissão direcional referente à banda 7 ( $\bar{\lambda} = 10 \mu\text{m}$ ) se situa em cima das outras.

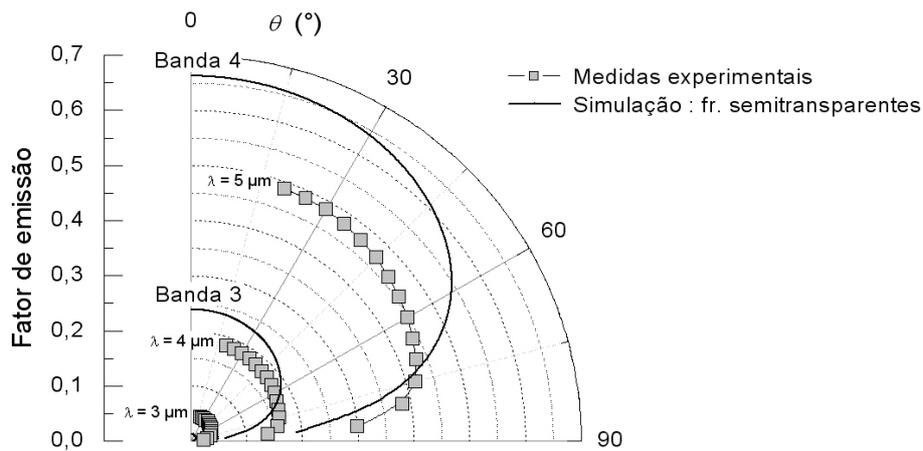
A comparação entre os resultados experimentais obtidos para uma alumina Al25 a 2150 K [129] e os resultados simulados com fronteiras semitransparentes mostra bem o fenômeno de atenuação da emissão nas direções rentes a superfície causado pela utilização no modelo de fronteiras semitransparentes. As propriedades óticas e radiativas usadas para simular o comportamento em emissão da alumina Al25 são mostradas na Tabela 6.2.2. A análise dos resultados da figura 6.2.6 mostra que o fenômeno de atenuação nas direções rentes a superfície é mais importante nos resultados da simulação que nos resultados experimentais [129]. Apesar do modelo de fronteiras semitransparentes ser correto para definir as fronteiras, estas foram representadas como perfeitamente lisas. Na prática, o corpo de prova possui faces rugosas; as rugosidades são visíveis somente com um microscópio. A introdução de fronteiras rugosas no modelo tenderia a homogeneizar a distribuição direcional da emissão, fazendo que a atenuação seja suavizada e então com uma distribuição mais homogênea. Portanto, novas leis de Fresnel devem ser usadas para fronteiras rugosas.

*Tabela 6.2.2: Propriedades radiativas da alumina Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> previstas pela teoria de Mie.*

$m$	Faixa de comprimentos de onda ( $\mu\text{m}$ )	Coefficiente de absorção $\kappa_{am}$ médio ( $\text{m}^{-1}$ )	Coefficiente de espalhamento médio $\sigma_{sm}$ ( $\text{m}^{-1}$ )	Fator de assimetria $g_m$ (Função de fase Henyey-Greenstein)	Parte real do índice de refração $n_r$ calculado	Parte complexa do índice de refração $k_r$ calculado
1	$0.5 \leq \lambda < 2.7$	0.4	22 324	0.759	1.656	$7.282 \times 10^{-9}$
2	$2.7 \leq \lambda < 3.7$	7	21 629	0.763	1.633	$1.435 \times 10^{-6}$
3	$3.7 \leq \lambda < 4.7$	152	22 027	0.756	1.600	$4.387 \times 10^{-5}$
4	$4.7 \leq \lambda < 5.7$	1 103	20 635	0.776	1.555	$4.449 \times 10^{-4}$
5	$5.7 \leq \lambda < 6.7$	3 934	17 553	0.813	1.494	$2.319 \times 10^{-3}$
6	$6.7 \leq \lambda < 9.3$	7 288	16 530	0.879	1.307	$7.745 \times 10^{-3}$
7	$9.3 \leq \lambda < 11.5$	9 522	10 564	0.926	0.949	$5.251 \times 10^{-2}$
8	$11.5 \leq \lambda < 50.0$	4 617	20 061	0.605	0.413	1.590

Uma diferença de amplitude é observada entre o fator de emissão medido e o fator de emissão simulado na figura 6.2.6. Esta diferença é em primeiro lugar causada pela discrepância entre os coeficientes de absorção avaliados nas bandas 2, 3 e 4 e os coeficientes de absorção exatos para os comprimentos de onda 3, 4 e 5  $\mu\text{m}$ . O aumento da discrepância é ainda facilitado na faixa onde o coeficiente de absorção aumenta brutalmente. Em segundo lugar, não existem dados relacionados à caracterização da função dielétrica da alumina a 2200 K, onde fenômenos “pré-fusão” [50] importantes aparecem. Os fenômenos pré-fusão tendem a aumentar consideravelmente a absorção no infravermelho próximo ( $\lambda < 5 \mu\text{m}$ ), antes do ponto de fusão. A função dielétrica da safira calculada à 2007 K foi utilizada a fim de calcular as propriedades radiativas da alumina a 2200 K. Por esta razão, a elevação do fator de emissão causados por fenômenos pré-fusão não aparecem na simulação, figura 6.2.6.

Os resultados para o fator emissão espectral e direcional foram simulados para a alumina Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. No entanto, é necessário investigar se as condições experimentais relativas ao experimento 2 conduzem a obtenção de um campo de temperatura uniforme no corpo de prova. Efetivamente, a definição do fator de emissão para um material semitransparente só é válida quando a temperatura é uniforme. Se algum gradiente de temperatura na amostra existir, este não deve afetar a intensidade radiativa saindo da posição  $(0, 0, c^*)$ . Na bancada experimental 2, dois feixes de repartição energética quadrado e supostos idênticos atingem a amostra. Supondo que a espessura das amostras seja da ordem do milímetro, um campo uniforme de temperatura é esperado. Isto ainda precisa ser verificado.



*Figura 6.2.6: Fator de emissão espectral e direcional medido para uma amostra de alumina Al25 de espessura  $c^* = 1 \text{ mm}$  a 2150 K e simulado com fronteiras semitransparentes.*

O objetivo do estudo a seguir é mostrar o campo de temperatura obtido durante a simulação do fator de emissão. Dependendo da importância do gradiente de temperatura obtido, se houver, este gradiente deverá ser quantificado assim como deverá ser quantificada a influência deste sobre o fator de emissão. Finalmente, este estudo permitirá determinar as condições experimentais para a medição do fator de emissão com o uso do experimento 2.

### 6.2.2 Influência do campo de temperatura interno não-uniforme sobre o fator de emissão espectral

A geração de um gradiente interno de temperatura pode se iniciar de dois fenômenos discutidos aqui:

- a) Apesar do aquecimento bilateral ser suposto perfeitamente equilibrado e simétrico, de repartição energética homogênea, as condições na fronteira, principalmente a condição de fronteira semitransparente radiativa, podem conduzir à geração de um gradiente interno de temperatura.
- b) Os dois canais da bancada experimental podem ficar desequilibrados, conduzindo a um aquecimento não simétrico da amostra.

Esta seção mostra a influência de um possível desequilíbrio de fluxo entre os canais  $Q_{l1}^*$  e  $Q_{l2}^*$  sobre o fator de emissão. O desequilíbrio pode acontecer devido a uma alteração do revestimento dos espelhos ouro, das lentes ZnSe, ou da lâmina separadora. Para esta análise,  $Q_{l2}^*$  é uma potência fixa e  $Q_{l1}^*$  diminui gradualmente de 100 % até 75% o valor de  $Q_{l2}^*$ , com passo de 5 %. A repartição espacial energética dos canais é quadrada.

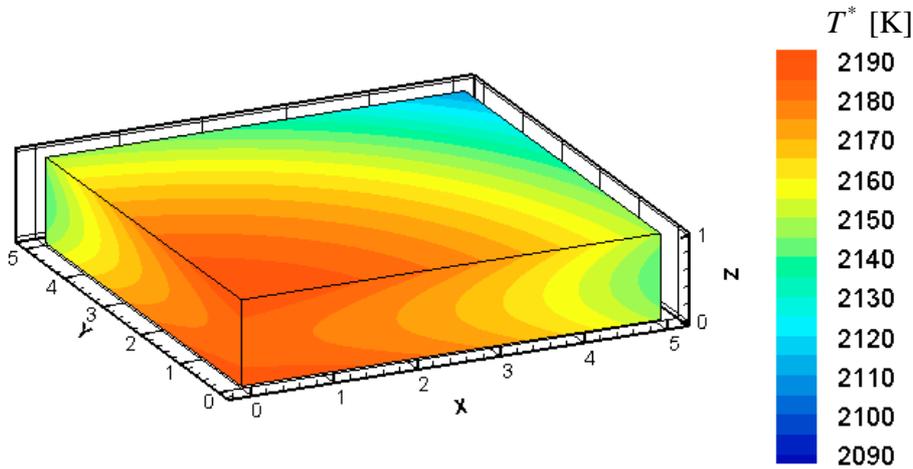
A variação da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  é apresentada de maneira a quantificar o gradiente interno de temperatura. Depois, o fator de emissão obtido a partir da solução do problema acoplado é comparado ao fator de emissão obtido com uma amostra de temperatura homogênea. A temperatura homogênea de amostra escolhida para calcular o fator de emissão ideal é idêntica à do ponto  $(0, 0, c^*)$  da amostra com temperatura não uniforme. A posição  $(0, 0, c^*)$  corresponde à posição da medida da intensidade por radiometria. A discrepância sobre o fator de emissão é avaliada em função do gradiente interno de temperatura. Os resultados permitirão mostrar quais valores limites da espessura do corpo de prova e de desequilíbrio entre os canais poderão ser aceitos para a realização do experimento.

#### 6.2.2.1 Simulação do campo de temperatura e de fator de emissão para uma amostra de alumina Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> de 1mm de espessura

Nesta seção, a influência do campo não homogêneo de temperatura sobre o fator de emissão é estudada para o caso de uma amostra de 1 mm de espessura. O estudo se baseia, na primeira parte, sobre condições ideais de experimentação sem nenhum desequilíbrio entre os canais. O objetivo é investigar o efeito das condições de contorno sobre a solução em termo de campo de temperatura. Em segunda parte do estudo, o desequilíbrio entre os canais é simulado. As consequências do desequilíbrio são mostradas através da representação sistemática da variação de temperatura no eixo  $(0, 0, c^*)$  e da discrepância obtida sobre o fator de emissão.

◆ **Influência do gradiente interno de temperatura:**

A figura 6.2.7 mostra o campo de temperatura obtido para a amostra de 1 mm de espessura. A representação do campo de temperatura ao longo do eixo central  $(0, 0, z^*)$  é mostrada na figura 6.2.8.a). Os canais são simétricos. A temperatura calculada adota um perfil parabólico, ou seja, a solução do problema de acoplamento condução-radiação 3D não fornece a distribuição homogênea de temperatura esperada. Na verdade, o gradiente de temperatura é gerado pela variação azimutal do fluxo radiativo interno. Este não parece significativo quando comparado à temperatura absoluta da amostra: a diferença máxima de temperatura atinge 8 K, o que corresponde a uma diferença de 0.37 % da temperatura no ponto de medida (2190 K). No entanto, prefere-se prosseguir a análise do impacto do gradiente sobre o fator de emissão.



*Figura 6.2.7: Campo de temperatura na amostra de alumina de espessura  $c^* = 1$  mm.  $Q_{l1}^* = Q_{l2}^*$ .*

A figura 6.2.8.b) mostra a discrepância expressada em % sobre o fator de emissão. Para sua avaliação, equação (6.2.3), o fator de emissão calculado pelo problema acoplado foi comparado ao fator de emissão de uma amostra de temperatura homogênea. A distribuição de temperatura ao longo do eixo central  $(0, 0, z^*)$  da amostra com temperatura homogênea é também mostrada na figura 6.2.8.a).

$$\text{Discrepância (\%)} = \left| \frac{\tilde{\epsilon}_{C+R}(\lambda, \tau_0, \theta, T) - \tilde{\epsilon}_{\text{isotermico}}(\lambda, \tau_0, \theta, T)}{\tilde{\epsilon}_{\text{isotermico}}(\lambda, \tau_0, \theta, T)} \right| \times 100 \quad (6.2.3)$$

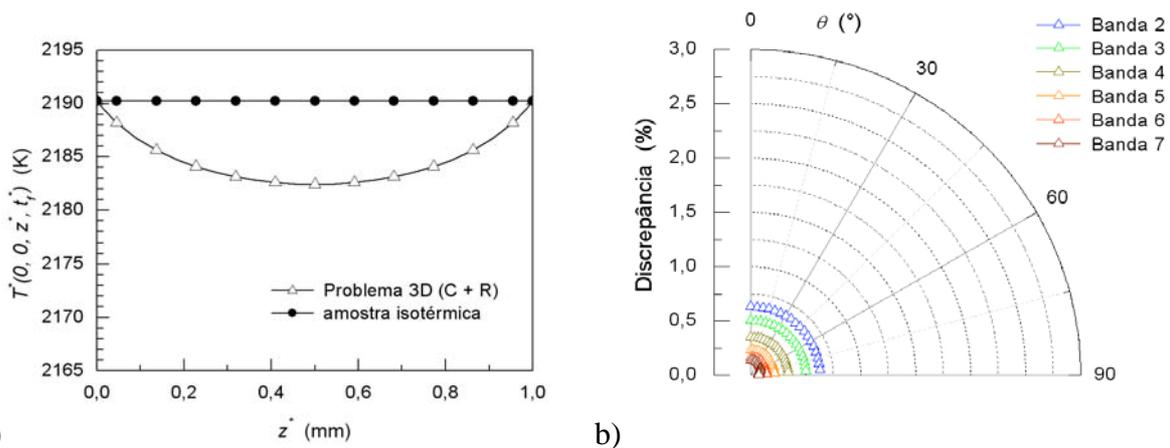
Na figura 6.2.8.b), a discrepância calculada para as bandas 2 e 3 é de apenas 0.7 % e 0.5 % respectivamente. Para  $\lambda \geq 5 \mu\text{m}$  (bandas 4-8), a discrepância é negligível. A

discrepância, que varia em função do comprimento de onda, é distribuída de maneira isotrópica. A sua amplitude é diretamente ligada ao valor do coeficiente de absorção, que é pequeno para  $\lambda \leq 3 \mu\text{m}$ , médio para  $3 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 7 \mu\text{m}$  e elevado para  $\lambda \geq 7 \mu\text{m}$ . Quando o coeficiente de absorção é pequeno e o coeficiente de espalhamento grande, a intensidade radiativa saindo da fronteira integra a radiação emitida a partir do volume inteiro. Ao contrário, para altos valores do coeficiente de absorção, a radiação emitida pelo volume é absorvida imediatamente, inclusive perto das fronteiras. O radiômetro recebe neste caso o fluxo emitido a partir da superfície. Portanto, o gradiente de temperatura é observado de modo implícito pelo radiômetro, principalmente quando o coeficiente de absorção é pequeno.

#### ◆ **Influência do desequilíbrio de fluxo:**

As figuras 6.2.9-13 mostram o campo de temperatura interno e a discrepância sobre o fator de emissão quando a potência  $Q_{l1}^*$  é regulada respectivamente para 95, 90, 85, 80 e 75 % o valor de  $Q_{l2}^*$ . Nota-se que a diferença de temperatura entra as duas fronteiras cresce a medida que  $Q_{l1}^*$  diminui. Esta diferença é de 1.5 K para  $Q_{l1}^* = 0.95 Q_{l2}^*$  e de 8.5 K para  $Q_{l1}^* = 0.75 Q_{l2}^*$ . O gradiente interno de temperatura atinge 12 K quando  $Q_{l1}^* = 0.75 Q_{l2}^*$ . A discrepância sobre o fator de emissão aumenta pouco, sendo o valor máximo de 1.1 % para a banda 2, de 0.8 % para a banda 3 e menor que 0.5 % para  $\lambda \geq 5 \mu\text{m}$  (bandas 4-8). As figuras 6.2.9-13 mostram que o desequilíbrio entre os canais não influencia muito a interna de temperatura, nem a discrepância sobre o fator de emissão. Por outro lado, um desequilíbrio entre os canais gera uma queda generalizada de temperatura na amostra. A temperatura média cai de 2187 K para 2151 K quando  $Q_{l1}^* = 0.95 Q_{l2}^*$ , e cai de 2187 K para 2009 K quando  $Q_{l1}^* = 0.75 Q_{l2}^*$ , ou que corresponde a uma diferença de 180 K. Isto não afeta de maneira significativa o fator de emissão, definido pela razão entre as intensidades emitidas pela amostra e por um corpo negro de temperatura idêntica.

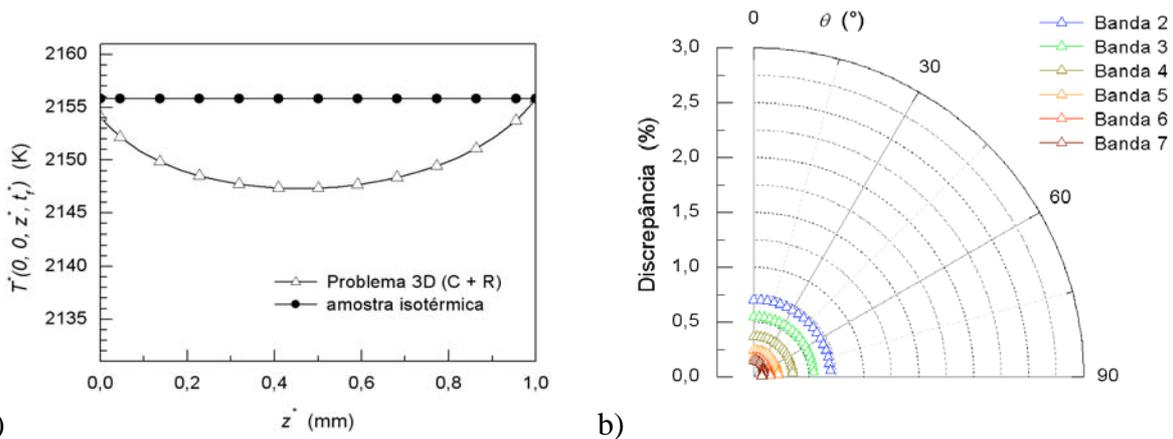
1.1 % sendo a discrepância máxima observada considerando o maior desequilíbrio de fluxo possível, a espessura de 1 mm se revela ótima para a realização do experimento 2 para a medida de fator de emissão de MST. A simulação do gradiente de temperatura é repetida para as amostras de 2 mm e 4 mm de espessura.



a)

b)

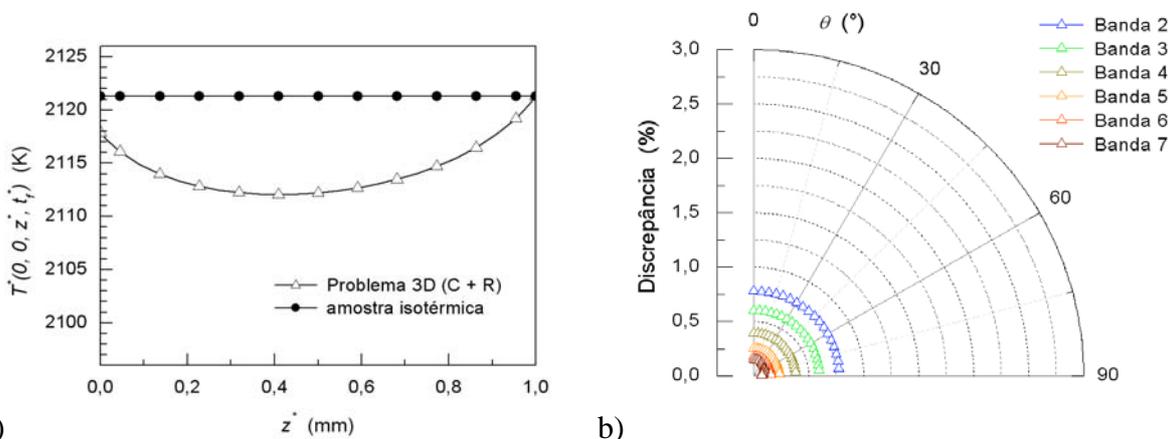
**Figura 6.2.8:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 1 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .



a)

b)

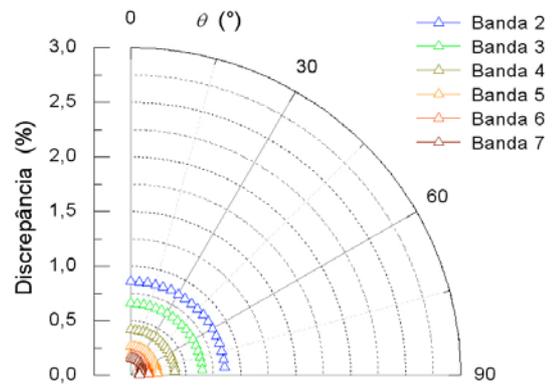
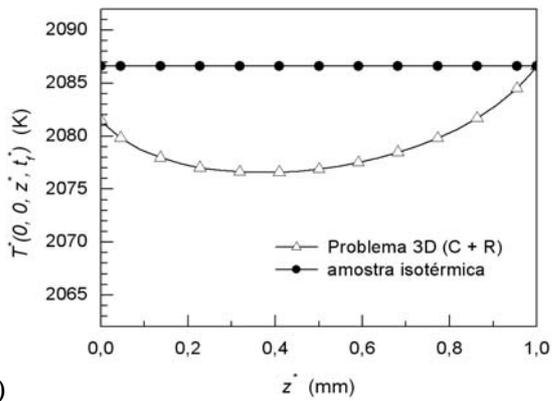
**Figura 6.2.9:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 1 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = 0.95 Q_{12}^*$ .



a)

b)

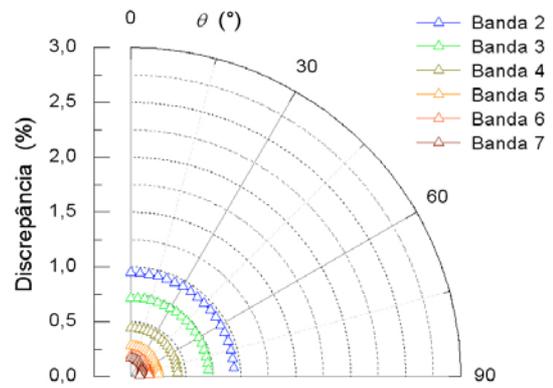
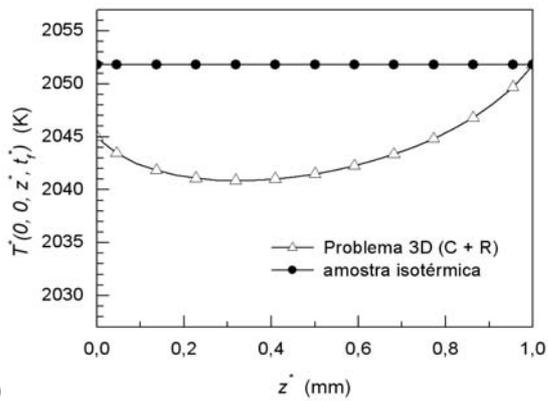
**Figura 6.2.10:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 1 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = 0.90 Q_{12}^*$ .



a)

b)

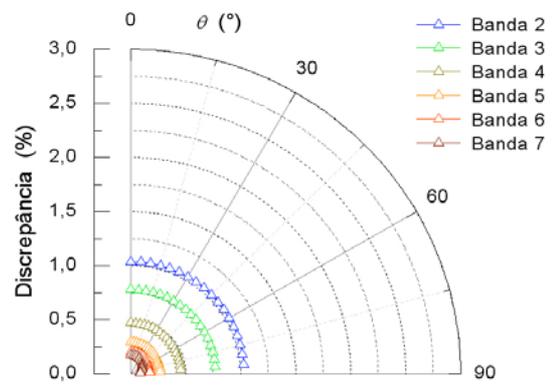
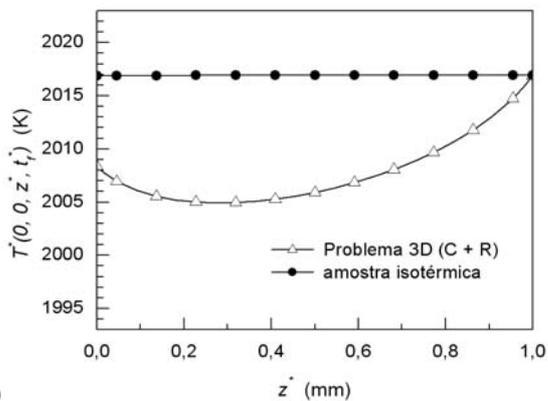
**Figura 6.2.11:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 1 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$ .



a)

b)

**Figura 6.2.12:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 1 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$ .



a)

b)

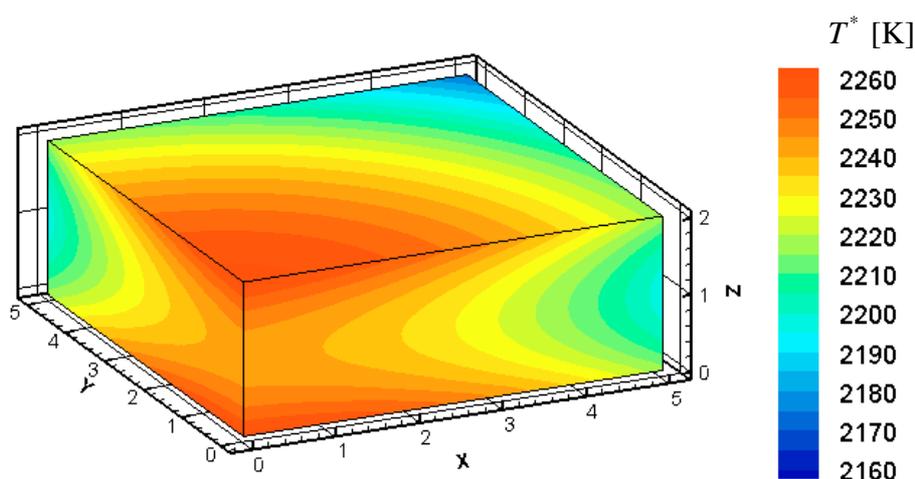
**Figura 6.2.13:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 1 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$ .

### 6.2.2.2 Simulação do campo de temperatura e de fator de emissão para uma amostra de alumina Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> de 2mm de espessura

Da mesma maneira que para a amostra de 1 mm de espessura, a influência das condições de contorno e do desequilíbrio entre os canais sobre o campo de temperatura, e a posteriori sobre o fator de emissão, é investigada para a amostra de 2 mm de espessura em duas partes distintas. A discrepância sobre o fator de emissão predito é mostrada em função das condições experimentais.

#### ◆ **Influência do gradiente interno de temperatura:**

A figura 6.2.14 mostra o campo de temperatura obtido para a amostra de 2 mm de espessura. Uma vista da distribuição de temperatura ao longo do eixo central  $(0, 0, z^*)$  é mostrada na figura 6.2.15.a). O gradiente de temperatura interna simulado é desta vez mais importante que aquele obtido para uma amostra de 1 mm. A diferença de temperatura ao longo do eixo central  $(0, 0, z^*)$  atinge 19 K, o que representa 0.84 % da temperatura absoluta no ponto de medida (2261 K). A discrepância sobre o fator de emissão, mostrada na figura 6.2.15.b), cresce conseqüentemente. O aumento da discrepância parece proporcional ao gradiente interno de temperatura: seu valor atinge 1.4 % para a banda 2, 1 % para a banda 3 e menor que 0.7 % para as bandas 4-8. A discrepância é novamente distribuída de maneira isotrópica.



*Figura 6.2.14: Campo de temperatura na amostra de alumina de espessura  $c^* = 2$  mm.  $Q_{l1}^* = Q_{l2}^*$ .*

◆ **Influência do desequilíbrio de fluxo:**

O efeito do desequilíbrio entre canais sobre a temperatura e o fator de emissão é mostrado nas figuras 6.2.16-20. À medida que  $Q_{i1}^*$  diminui, o gradiente interno de temperatura e a discrepância simulada sobre o fator de emissão aumentam. Ao observar a figura 6.2.20, a diferença de temperatura no eixo  $(0, 0, z^*)$  atinge 29 K para  $Q_{i1}^* = 0.75 Q_{i2}^*$ , resultando em uma discrepância sobre o fator de emissão de 2.2 % para a banda 2. Com uma discrepância de mais de 2 % em parte do espectro, a amostra de 2 mm de espessura só pode ser utilizada em condições ideais de experimentação, ou seja, quando os canais são perfeitamente simétricos.

6.2.2.3 Simulação do campo de temperatura e de fator de emissão para uma amostra de alumina Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> de 4mm de espessura

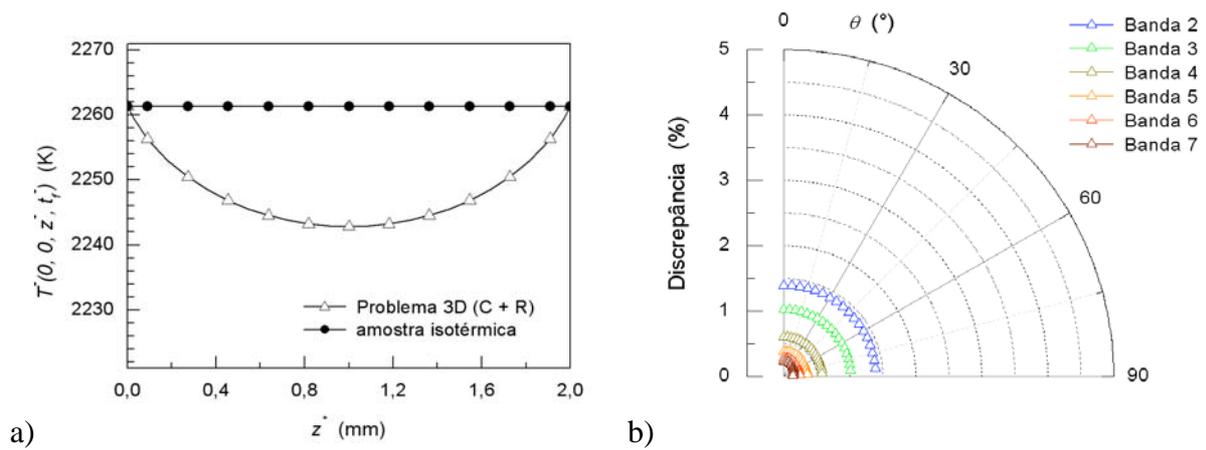
As simulações realizadas nas seções 6.2.2.1-2 mostraram o aumento do gradiente interno de temperatura e da discrepância sobre o fator de emissão causado pelo aumento da espessura da amostra. Conseqüentemente, um gradiente de temperatura importante é esperado no caso da amostra de 4 mm de espessura.

◆ **Influência do gradiente interno de temperatura:**

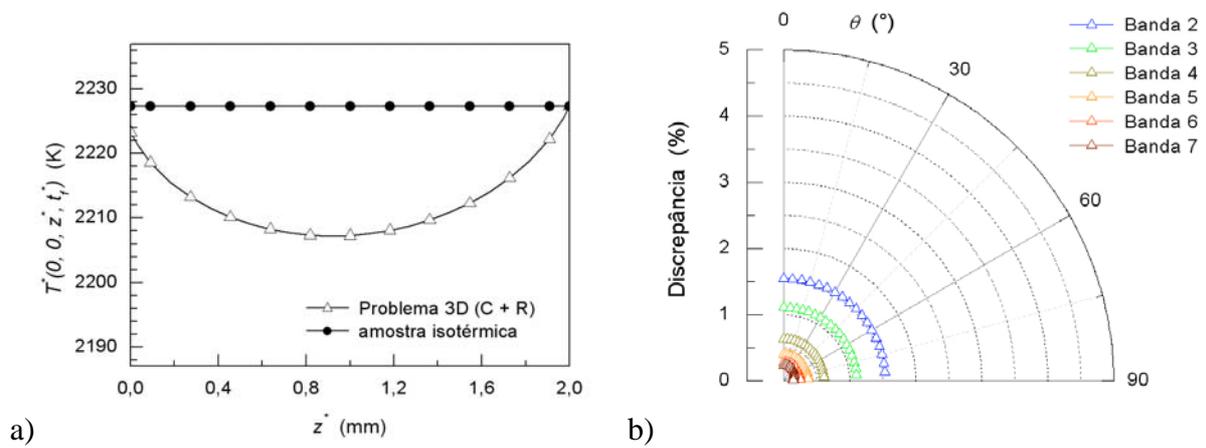
O campo de temperatura obtido para a amostra de 4 mm de espessura é mostrado na figura 6.2.21. A distribuição de temperatura ao longo do eixo central  $(0, 0, z^*)$  é mostrada na figura 6.2.22.a). A diferença máxima de temperatura ao longo do eixo central  $(0, 0, z^*)$  atinge 48 K, o que representa 2.1 % da temperatura absoluta na posição de medida do fator de emissão. O gradiente de temperatura interna é responsável por uma discrepância de 3.4 % sobre o fator de emissão para a banda 2. A discrepância é de 2.2 % para a banda 3 e menor que 1.2 % para as bandas 4-8.

◆ **Influência do desequilíbrio de fluxo:**

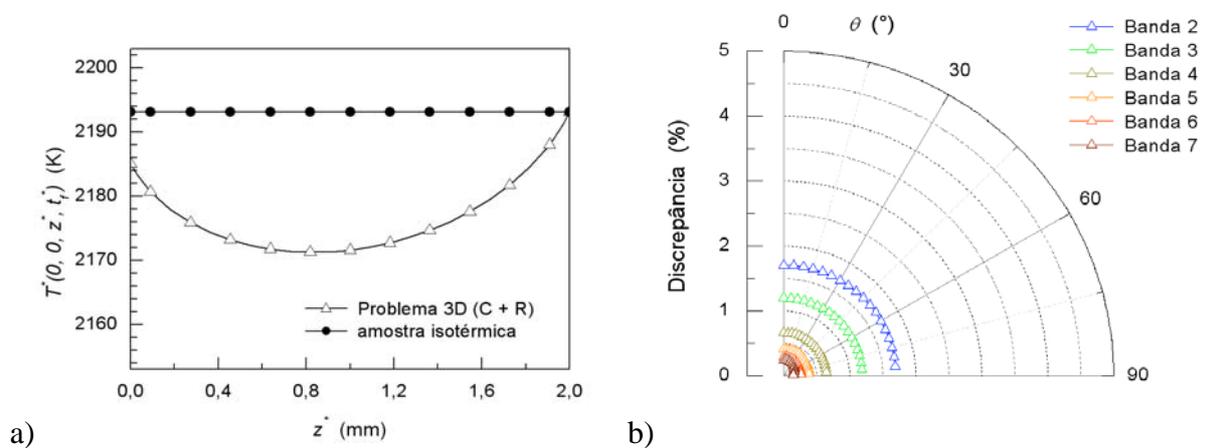
Quando  $Q_{i1}^*$  e  $Q_{i2}^*$  são escolhidos diferentes, o gradiente de temperatura interna atinge 66 K, como mostrado na figura 6.2.27.a). A discrepância sobre o fator de emissão simulado aumenta para 5.1 % o valor do fator de emissão para a banda 2. Para outras bandas do espectro, a discrepância atinge 2.9 % no caso da banda 3 e menos de 1.4 % no caso das bandas 4-8.



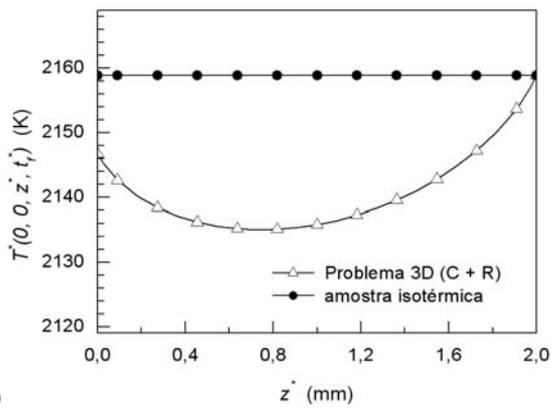
**Figura 6.2.15:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 2 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .



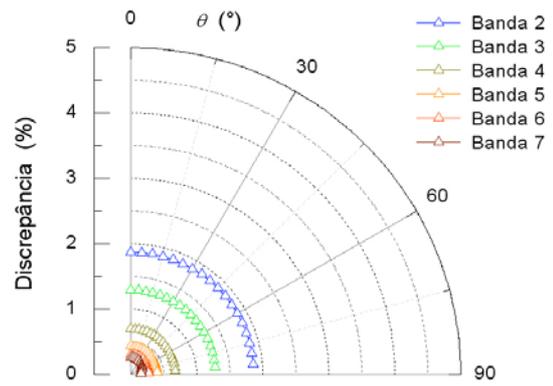
**Figura 6.2.16:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 2 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = 0.95 Q_{12}^*$ .



**Figura 6.2.17:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 2 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = 0.90 Q_{12}^*$ .

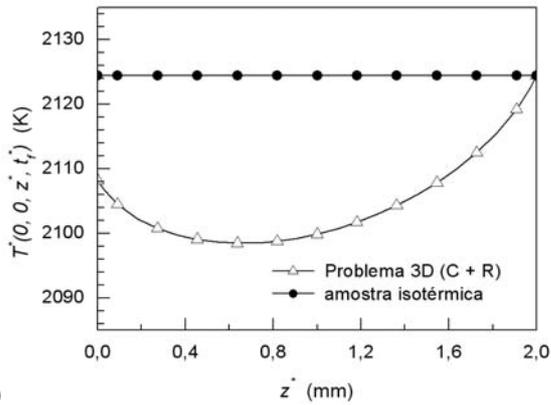


a)

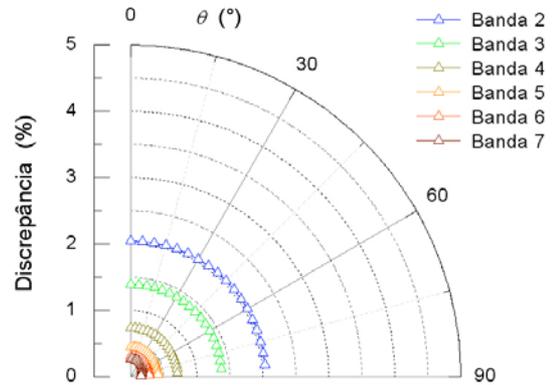


b)

**Figura 6.2.18:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 2$  mm.  $Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$ .

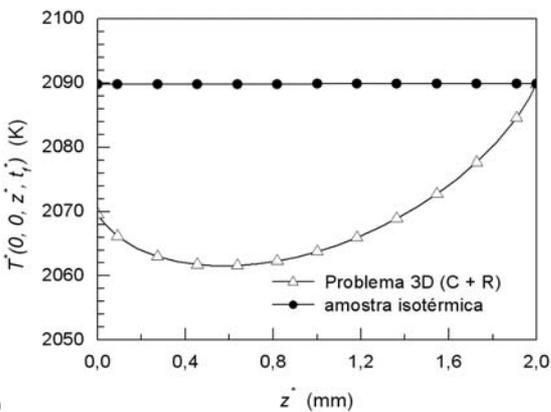


a)

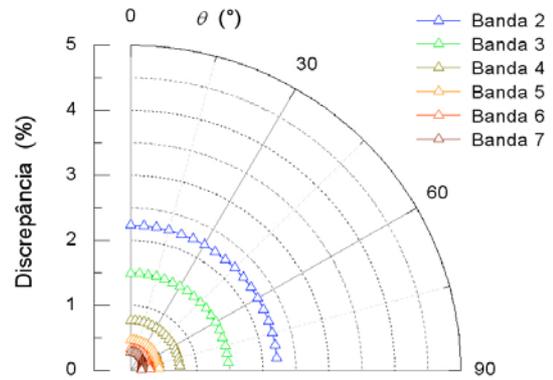


b)

**Figura 6.2.19:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 2$  mm.  $Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$ .

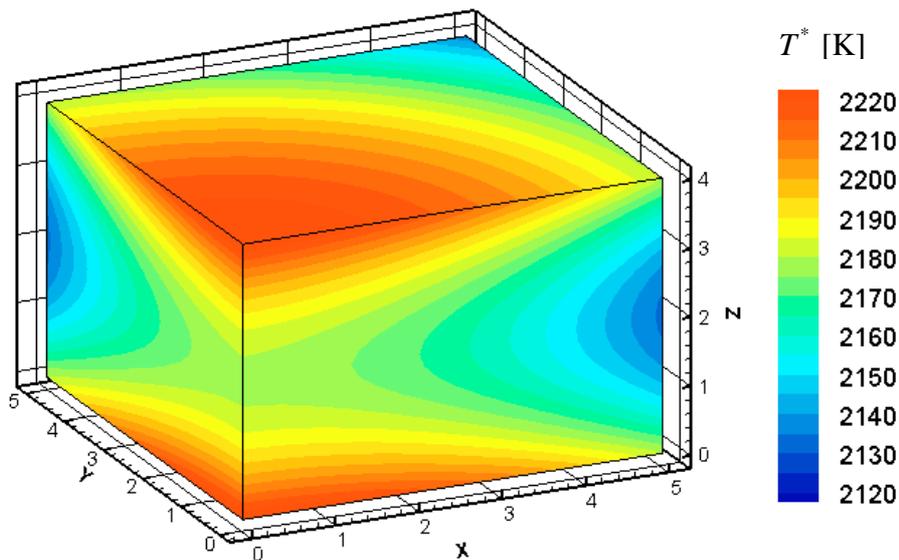


a)



b)

**Figura 6.2.20:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 2$  mm.  $Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$ .

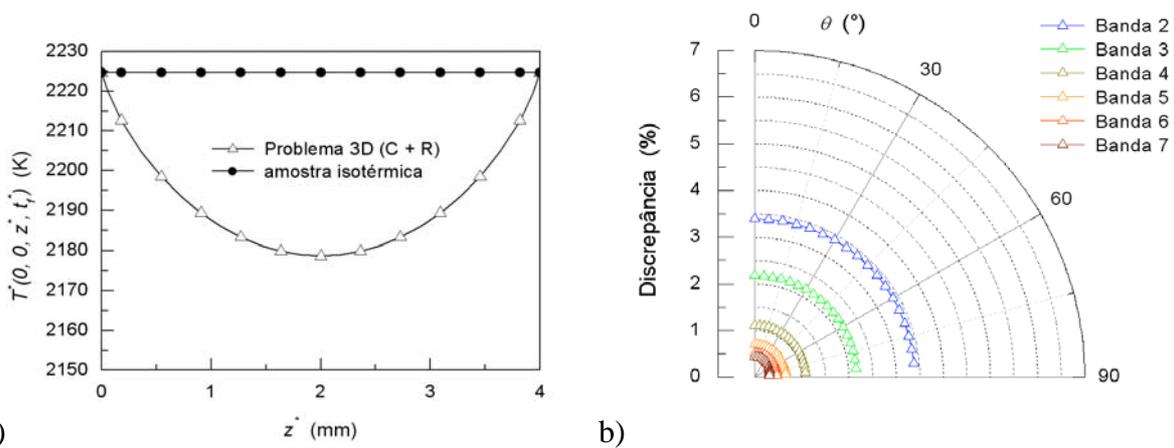


*Figura 6.2.21: Campo de temperatura na amostra de alumina de espessura  $c^* = 4$  mm.  $Q_{l1}^* = Q_{l2}^*$ .*

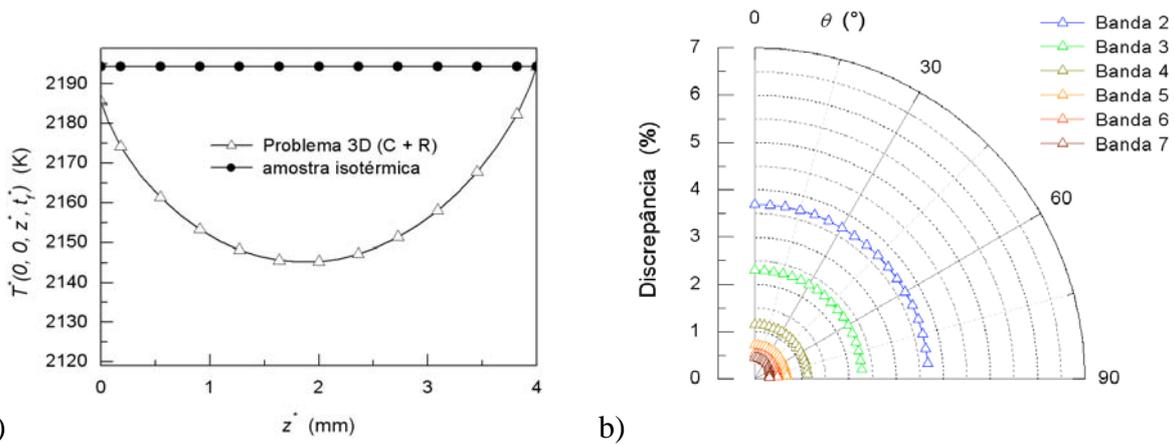
A fonte principal de erro sobre o fator de emissão é o gradiente interno de temperatura gerado pelas condições de contorno radiativas. Infelizmente, as condições assumidas na constituição do problema 2 são corretas do ponto vista científico. O desequilíbrio entre os fluxos recebidos nas faces superior e inferior da amostra tem um impacto até 3 vezes menor sobre a distribuição não homogênea de temperatura.

Para o melhor entendimento do texto, os resultados obtidos para o gradiente de temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  dos corpos de prova de 1, 2 e 4 mm de espessura, assim como as discrepâncias obtidas para o fator de emissão em 6 bandas de comprimento de onda da discretização espectral, são referenciadas nas tabelas 6.2.3-5. Nessas tabelas é dado o módulo da discrepância, já que esta tem um comportamento direcional isotrópico (ver figuras 6.2.7-27).

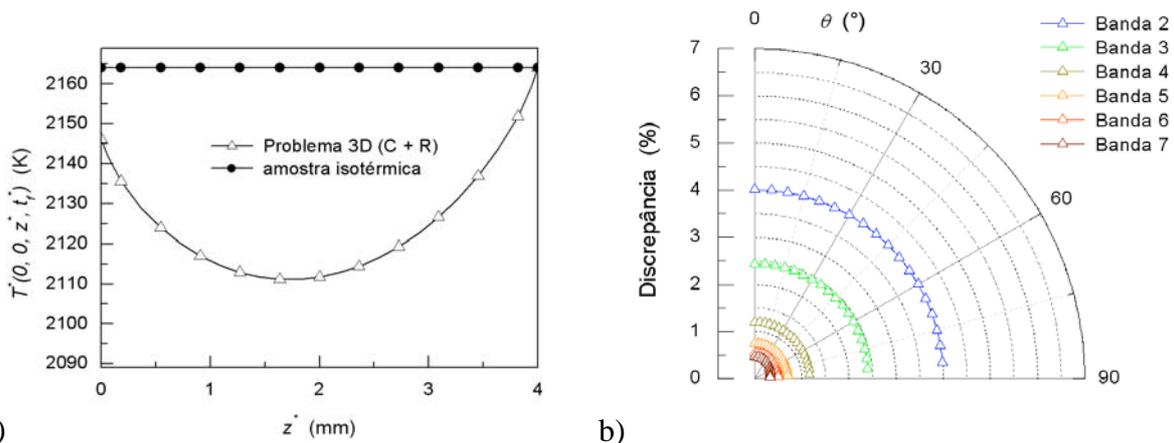
Comparando os resultados da discrepância obtidos para três amostras de alumina, pode-se concluir que a amostra de 1 mm de espessura é mais apropriada para a medição indireta de fator de emissão pelo experimento 2. Devida a sua espessura pequena, o fluxo radiativo distribui-se de maneira uniforme dentro da amostra, evitando então a geração de gradientes de temperatura indesejados. A observação das figuras 6.2.7-27 mostra que a espessura atrapalha a propagação da radiação, favorecendo então a geração de um gradiente de temperatura.



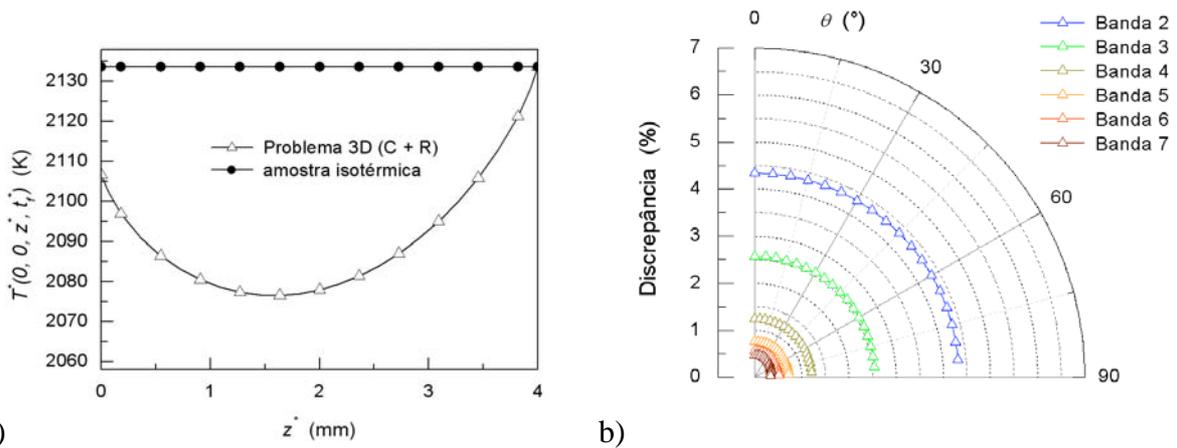
**Figura 6.2.22:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 4$  mm.  $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .



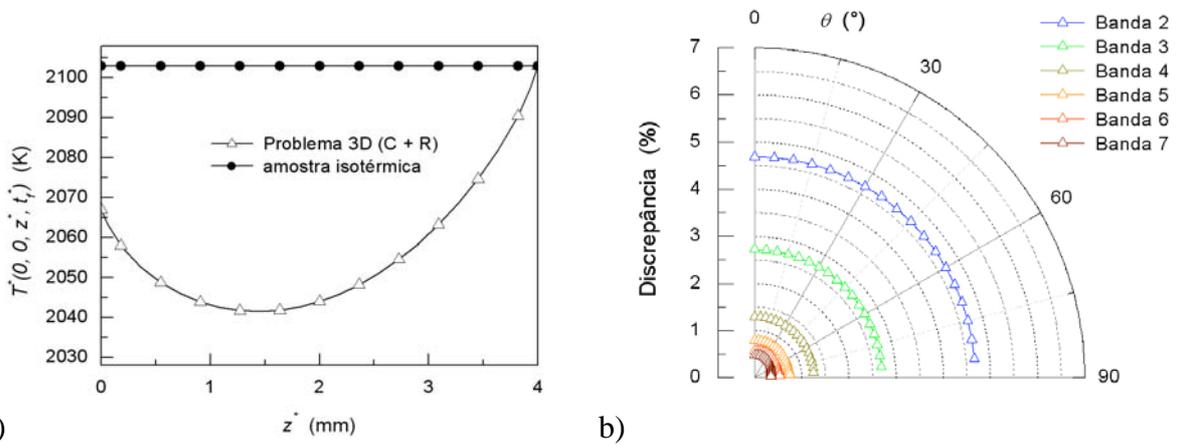
**Figura 6.2.23:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 4$  mm.  $Q_{11}^* = 0.95 Q_{12}^*$ .



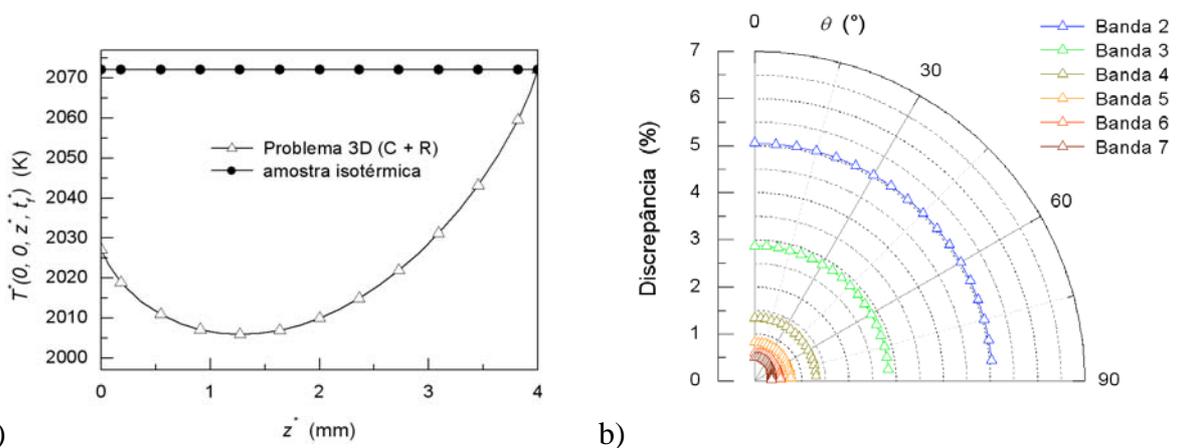
**Figura 6.2.24:** a) Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e b) discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 4$  mm.  $Q_{11}^* = 0.90 Q_{12}^*$ .



a) *Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e*  
 b) *discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 4$  mm.  $Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$ .*



a) *Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e*  
 b) *discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 4$  mm.  $Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$ .*



a) *Distribuição da temperatura ao longo do eixo  $(0, 0, z^*)$  e*  
 b) *discrepância sobre o fator de emissão para uma amostra de alumina Al23 de espessura  $c^* = 4$  mm.  $Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$ .*

*Tabela 6.2.3: Gradiente de temperatura e discrepância sobre o fator de emissão simulado para um corpo de prova de alumina de 1 mm de espessura.*

Desequilíbrio de fluxo	Gradiente de temperatura interna	Discrepância sobre $\tilde{\epsilon}_m$ (%)					
		$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
$Q_{11}^* = Q_{12}^*$	$\Delta T = 8$ K	0.6	0.5	0.3	0.2	0.2	0.1
$Q_{11}^* = 0.95 Q_{12}^*$	$\Delta T = 8$ K	0.7	0.5	0.4	0.2	0.2	0.1
$Q_{11}^* = 0.90 Q_{12}^*$	$\Delta T = 9$ K	0.8	0.6	0.4	0.2	0.2	0.1
$Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$	$\Delta T = 10$ K	0.9	0.7	0.4	0.3	0.2	0.1
$Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$	$\Delta T = 11$ K	0.9	0.7	0.4	0.3	0.2	0.2
$Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$	$\Delta T = 12$ K	1.0	0.8	0.5	0.3	0.2	0.2

*Tabela 6.2.4: Gradiente de temperatura e discrepância sobre o fator de emissão simulado para um corpo de prova de alumina de 2 mm de espessura.*

Desequilíbrio de fluxo	Gradiente de temperatura interna	Discrepância sobre $\tilde{\epsilon}_m$ (%)					
		$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
$Q_{11}^* = Q_{12}^*$	$\Delta T = 19$ K	1.4	1.0	0.6	0.4	0.3	0.2
$Q_{11}^* = 0.95 Q_{12}^*$	$\Delta T = 20$ K	1.5	1.1	0.6	0.4	0.3	0.2
$Q_{11}^* = 0.90 Q_{12}^*$	$\Delta T = 22$ K	1.7	1.2	0.7	0.4	0.3	0.2
$Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$	$\Delta T = 24$ K	1.9	1.3	0.7	0.4	0.3	0.2
$Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$	$\Delta T = 26$ K	2.0	1.4	0.7	0.4	0.3	0.3
$Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$	$\Delta T = 28$ K	2.2	1.5	0.8	0.5	0.3	0.3

*Tabela 6.2.5: Gradiente de temperatura e discrepância sobre o fator de emissão simulado para um corpo de prova de alumina de 4 mm de espessura.*

Desequilíbrio de fluxo	Gradiente de temperatura interna	Discrepância sobre $\tilde{\epsilon}_m$ (%)					
		$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
$Q_{11}^* = Q_{12}^*$	$\Delta T = 46$ K	3.4	2.2	1.1	0.7	0.5	0.4
$Q_{11}^* = 0.95 Q_{12}^*$	$\Delta T = 49$ K	3.7	2.3	1.1	0.7	0.5	0.4
$Q_{11}^* = 0.90 Q_{12}^*$	$\Delta T = 53$ K	4.0	2.4	1.2	0.7	0.5	0.5
$Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$	$\Delta T = 57$ K	4.3	2.6	1.2	0.8	0.6	0.5
$Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$	$\Delta T = 61$ K	4.7	2.7	1.3	0.8	0.6	0.5
$Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$	$\Delta T = 66$ K	5.0	2.9	1.3	0.8	0.6	0.5

## 6.3 Análise dos Coeficientes de Sensibilidade

De acordo com as explicações apresentadas na seção 5.4, deve-se realizar a primeira etapa da otimização do experimento através da análise dos coeficientes de sensibilidade das medidas com relação aos parâmetros. A análise tem por objetivo determinar se a estimativa simultânea de todos os parâmetros é possível.

Os coeficientes de sensibilidade normalizados, que serão analisados nesta seção, são obtidos multiplicando-se os coeficientes de sensibilidade originais, dados pela equação (5.1.10) na seção 5.1.1, pelos parâmetros aos quais os coeficientes se referem, ou seja,

$$\tilde{J}_{s,j} = P_j \frac{\partial X_s}{\partial P_j} \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, N, \quad s = 1, 2, \dots, MI \quad (6.3.1)$$

A análise dos coeficientes normalizados permite que dependências lineares e pequenas magnitudes sejam detectadas com mais facilidade, já que eles têm os valores das medidas como base [69].

### 6.3.1 Coeficientes de sensibilidade para o experimento 1 com fluxo laser de curta duração

Os resultados apresentados a seguir se referem ao experimento 1 descrito na seção 3.1 e formulado de acordo com o problema 1 definido pelo sistema de equações (3.3.10-17). Considera-se então um experimento semelhante ao método Flash em coordenadas cartesianas. Para este estudo dos coeficientes de sensibilidade, considera-se uma amostra quadrada de 1 cm de lado e de 1 mm de espessura, aquecida no centro da face superior por um fluxo de repartição gaussiana dependente do tempo. Como foi indicado na seção 3.1, apenas um quarto do domínio físico é necessário para estudar a transferência de calor no material. Portanto, considera-se como origem do sistema de coordenadas o centro da face não aquecida da amostra.

As figuras que são apresentadas nesta seção mostram os coeficientes de sensibilidade com relação aos parâmetros adimensionais  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ ,  $Bi^{rad}$ , assim como os parâmetros radiativos adimensionais  $\kappa_a$ ,  $\sigma_s$ ,  $\tau_0$ ,  $\omega$  e  $g$ . Nota-se que, se a ETR é escrita em termos de um par de parâmetros  $\kappa_a$  e  $\sigma_s$  ou  $\tau_0$  e  $\omega$ , é importante analisar o comportamento dos coeficientes de sensibilidades relativos a cada um deles.

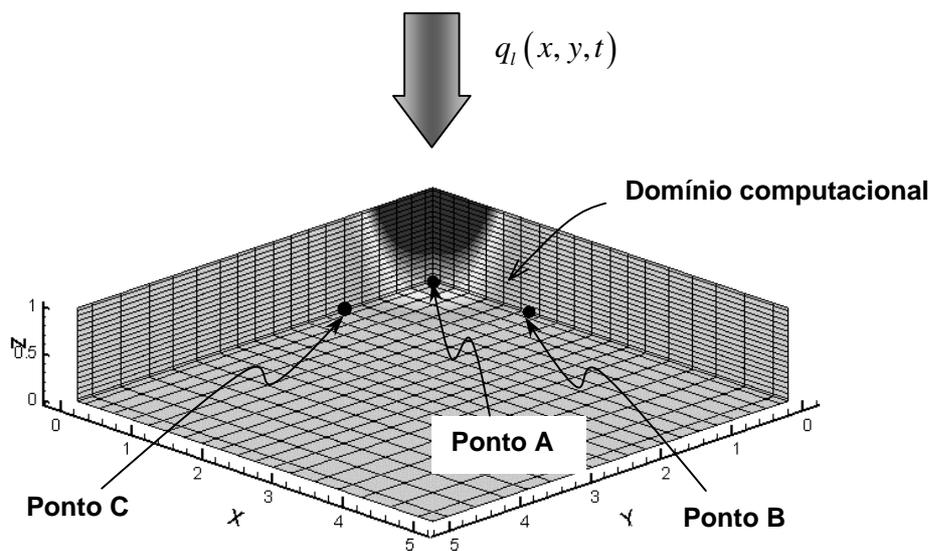
No objetivo de realizar uma análise em condições experimentais variadas, três materiais testes foram escolhidos por terem comportamentos térmicos diferentes. Os materiais apresentam características respectivamente parecidas como as do vidro, da cerâmica de alumina e do compósito de carbono ortotrópico. Eles serão chamados nesta seção como tais. O compósito de carbono tem condutividade térmica alta variando com a direção, enquanto o vidro e a alumina têm condutividade térmica média e independente da direção. Também, o carbono é opaco a radiação infravermelha, ao contrário do vidro e da alumina que são semitransparentes nesta faixa de frequência. Por outro lado, a alumina espalha a quase totalidade da radiação absorvida e emitida, com comportamento direcional anisotrópico, enquanto o vidro só absorve e emite radiação sem espalhá-la. As propriedades termofísicas supostas para os 3 materiais testados neste trabalho são resumidas na tabela 6.3.1. Os valores da condutividade térmica escolhidos em função das direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  foram escolhidos para testar o problema inverso mais que para representar uma matriz compósita de carbono verdadeira.

*Tabela 6.3.1: Propriedades termofísicas do vidro, da alumina, e do compósito de carbono.*

	Vidro	Alumina	Compósito de carbono	
<u>Propriedades termofísicas do material:</u>	$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$2.2 \times 10^6$	$2.5 \times 10^6$	$3.8 \times 10^6$
	$k_x^*$ [W/m.K]	1.5	5	30
	$k_y^*$ [W/m.K]	1.5	5	2.5
	$k_z^*$ [W/m.K]	1.5	5	30
	$\kappa_a^*$ [m <sup>-1</sup> ]	2.5	10	$\infty$
	$\sigma_s^*$ [m <sup>-1</sup> ]	0	10 000	-
	$g$	-	0.7	-
	$n_r$	1.5	1.65	-
<u>Condições experimentais:</u>	$T_0^*$ [K]	800	1800	1800
	$T_\infty^*$ [K]	800	1800	1800
	$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	132	1373	1373

As amostras, de tamanho  $2a^* = 10^{-2}$  m,  $2b^* = 10^{-2}$  m e  $c^* = 10^{-3}$  m, são todas cobertas por uma tinta de grafite de emissividade  $\varepsilon = 1$ .

Sendo o experimento 1 destinado a estimativa de propriedades de materiais ortotrópicos, três posições de medidas são analisadas. As posições de medidas, para a análise dos coeficientes de sensibilidades, são determinadas ulteriormente na seção 6.4, e correspondem ao seguinte intuito: a 1ª posição é o centro da face não aquecida onde a estimativa de  $C$ ,  $k_z$  e  $h^{rad}$  é esperada. Este ponto é chamando de ponto A. As outras posições, chamadas de ponto B e C, são deslocadas com relação ao primeiro ponto, no sentido dos eixos  $x$  e  $y$ , de maneira a quebrar a simetria relativa a difusão de calor na amostra. A figura 6.3.1 mostra a localização dos pontos de medida onde os coeficientes de sensibilidade são analisados.



*Figura 6.3.1: Pontos de análise dos coeficientes de sensibilidade para o experimento 1.*

As coordenadas destes pontos são definidas na tabela 6.3.2. Os coeficientes de sensibilidade são analisados para duas funções de fluxo:

- 1) um pulso de curta duração representativo de um experimento flash e
- 2) um pulso de longa duração, considerado contínuo.

As análises referentes às duas funções de fluxo são realizadas nas seções 6.3.1 e 6.3.2, respectivamente.

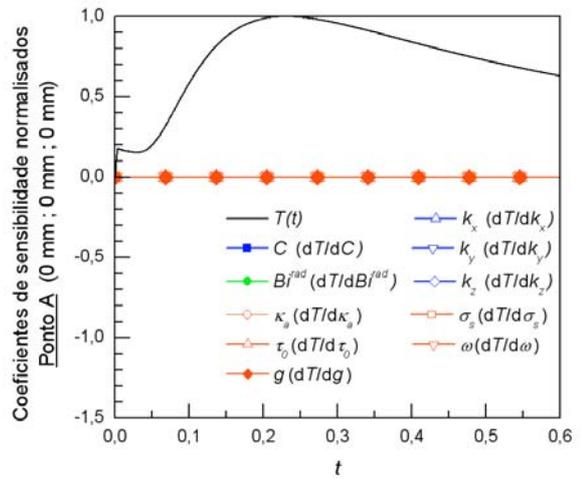
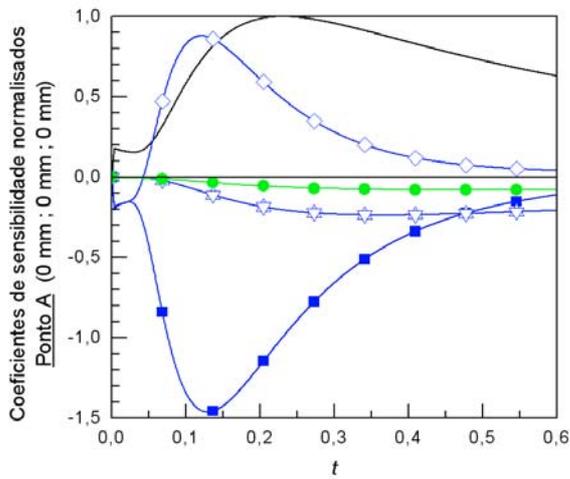
*Tabela 6.3.2: Coordenadas dos pontos de análise de coeficientes de sensibilidade.*

Material teste	Coordenadas do ponto A (mm)	Coordenadas do ponto B (mm)	Coordenadas do ponto C (mm)
Vidro	A(0, 0, 0)	B(2, 0, 0)	C(0, 2, 0)
Alumina	A(0, 0, 0)	B(2, 0, 0)	C(0, 2, 0)
Compósito de carbono	A(0, 0, 0)	B(3, 0, 0)	C(0, 1.5, 0)

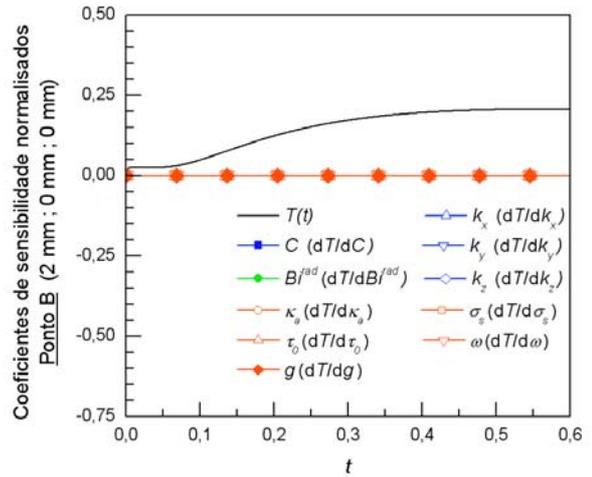
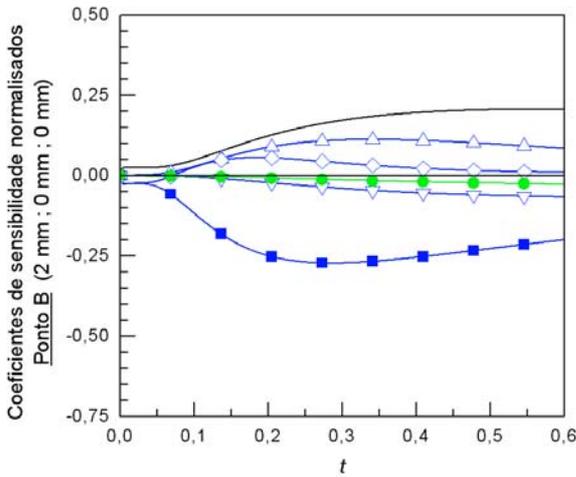
O experimento 1, neste caso, parece o método Flash tradicional com a diferença de que o fluxo recebido pela face aquecida é concentrado na região central. O problema térmico em questão é tridimensional. Os materiais, tendo características diferentes, diferentes níveis de potências são impostos ao laser para obter-se uma variação máxima de temperatura dimensional de  $\Delta T_{\max}^* = 5 \text{ K}$  na face não aquecida. As potências são de 15 W para a amostra de vidro e 20 W para as amostras de alumina e de carbono, aplicadas durante um tempo curto de  $\Delta t^* = 0.005 \text{ s}$  [172]. A duração considerada para o experimento foi de 1 s.

#### 6.3.1.1 Coeficientes de sensibilidade normalizados para o vidro

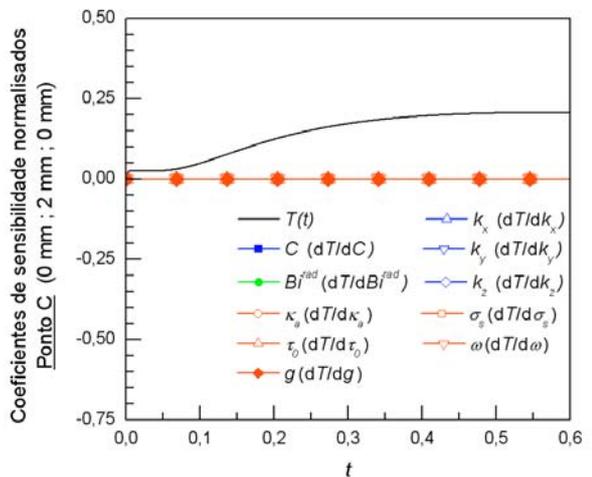
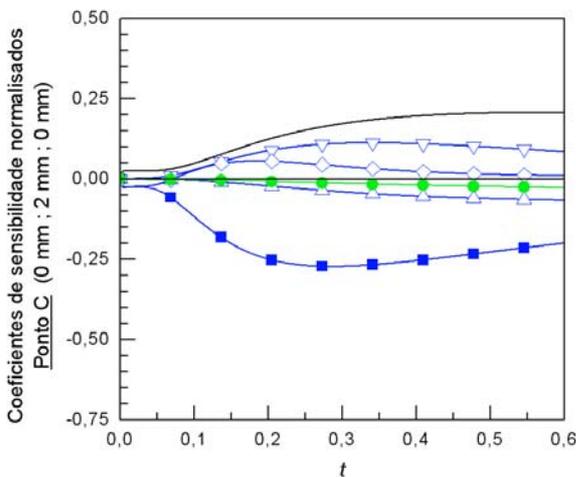
As figuras 6.3.2-4 mostram os coeficientes de sensibilidade para o vidro, o considerando cinza no espectro total. Os parâmetros radiativos são dados na tabela 6.3.1. Repara-se que para todos os parâmetros, a exceção dos parâmetros radiativos, os coeficientes de sensibilidade são de mesma magnitude que a temperatura medida. Os coeficientes de sensibilidade normalizados com respeito aos parâmetros radiativos são praticamente nulos. Nota-se que no ponto A, figura 6.3.2, os coeficientes de sensibilidade com relação a  $C$  e  $k_z$  têm a mesma ordem de magnitude, mas são linearmente dependentes a partir do tempo adimensional  $t > 0.1$ , quando os efeitos de difusão de calor são maiores que os efeitos radiativos causados pelo aquecimento da fronteira superior. De modo semelhante, embora tenham ordem de magnitude grande, os coeficientes de sensibilidade com relação a  $k_x$  e  $k_y$  são idênticos no ponto A. Isto deve-se ao fato da temperatura ser igualmente afetada pelos parâmetros  $k_x$  e  $k_y$  neste ponto, já que o meio foi suposto isotrópico. Por outro lado, o coeficiente de sensibilidade com relação a  $Bi^{rad}$  não é linearmente dependente com os outros coeficientes de sensibilidade. Das medidas tomadas no ponto A, somente 2 parâmetros podem ser



*Figura 6.3.2: Coeficientes de sensibilidade para o vidro cinza submetido a um pulso de laser - Ponto A.*



*Figura 6.3.3: Coeficientes de sensibilidade para o vidro cinza submetido a um pulso de laser - Ponto B.*



*Figura 6.3.4: Coeficientes de sensibilidade para o vidro cinza submetido a um pulso de laser - Ponto C.*

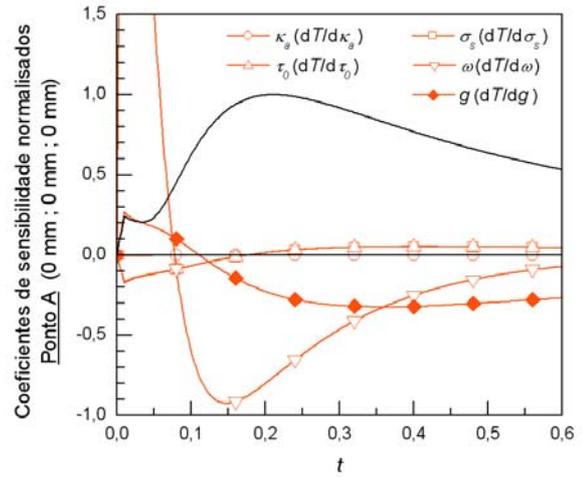
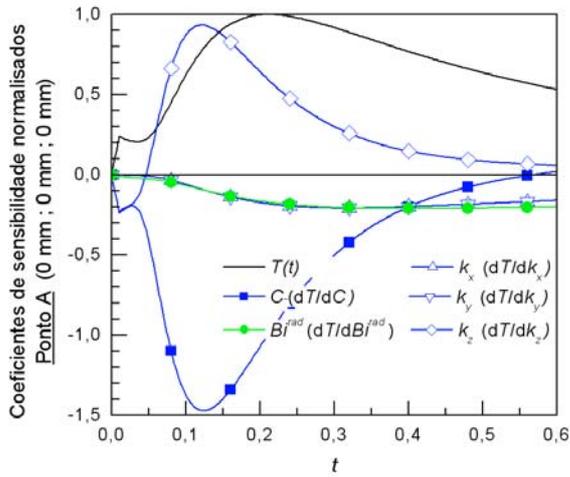
estimados com confiança. Este número de parâmetro pode ser aumentado incorporando na análise medidas de outros pontos.

No ponto B, figura 6.3.3, os coeficientes de sensibilidades com respeito aos parâmetros  $C$  e  $k_x$  são linearmente dependentes. No entanto, mesmo que os coeficientes relativos aos parâmetros  $k_y$  e  $k_z$  sejam de magnitude pequena, é possível identificá-los. Por efeito de simetria ( $k_x = k_y$ ), os coeficientes de sensibilidades com relação a  $k_y$  no ponto C são idênticos aos com relação a  $k_x$  no ponto B. Da mesma forma, os coeficientes de sensibilidade com relação a  $k_x$  no ponto C, figura 6.3.4, são idênticos aos coeficientes de sensibilidade com relação a  $k_y$  no ponto B. Portanto, a partir de medidas realizadas simultaneamente nos pontos A, B e C é possível estimar 5 parâmetros ( $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$ ), apesar da incerteza sobre a estimativa do coeficiente de transferência de calor ser grande, já que as magnitudes de seus coeficientes de sensibilidade serem pequenas.

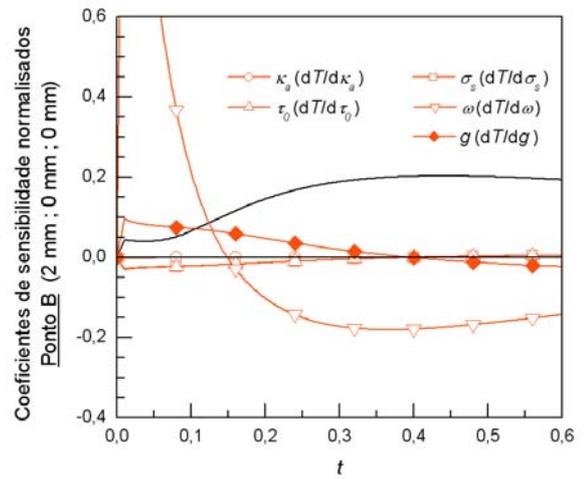
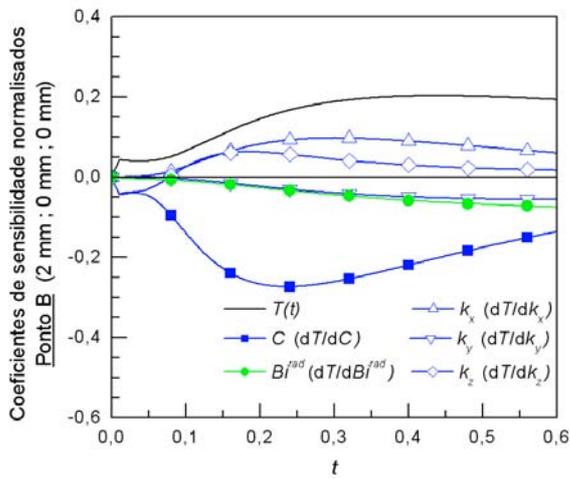
#### 6.3.1.2 Coeficientes de sensibilidade normalizados para a alumina

A análise de coeficientes de sensibilidade é agora realizada para a alumina cinza no espectro infravermelho, como mostrado nas figuras 6.3.5-7. Ao observar estas figuras, os coeficientes de sensibilidade relativos aos parâmetros radiativos não são mais nulos. Inclusive, a magnitude deles atinge e até ultrapassam a ordem de magnitude da temperatura medida, devido primeiro à predominância do espalhamento como modo de transferência radiativa, e segundo à magnitude não negligenciável dos parâmetros radiativos adimensionais ( $\tau_0 \approx \sigma_s = 10$ ,  $\omega \approx 1$  e  $g = 0.7$ ).

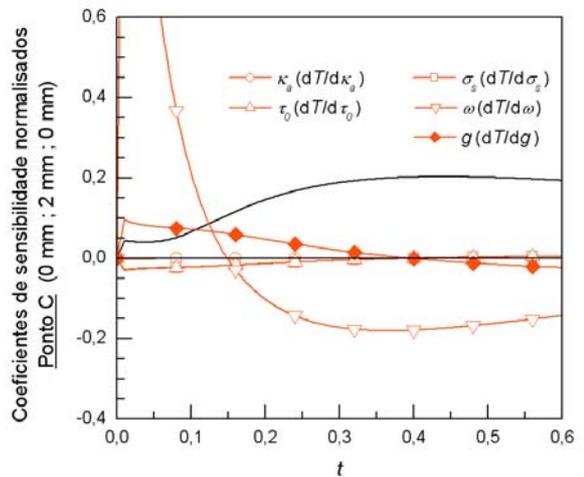
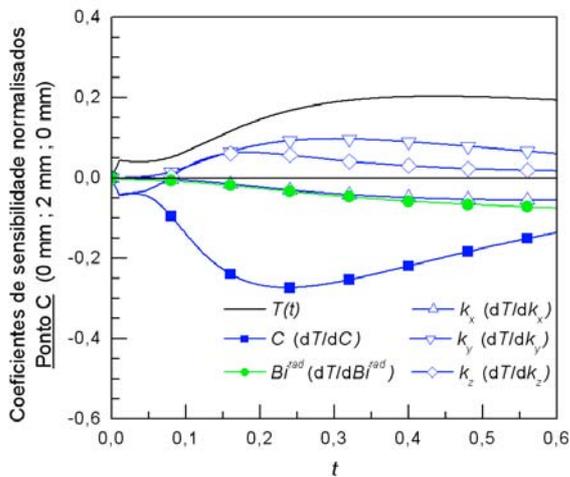
Os coeficientes de sensibilidade com relação aos parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$  são parecidos com os coeficientes obtidos para o vidro, mostrados anteriormente nas figuras 6.3.2-4. No ponto A, figura 6.3.5, os coeficientes de sensibilidade com relação a  $C$  e  $k_z$  têm a mesma ordem de magnitude e são praticamente linearmente dependentes a partir do tempo adimensional  $t > 0.1$ . Os coeficientes de sensibilidade com relação aos outros parâmetros  $k_x$ ,  $k_y$  e  $Bi^{rad}$  são linearmente dependentes. Por isso, é preciso novamente usar medições de temperatura nos pontos B e C de maneira a quebrar as dependências lineares das colunas da matriz de sensibilidade. Por exemplo, usando medidas no ponto B, a figura 6.3.6 mostra que os parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$  podem ser estimados simultaneamente. Por simetria,  $C$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$  podem ser estimados simultaneamente usando medidas apenas no ponto C, figura 6.3.7.



*Figura 6.3.5: Coeficientes de sensibilidade para a alumina cinza submetida a um pulso de laser - Ponto A.*



*Figura 6.3.6: Coeficientes de sensibilidade para a alumina cinza submetida a um pulso de laser - Ponto B.*



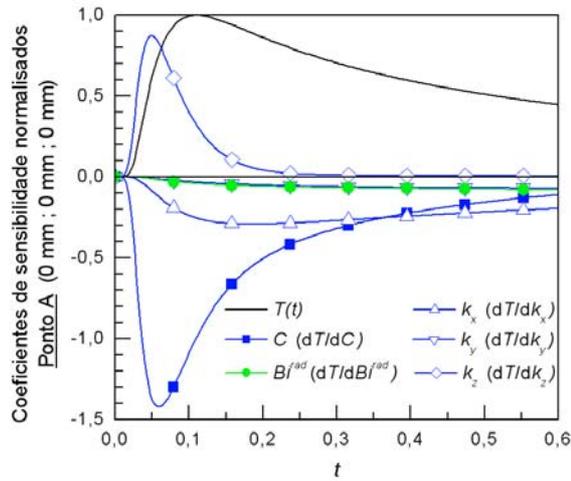
*Figura 6.3.7: Coeficientes de sensibilidade para a alumina cinza submetida a um pulso de laser - Ponto C.*

Observando na figura 6.3.5 os coeficientes de sensibilidade radiativos, a expectativa maior é de conseguir, a partir de medidas no ponto A, uma estimativa simultânea para os parâmetros  $\tau_0$  e  $\omega$ . Efetivamente, os coeficientes de sensibilidade com respeito à espessura ótica são pequenos e adotam um comportamento linearmente dependente com os coeficientes relativos ao fator de assimetria, principalmente nos pontos B e C, figura 6.3.6-7. Nesta análise, é preferível estimar os parâmetros  $\tau_0$  e  $\omega$ , pois as temperaturas nos referidos pontos são mais sensíveis à variações nestes parâmetros do que à variações em  $\kappa_a$  e  $\sigma_s$ . A utilização de medidas nos pontos B e C não ajuda a aprimorar a estimativa dos parâmetros radiativos, mas apenas ajuda a estimar as componentes da condutividade ortotrópica  $k_x$ ,  $k_y$  e  $k_z$ .

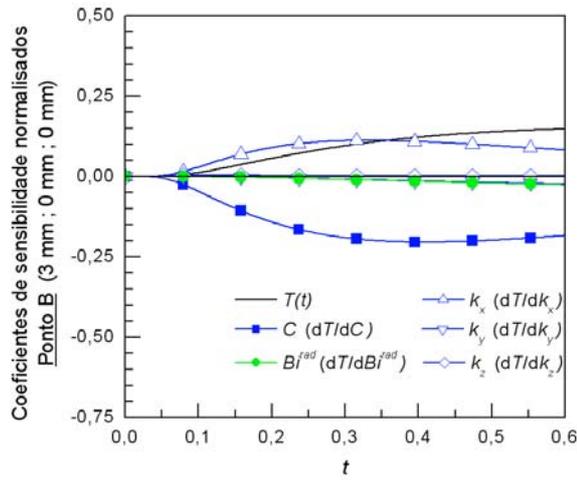
Diferentemente do vidro, o uso de medidas nos pontos A, B e C na alumina permite a estimativa simultânea dos parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$ , mas também dos parâmetros radiativos  $\tau_0$  e  $\omega$ . A análise de coeficientes é novamente repetida abaixo para o compósito de carbono, usando o experimento 1 com o pulso de curta duração. Como não há transferência de calor por radiação no compósito de carbono, os coeficientes analisados se referem às propriedades condutivas adimensionais e ao número de Biot.

### 6.3.1.3 Coeficientes de sensibilidade normalizados para o compósito de carbono

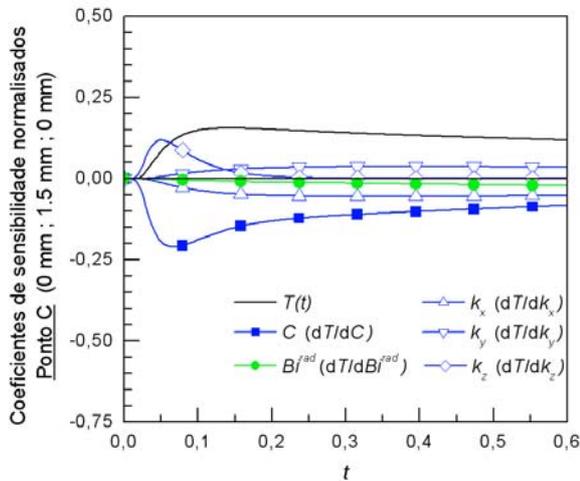
Os coeficientes de sensibilidade com respeito aos parâmetros de condução obtidos para o carbono não são parecidos com os coeficientes obtidos para a alumina, ou ainda para o vidro. Primeiro, o material não conduz o calor de maneira isotrópica. Segundo, devida à estrutura ortotrópica do material, a posição dos sensores B e C foi modificada conforme os resultados estudo de otimização de posição dos sensores, apresentado ulteriormente na seção 6.4. Ao observar a figura 6.3.8 referente ao ponto A, os coeficientes de sensibilidade com relação a  $C$  e  $k_z$  guardaram a mesma ordem de magnitude, mas não são linearmente dependentes a partir do tempo adimensional  $t > 0.1$ , como é o caso para materiais isotrópicos. Neste ponto, os coeficientes de sensibilidade não são linearmente dependentes, exceto os coeficientes referentes aos parâmetros  $k_y$  e  $Bi^{rad}$ .



*Figura 6.3.8: Coeficientes de sensibilidade para o compósito de carbono submetido a um pulso de laser - Ponto A.*



*Figura 6.3.9: Coeficientes de sensibilidade para o compósito de carbono submetido a um pulso de laser - Ponto B.*



*Figura 6.3.10: Coeficientes de sensibilidade para o compósito de carbono submetido a um pulso de laser - Ponto C.*

Para que os parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$  sejam estimados simultaneamente, é preciso incluir na função objetivo medidas de temperatura feitas nos pontos B e C. Na verdade, medidas realizadas no ponto B, figura 6.3.9, não trazem informações importantes já que os coeficientes de sensibilidade com respeito aos parâmetros  $C$  e  $k_x$  são linearmente dependentes e que os outros coeficientes são de magnitude pequena. No ponto C, figura 6.3.10, os coeficientes de sensibilidade com respeito aos parâmetros  $k_x$  e  $k_y$  são linearmente dependentes; mas os coeficientes com respeito aos parâmetros  $k_x$  e  $k_z$  não são dependentes apesar da pequena magnitude deles.

Da análise de coeficientes de sensibilidade, a estimativa dos parâmetros  $C$ ,  $k_x$  e  $k_z$  com um intervalo de confiança pequeno é esperada. Os outros parâmetros  $k_y$  e  $Bi^{rad}$  serão estimados com um intervalo de confiança grande. Conseqüentemente, o pulso de laser não se apresenta como a forma de aquecimento adequada para determinar as propriedades termofísicas de materiais ortotrópicos. Na seguida, são analisados os coeficientes de sensibilidade para um aquecimento contínuo da amostra.

### 6.3.2 Coeficientes de sensibilidade para o experimento 1 com fluxo laser contínuo

Considerando o experimento 1 com fluxo de laser constante e contínuo durante o experimento, os efeitos condutivos são favorecidos com relação aos efeitos radiativos. No caso anterior, o pulso de laser aquecia instantaneamente a face superior da amostra durante um curto tempo. A camada de material próxima à esta superfície armazenava calor suficiente para irradiar a fronteira oposta, provocando um pico de temperatura importante no início do experimento, e num segundo momento aquecer integralmente o material por difusão. A realização de um experimento de tipo “Flash” implica que muito calor seja armazenado em uma determinada região durante um tempo extremamente breve. Quando o material é semitransparente, o aquecimento local provocado pelo armazenamento de calor favorece a transferência de calor por radiação, principalmente na região das fronteiras pintadas de grafite.

A aplicação de um fluxo constante de pequena intensidade não favorece o armazenamento de calor na superfície aquecida. Porém, ela permite que o calor possa ser conduzido em toda parte da amostra. Em tal situação, o material é aquecido até

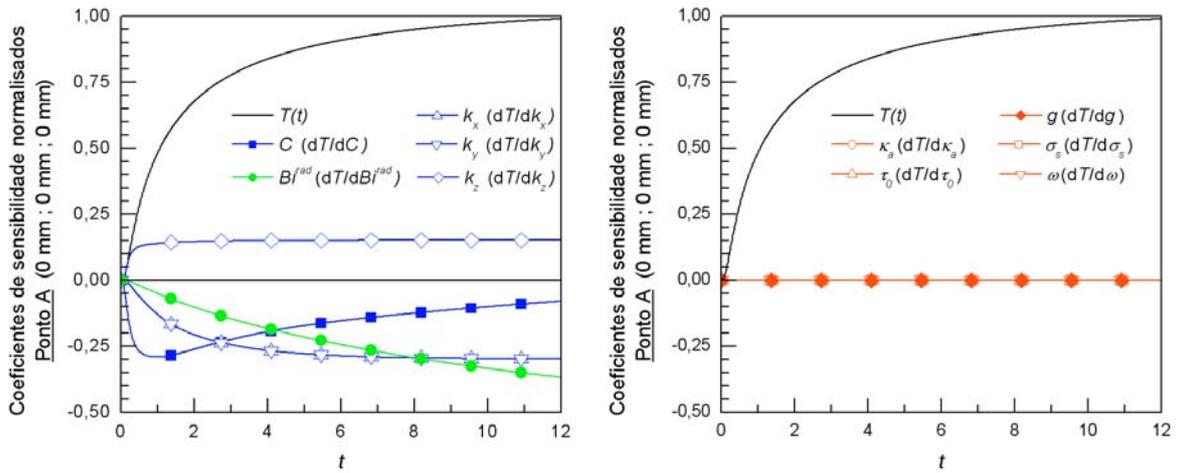
entrar em regime permanente. Descartando do estudo os materiais isolantes e considerando as amostras de pequenas dimensões, o experimento 1 com fluxo de calor constante não é capaz de gerar grandes gradientes de temperatura. Conseqüentemente, pequenas variações de temperaturas podem ser obtidas, inclusive na fronteira, e a troca de calor por radiação é reduzida de maneira significativa.

Neste experimento, o fluxo de calor de repartição energética gaussiana é centrado no ponto de coordenadas  $x^* = 0$ ,  $y^* = 0$  e  $z^* = c^*$ . Como os materiais têm propriedades diferentes, diferentes níveis de potências são impostos ao laser para obter-se uma variação máxima de temperatura dimensional de  $\Delta T_{\max}^* = 5 \text{ K}$  na face não aquecida. As potências foram escolhidas como 0.05 W para a amostra de vidro e 0.25 W para as amostras de alumina e de carbono [172]. A duração do experimento foi de 6 s.

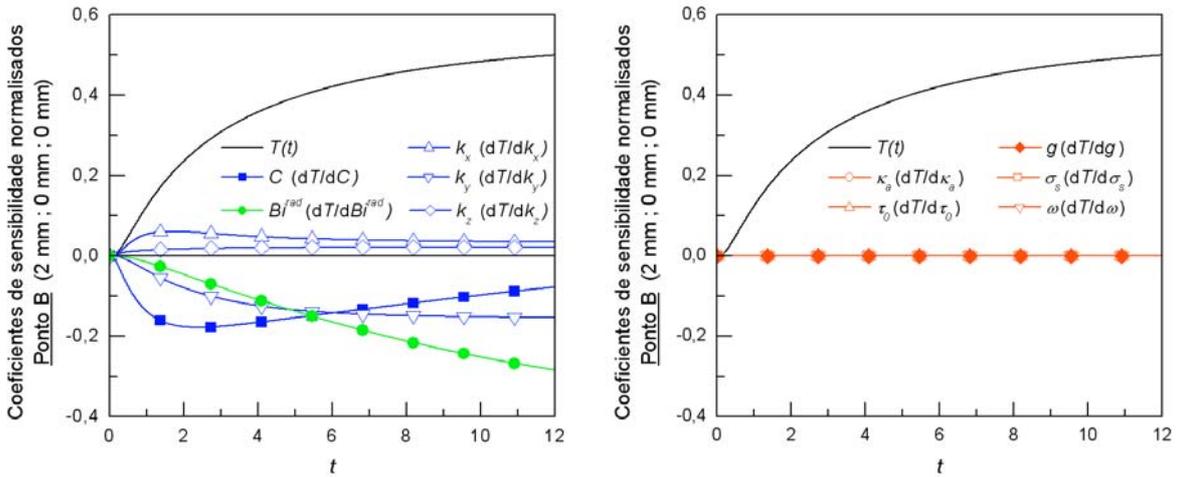
### 6.3.2.1 Coeficientes de sensibilidade normalizados para o vidro

As figuras 6.3.11-13 mostram os coeficientes de sensibilidade para o vidro cinza. Os parâmetros radiativos utilizados foram apresentados anteriormente na tabela 6.3.1. Para todos os parâmetros ligados à condução do calor, os coeficientes de sensibilidade são novamente de mesma magnitude que a temperatura. Os coeficientes de sensibilidade com respeito aos parâmetros radiativos são praticamente nulos, devido à pequena magnitude dos coeficientes de absorção e de extinção adimensionais. No ponto A, figura 6.3.11, os coeficientes de sensibilidade com respeito aos parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$  são linearmente independentes. Nota-se a grande sensibilidade da temperatura com respeito ao coeficiente de transferência de calor por radiação  $Bi^{rad}$  quando o fluxo é contínuo. Devido ao fato da condutividade térmica do vidro ser igual nas direções  $x$  e  $y$ , a temperatura é igualmente afetada nestas direções e os coeficientes de sensibilidade com relação à  $k_x$  e  $k_y$  são idênticos. As componentes da condutividade térmica  $k_x$  e  $k_y$  não podem ser estimadas simultaneamente neste ponto e medidas de temperaturas em outros pontos serão necessárias no processo de estimativa.

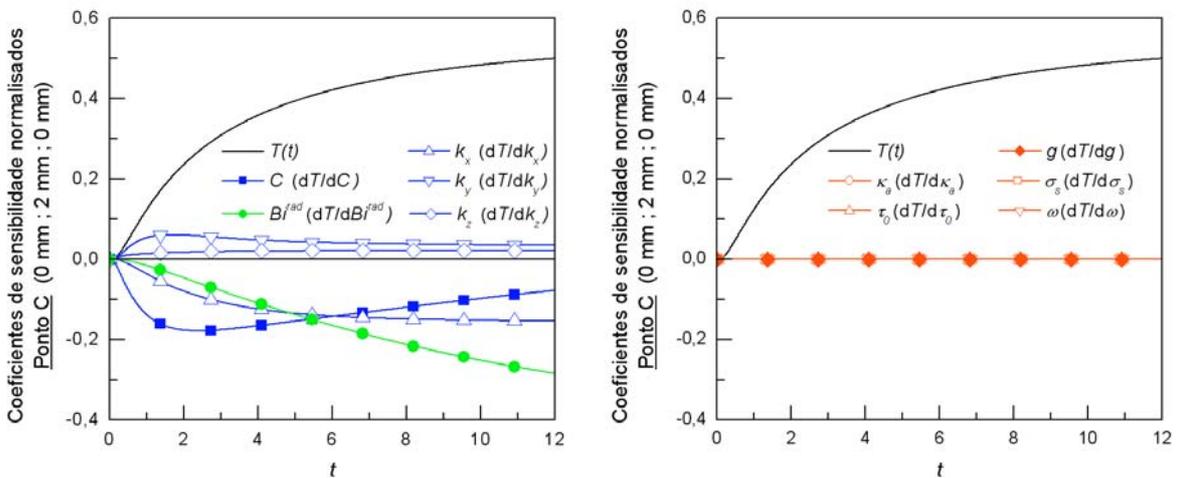
Nos pontos B e C, figuras 6.3.12-13, os coeficientes de sensibilidade relativos aos parâmetros da difusão de calor são linearmente independentes, exceto àqueles com relação às componentes transversais da condutividade térmica  $k_x$  e  $k_y$ . Repara-se a troca de lugar entre os coeficientes de sensibilidade com relação à  $k_x$  e  $k_y$  nos pontos B e C, devido à igualdade de valor para os parâmetros  $k_x$  e  $k_y$ . A partir de medidas realizadas nos pontos A, B e C, é possível estimar simultaneamente 5 parâmetros ( $C$ ,



*Figura 6.3.11: Coeficientes de sensibilidade para o vidro cinza submetido a um fluxo contínuo - Ponto A.*



*Figura 6.3.12: Coeficientes de sensibilidade para o vidro cinza submetido a um fluxo contínuo - Ponto B.*



*Figura 6.3.13: Coeficientes de sensibilidade para o vidro cinza submetido a um fluxo contínuo - Ponto C.*

$k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$ ). Independentemente do perfil transiente de fluxo aplicado na fronteira superior da amostra, as propriedades radiativas do vidro não podem ser estimadas utilizando-se apenas medidas de temperatura.

### 6.3.2.2 Coeficientes de sensibilidade normalizados para a alumina

As figuras 6.3.14-16 mostram os coeficientes de sensibilidade normalizados para a alumina cinza, quando submetida a um fluxo de calor constante. Sendo o material extremamente espalhante e os parâmetros radiativos de magnitude significativa, pode-se notar a nítida elevação dos coeficientes de sensibilidade com respeito aos parâmetros radiativos. Este mesmo fenômeno foi observado anteriormente para a amostra de alumina quando submetida a um pulso de curta duração. A magnitude dos coeficientes de sensibilidade é da ordem de magnitude da temperatura medida.

Os coeficientes de sensibilidade com relação aos parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$  são parecidos com os obtidos para o vidro, mostrados antes nas figuras 6.3.11-13. No ponto A, figura 6.3.14, os coeficientes de sensibilidade com respeito aos parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_z$ ,  $Bi^{rad}$  e  $\omega$  são linearmente independentes. Neste ponto os coeficientes de sensibilidade com respeito aos outros parâmetros  $k_x$  e  $k_y$ , assim como  $g$ ,  $\sigma_s$  e  $\tau_0$  são linearmente dependentes.

No ponto B como no ponto C, figuras 6.3.15-16, os coeficientes de sensibilidade com respeito aos parâmetros  $k_x$  e  $k_y$  são linearmente independentes, o que é suficiente para estimar simultaneamente todas as propriedades condutivas e o albedo. Além disso, nos pontos B e C os coeficientes de sensibilidade com relação à espessura ótica não são linearmente dependentes daqueles com relação ao albedo  $\omega$ . Como os coeficientes relativos aos parâmetros  $\kappa_a$ ,  $\sigma_s$ ,  $\tau_0$  e  $g$  são pequenos, o uso dos pontos B e C não aumenta muito a expectativas de estimar as outras propriedades radiativas simultaneamente. É importante comparar as figuras 6.3.5 e 6.3.14 e observar a forte diminuição dos coeficientes de sensibilidade com respeito aos parâmetros radiativos quando um fluxo contínuo é aplicado em vez de um flash.

Pelo menos três pontos de medida nas posições A, B e C são utilizados para a estimativa simultânea dos parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$  da alumina. Uma excelente precisão dos resultados é esperada devido à magnitude dos mesmos e a não correlação dos coeficientes de sensibilidade entre si.

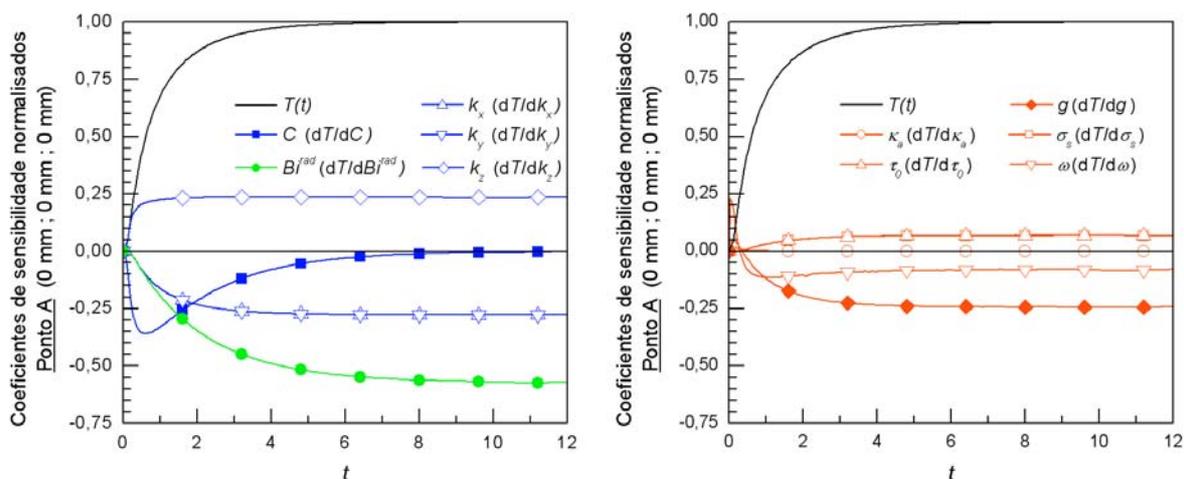


Figura 6.3.14: Coeficientes de sensibilidade para a alumina cinza submetida a um fluxo contínuo - Ponto A.

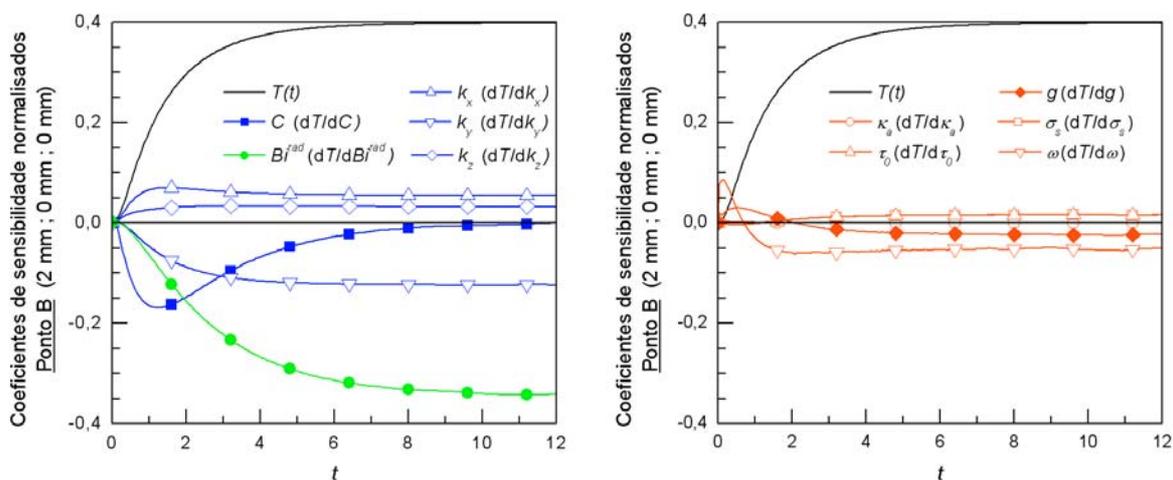


Figura 6.3.15: Coeficientes de sensibilidade para a alumina cinza submetida a um fluxo contínuo - Ponto B.

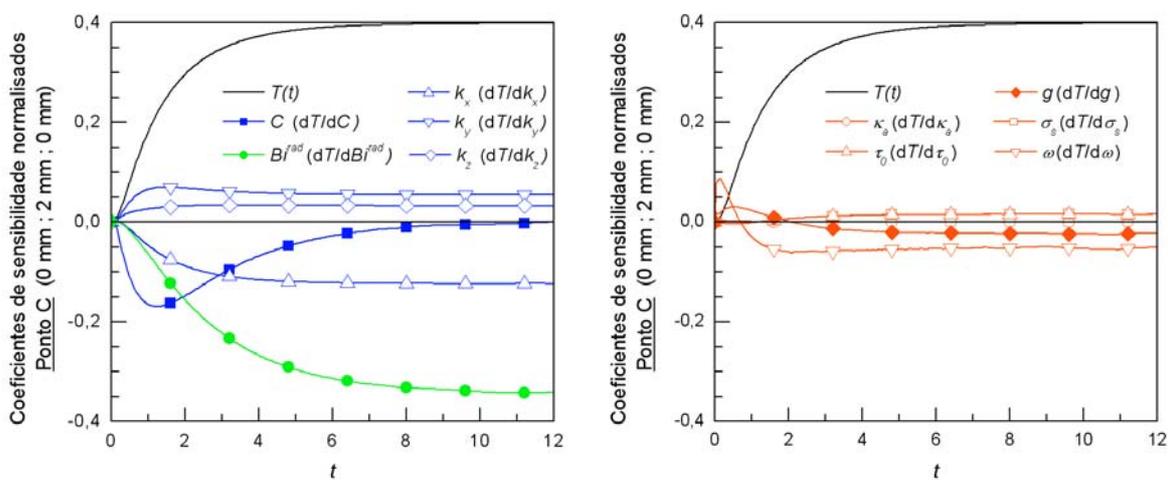


Figura 6.3.16: Coeficientes de sensibilidade para a alumina cinza submetida a um fluxo contínuo - Ponto C.

O experimento 1 associado a um aquecimento contínuo do corpo de prova pode se revelar mais eficiente para a estimativa dos parâmetros condutivos e radiativos da alumina cinza. Ao contrário do flash, uma confiança maior nos resultados referentes aos parâmetros radiativos é esperada, devido à maior magnitude dos coeficientes de sensibilidade.

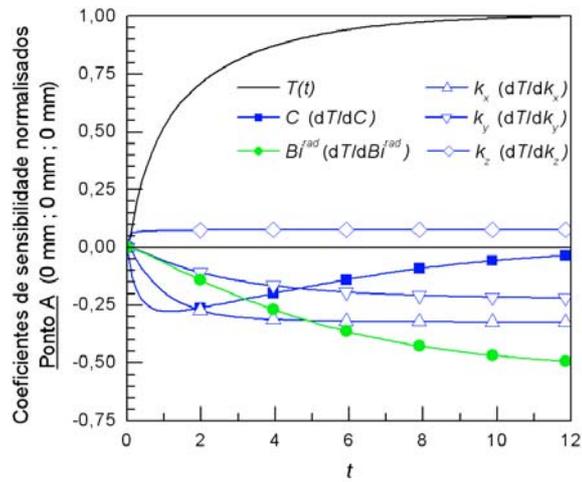
### 6.3.2.3 Coeficientes de sensibilidade normalizados para o compósito de carbono

Para terminar a análise de coeficientes de sensibilidade para o experimento 1, os coeficientes de sensibilidade são mostrados quando o fluxo contínuo é aplicado na fronteira superior da amostra de carbono. Somente os parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$  são analisados no caso do carbono. Os coeficientes são mostrados respectivamente para os pontos A, B e C nas figuras 6.3.17-19.

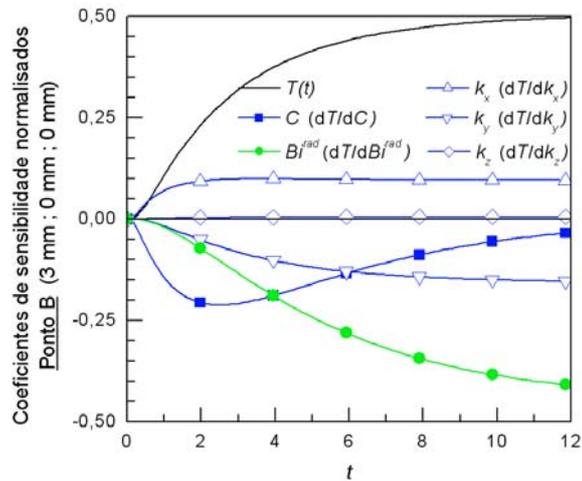
No ponto A, figura 6.3.17, os coeficientes de sensibilidade obtidos para os parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$  são parecidos com os coeficientes obtidos para o vidro e a alumina. Nota-se que os coeficientes com respeito às componentes da condutividade térmica  $k_x$  e  $k_y$  são linearmente independentes.

Os coeficientes de sensibilidade nos pontos B e C são apresentados nas figuras 6.3.18 e 6.3.19. Nota-se que as temperaturas nestes pontos são afetadas de maneiras diferentes por variações nos parâmetros  $k_x$  e  $k_y$ , por estes apresentarem valores diferentes devido ao caráter ortotrópico do material. Portanto, medidas nos pontos A, B e C são necessárias para a completa caracterização do material em termos de suas propriedades condutivas.

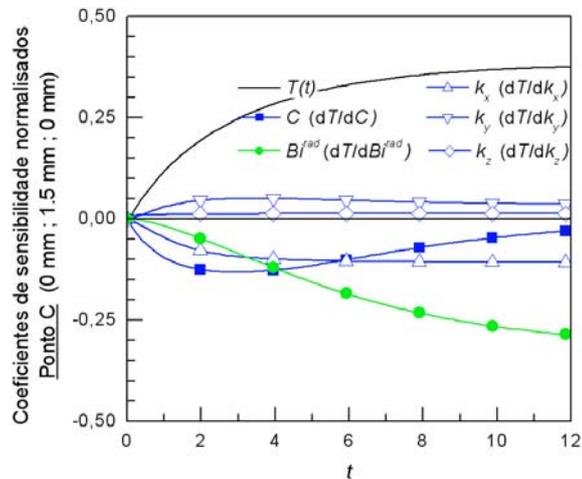
Com a análise dos coeficientes de sensibilidade mostrados nas figuras 6.3.2-19, foi mostrada a possibilidade de estimar as propriedades termofísicas de MST cinzas e espalhantes com o experimento 1. A continuação desta seção 6.3 é dedicada à análise dos coeficientes de sensibilidade com respeito às propriedades radiativas não cinzas. No experimento 2, a grandeza medida não é a temperatura, mas sim a intensidade radiativa saindo da amostra. Esta depende diretamente da direção e do comprimento de onda.



*Figura 6.3.17: Coeficientes de sensibilidade para o compósito de carbono submetido a um fluxo contínuo - Ponto A.*



*Figura 6.3.18: Coeficientes de sensibilidade para o compósito de carbono submetido a um fluxo contínuo - Ponto B.*



*Figura 6.3.19: Coeficientes de sensibilidade para o compósito de carbono submetido a um fluxo contínuo - Ponto C.*

### 6.3.3 Coeficientes de sensibilidade para o experimento 2

Os resultados apresentados a seguir se referem ao experimento 2 descrito na seção 3.1 e formulado de acordo com o problema 2 definido pelo sistema de equações (3.4.7-10). Para este estudo dos coeficientes de sensibilidade, considera-se também uma amostra quadrada de 1 cm de lado e de 1 mm de espessura (ver seção 6.2), recebendo em  $z^* = 0$  e  $z^* = c^*$ , um fluxo contínuo de repartição espacial uniforme e de potências  $Q_l^*$ . As amostras do experimento 2 não são pintadas com grafite, sendo o objetivo principal a medição do fator de emissão. Para resolver o problema numérico, um quarto do domínio físico é considerado. O domínio computacional foi discretizado com uma malha  $(N_x \times N_y \times N_z) \times N_l = (25 \times 25 \times 25) \times 160$ .

O experimento 2 é destinado a medir indiretamente o fator de emissão monocromático e direcional de MST a altas temperaturas. Dependendo da análise dos coeficientes de sensibilidade, o experimento pode ser aproveitado para estimar as propriedades radiativas monocromáticas de MST. A medida de fator de emissão é dita “indireta” por ser deduzida a partir da intensidade radiativa saindo de uma amostra de temperatura uniforme e da intensidade saindo de um corpo negro levado à temperatura idêntica, como estipula a equação 3.1.1 da seção 3.1. Considerando como origem do sistema de coordenadas o centro da face inferior  $z^* = 0$ , a medida da intensidade radiativa saindo da amostra é realizada em um único ponto localizado no centro da face superior da amostra, de coordenadas dimensionais  $(x^* = 0, y^* = 0, z^* = c^*)$ .

Para analisar os coeficientes de sensibilidade em condições variadas, o vidro e a alumina foram escolhidos novamente como materiais teste. Os coeficientes de sensibilidade normalizados  $P(\partial \tilde{\varepsilon} / \partial P)$  são apresentados para o vidro na seção 6.3.3.1 e para a alumina na seção 6.3.3.2.  $P$  é um parâmetro radiativo de escolha e  $\tilde{\varepsilon}(\lambda, \theta)$  é o fator de emissão espectral (comprimento de onda  $\lambda$ ) e direcional (ângulo  $\theta$  - ver figuras 6.3.20) por uma determinada temperatura da amostra. O parâmetro  $P$  depende do comprimento de onda; por uma determinada banda de comprimento de onda  $m$ , ele pode representar um dos parâmetros radiativos  $\kappa_{am}$ ,  $\sigma_{sm}$ ,  $\tau_{0m}$ ,  $\omega_m$  ou  $g_m$ . Para os dois materiais, o comportamento radiativo foi definido em aproximadamente 10 bandas cinzas.

### 6.3.3.1 Coeficientes de sensibilidade normalizados para o vidro

O vidro usado para simular os coeficientes de sensibilidade possui as propriedades radiativas apresentadas na tabela 6.3.3. Trata-se de um vidro transparente, cujas propriedades foram obtidas diretamente da literatura [140]. Neste exemplo, a parte real e a parte imaginária do índice de refração são obtidas a partir de medições da refletividade especular por espectrômetro FTIR [140]. O coeficiente de absorção monocromático é depois obtido a partir da equação (3.2.44). De maneira a simplificar o problema, o espectro infravermelho é dividido em 10 bandas cinzas, onde as propriedades do vidro são assumidas constantes. As propriedades são fornecidas na tabela 6.3.3 abaixo.

*Tabela 6.3.3: Propriedades radiativas do vidro.*

$m$	Faixa de comprimentos de onda ( $\mu\text{m}$ )	Coefficiente de absorção $\kappa_{am}$ ( $\text{m}^{-1}$ )	Coefficiente de espalhamento $\sigma_{sm}$ ( $\text{m}^{-1}$ )	Fator de assimetria $g_m$ (Função de fase Henyey-Greenstein)	Parte real do índice de refração $n_r$	Parte complexa do índice de refração $k_r$
1	$0.5 \leq \lambda < 3.7$	0.2	0	-	1.51	$2.0 \times 10^{-6}$
2	$3.7 \leq \lambda < 4.3$	2	0	-	1.47	$5.0 \times 10^{-5}$
3	$4.3 \leq \lambda < 5.3$	26	0	-	1.44	0.001
4	$5.3 \leq \lambda < 6.3$	109	0	-	1.38	0.005
5	$6.3 \leq \lambda < 7.3$	370	0	-	1.10	0.02
6	$7.3 \leq \lambda < 8.3$	1 613	0	-	0.60	0.1
7	$8.3 \leq \lambda < 10.5$	14 773	0	-	1.50	1.1
8	$10.5 \leq \lambda < 11.0$	9 353	0	-	1.70	0.8
9	$11.0 \leq \lambda < 19.0$	2 576	0	-	1.50	0.3
10	$19.0 \leq \lambda < 50.0$	3 138	0	-	2.20	0.8

A amostra de vidro de 1 mm de espessura é aquecida por laser a temperatura 893 K. O fluxo total recebido pela amostra é 10 W. A condutividade térmica do vidro a altas temperaturas é suposta de 1.5 W/m.K e a capacidade térmica volumétrica, de 2.2 J/m<sup>3</sup>.K.

Os coeficientes de sensibilidade em função do ângulo de medida e com respeito aos parâmetros radiativos são mostrados na figura 6.3.20, para 6 bandas cinzas centradas nos comprimentos de ondas 3, 4, 5, 6, 8 e 10  $\mu\text{m}$ . Devido à simetria azimutal, o ângulo de medida estende-se de 0° a 90° com relação à direção normal à superfície  $\Gamma_6$  do corpo de prova. A análise mostra que o fator de emissão só é sensível ao coeficiente de absorção e de extinção, já que para um material não espalhante o coeficiente de extinção

é igual ao coeficiente de absorção. Estes coeficientes de sensibilidade são da ordem do fator de emissão somente na faixa de variação da absorvidade ( $4.3 \leq \lambda \leq 8.3 \mu\text{m}$ ), onde a espessura ótica da amostra é então  $0.05 \leq \tau_0 \leq 5$ . Em outras faixas de comprimento de onda, quando o material é óticamente fino ou espesso, os coeficientes são quase nulos.

À medida que o comprimento de onda cresce de  $1 \mu\text{m}$  para  $7 \mu\text{m}$ , a espessura ótica do meio aumenta. Pode-se notar o quanto os coeficientes de absorção ou de extinção têm um comportamento direcional e uma amplitude similar ao próprio fator de emissão, para as bandas  $m = 1, 2, 3$  e  $4$ , figura 6.3.20. Acima de  $\lambda = 7 \mu\text{m}$  (bandas  $m = 6$  e  $7$ ), o meio já é óticamente espesso, e a medida que o fator de emissão aumenta, os coeficientes de absorção e de extinção diminuem.

Outro fenômeno interessante de observar é a redução do fator de emissão causado pelo aumento da refletividade especular  $\rho'(\theta)$  da interface ar-vidro nas direções rente à superfície ( $70^\circ \leq \theta < 90^\circ$ ). Isto ocorre quando o vidro é mais refringente que o ar ( $n_{r\text{vidro}} > n_{r\text{ar}}$ ), para as bandas  $m = 1, 2, 3, 4$  e  $7$ . Quando o meio não é mais refringente que o ar, como acontece para a banda de frequência  $m = 6$ , esta queda ocorre imediatamente a partir de  $\theta = 20^\circ$ .

Considerando uma fronteira perfeitamente plana, a intensidade radiativa em proveniência do meio e incidente na interface com um determinado ângulo  $\theta_1$  é refratada no ar com um ângulo  $\theta_2$  menor, de acordo com a lei de Snell original, dada na seção 3.2.3. Como a parte real do índice de refração do vidro é tomada igual a 0.6 nesta banda, toda radiação emitida pela amostra foi refratada nas direções inferiores ao ângulo crítico evidentemente situado em torno de  $55\text{-}60^\circ$ .

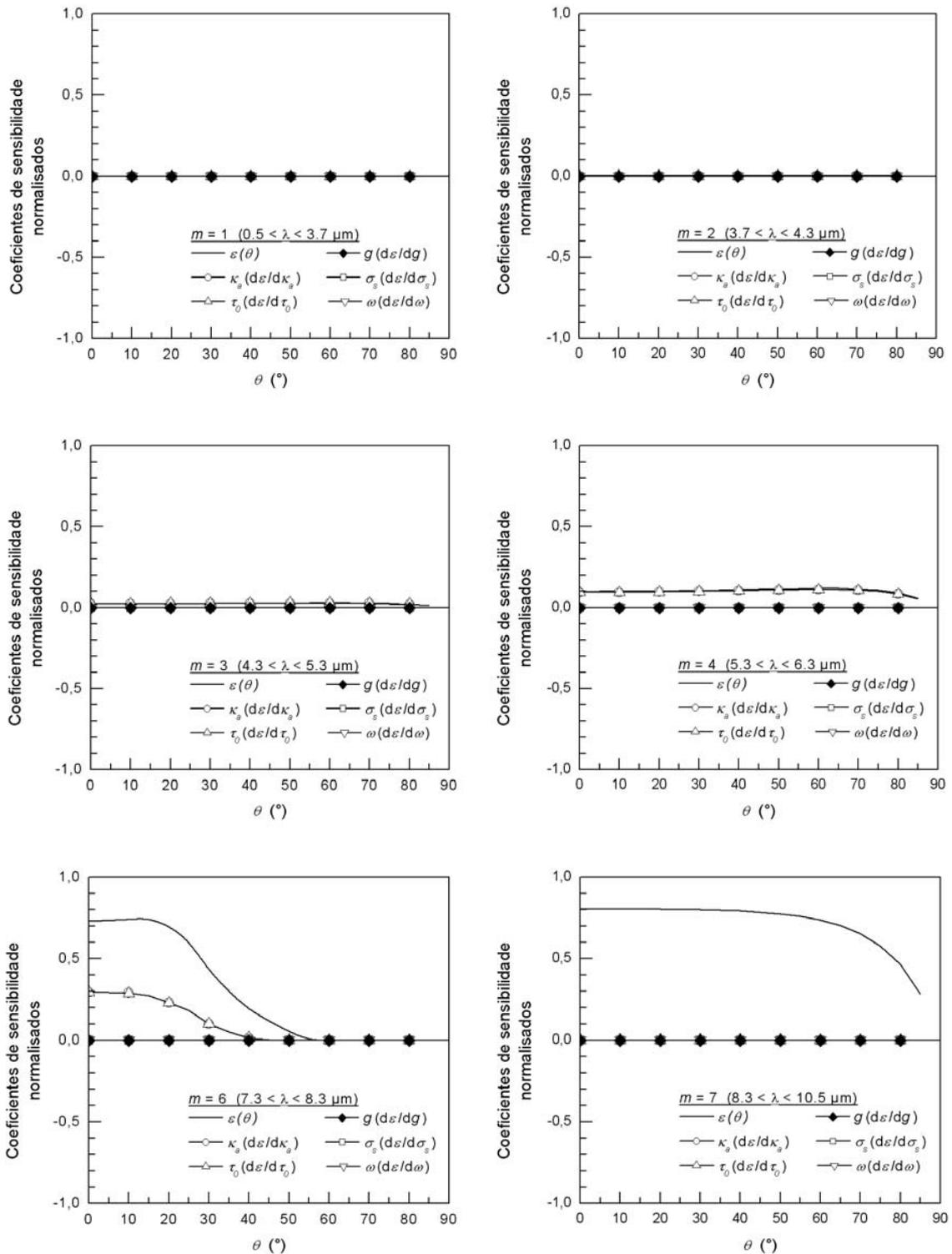
A forte influência do índice de refração é visível ao observar os resultados para a banda de frequência  $m = 7$ , onde  $n_r = 1.5$ . O fator de emissão seria a priori igual a unidade, já que o meio é óticamente espesso ( $\tau_0 \approx 15$ ). No entanto, como o índice de refração é superior à unidade, parte da radiação em proveniência do meio é refletida na interface, e a intensidade radiativa refratada sofre uma diminuição de amplitude ao passar pela interface. Por isso, o fator de emissão máximo atingido para o vidro é 0.8. Este resultado mostra que um corpo negro pode ser fabricado com um dielétrico que possui a parte real do índice de refração menor ou igual à unidade e a parte imaginária superior ou igual à unidade na frequência de calibração.

Os coeficientes de sensibilidade com respeito aos parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$  não são apresentados para o experimento 2 devido à pequena magnitude deles ( $< 2 \times 10^{-4}$ ). O regime permanente sendo atingido durante a medição do fator de emissão, os efeitos ligados à difusão de calor são desprezados, independentemente do MST estudado. Coeficientes de sensibilidade pequenos são obtidos também para os parâmetros condutivos da alumina.

### 6.3.3.2 Coeficientes de sensibilidade normalizados para a alumina

O material usado para simular o fator de emissão neste caso possui as características apresentadas na tabela 6.2.1 na seção anterior, parecidas com as da alumina Al23 [127,129] a altas temperaturas (2000 K). O índice de refração foi calculado usando os parâmetros dados [50] para a safira a 2007 K. O meio, composto de partículas esféricas de tamanho único e de raio de 20  $\mu\text{m}$ , tem fração volumétrica de ocupação de  $f_v = 0.7$ . A sua capacidade térmica volumétrica é de  $C^* = 2.5 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$  e a condutividade térmica, independente da direção, tem o valor  $k^* = 5 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ . As propriedades radiativas são obtidas a partir da solução da teoria de Mie, dadas pelas equações (3.2.45-55). De maneira a simplificar o problema, o espectro das propriedades radiativas foi dividido em 8 bandas.

Antes de iniciar o experimento 2, a amostra de alumina encontra-se a temperatura inicial  $T_0^* = 300 \text{ K}$ . Um fluxo laser de potência total 70 W, dividido em dois canais perfeitamente simétricos, aquece duas fronteiras da amostra, de coordenadas respectivas  $z^* = 0$  e  $z^* = c^*$ . Estas trocam calor por convecção natural ( $h^* = 50 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ). A temperatura do ar envoltório é constante ( $T_\infty^* = 300 \text{ K}$ ). Depois de um tempo de aproximadamente 150 s, a amostra entra em regime permanente e a distribuição quase homogênea de temperatura interna é obtida (ver seção 6.2.1). A medição de fator de emissão é então realizada.



*Figura 6.3.20: Coeficientes de sensibilidade para o vidro - Experimento 2.*

A figura 6.3.21 mostra os coeficientes de sensibilidade do fator de emissão com respeito aos parâmetros radiativos  $\kappa_{am}$ ,  $\sigma_{sm}$ ,  $\tau_{0m}$ ,  $\omega_m$  e  $g_m$ , onde  $m=2, \dots, 7$ . Ao observar esta figura, os coeficientes de sensibilidades com respeito ao coeficiente de espalhamento não são nulos, como foi o caso para o vidro. Os coeficientes de sensibilidade com respeito ao albedo têm uma magnitude tão elevada que não aparecem na figura 6.3.21 para as bandas  $m=2, 3$  e  $4$ . No entanto, todos os coeficientes de sensibilidade são linearmente dependentes sobre o espectro infravermelho, o que inabilita a realização de uma estimativa simultânea de parâmetros radiativos com o experimento 2. O comportamento direcional dos coeficientes de sensibilidade é idêntico ao do fator de emissão.

Por outro lado, é interessante comparar o fator de emissão obtido para o vidro e para a alumina. A mesma diminuição de fator de emissão nas direções rente à superfície é observada quando a parte real do índice de refração é superior à unidade. Porém, a figura 6.3.21 não mostra o comportamento direcional da emissão quando a parte real do índice de refração é inferior a unidade: este fenômeno ocorre a partir de  $\lambda \approx 9.6 \mu\text{m}$  para a alumina enquanto ocorria a partir de  $\lambda \approx 7.3 \mu\text{m}$  para o vidro.

É possível observar na figura 6.3.21 uma diminuição maior do fator de emissão na banda  $m=7$  que nas outras bandas. A parte real do índice de refração é menor que a unidade nesta banda, e o ângulo crítico de refração no ar se situa em torno de  $85^\circ$ . Para o comprimento de onda  $\lambda=10 \mu\text{m}$ , a alumina é extremamente absorptiva e ao mesmo tempo menos refringente que o ar. Ela se comporta como um corpo negro nas direções normais, como o mostra a figura 6.3.21 para a banda  $m=7$ . Este ponto é chamado ponto “Christiansen”.

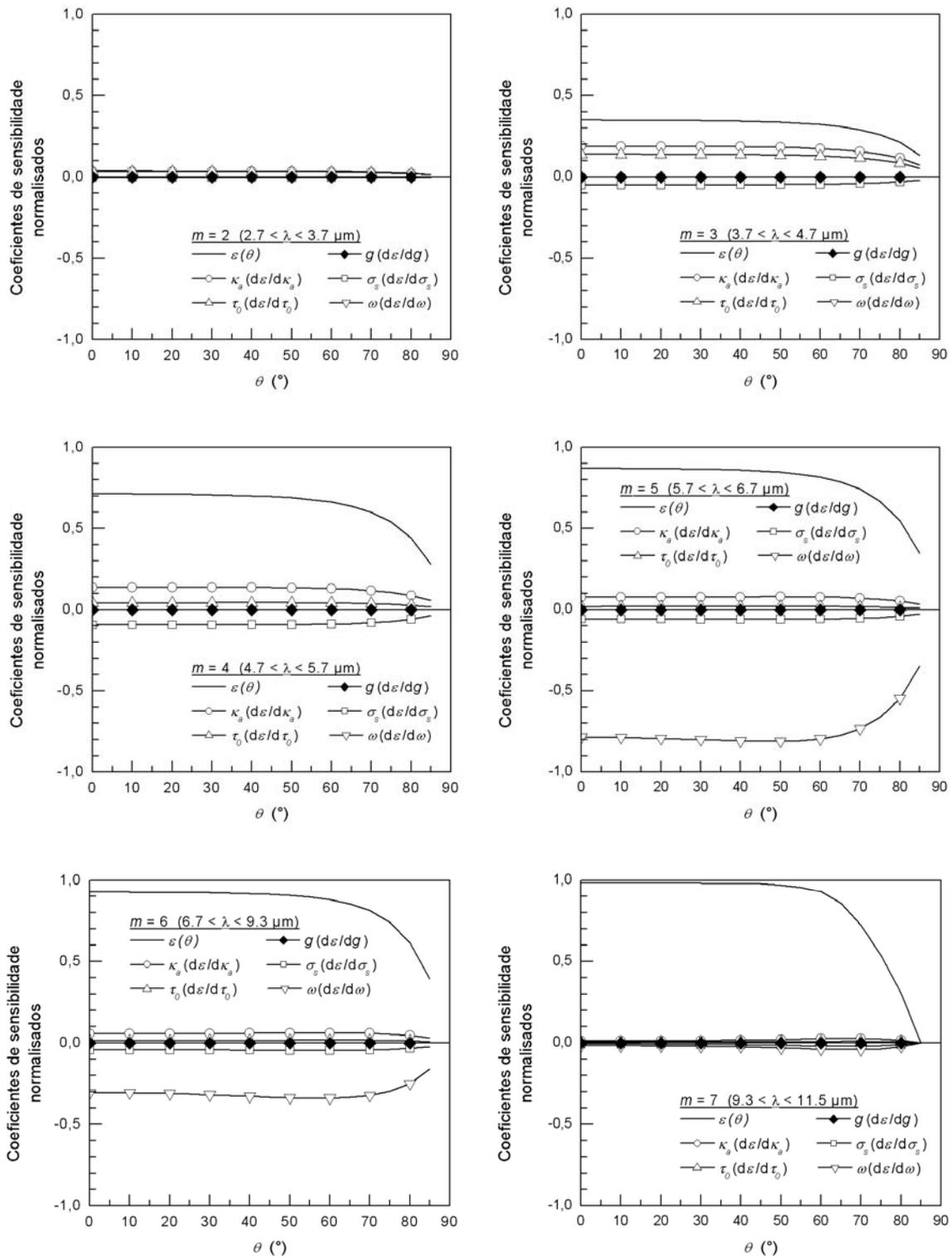


Figura 6.3.21: Coeficientes de sensibilidade para a alumina - Experimento 2.

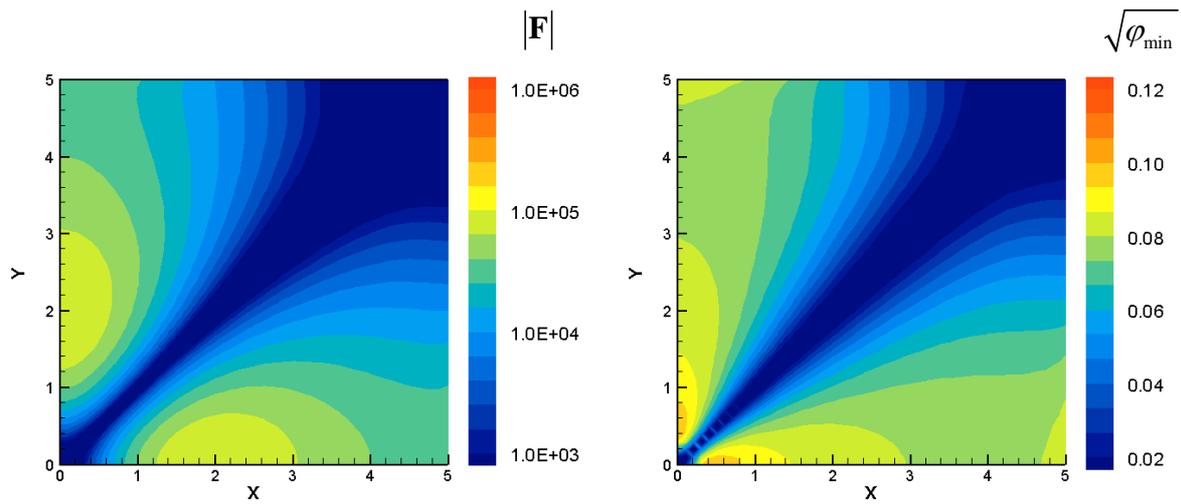
## 6.4 Otimização do Experimento

De acordo com as discussões apresentadas na seção 5.6, para que seja possível obterem-se resultados com pequena incerteza para os parâmetros estimados é preciso fazer a otimização do experimento com relação a diferentes variáveis experimentais, tais como, número e posição dos sensores, o tempo de aquecimento por laser, o tempo de duração do experimento e o dimensionamento do corpo de prova.

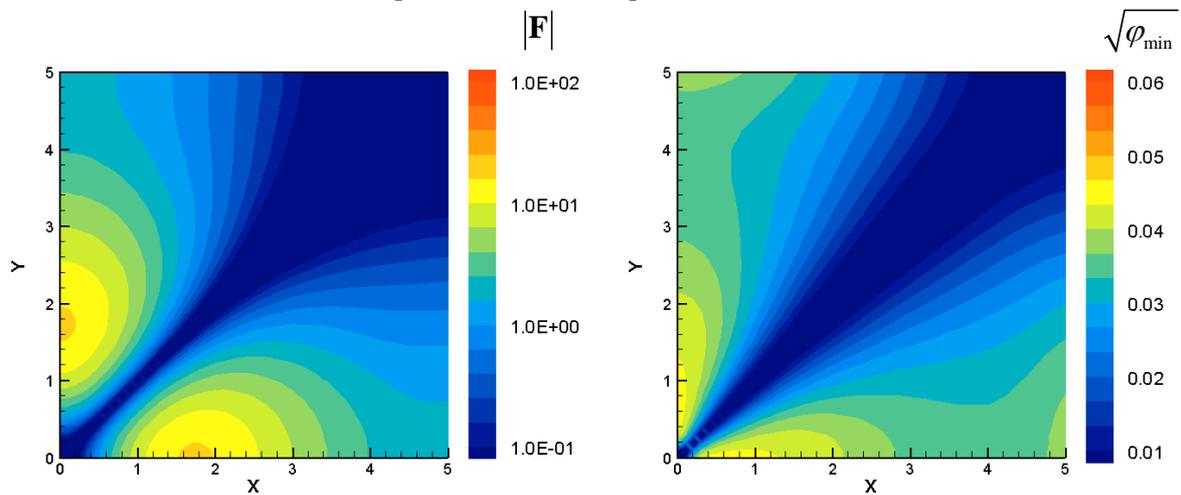
O primeiro passo de otimização do experimento que consistiu na análise dos coeficientes de sensibilidade, permitiu a determinação do perfil transiente de fluxo de calor a ser imposto na fronteira superior da amostra, e de uma certa maneira, o número de sensores e as suas colocações mais apropriadas para a estimativa dos parâmetros. O presente objetivo é analisar os critérios D- e E-ótimos, dados pelas equações (5.6.4,5), para que seja possível escolher os valores ótimos para a duração do experimento, para o número de sensores e para a localização destes.

### 6.4.1 Localização dos sensores

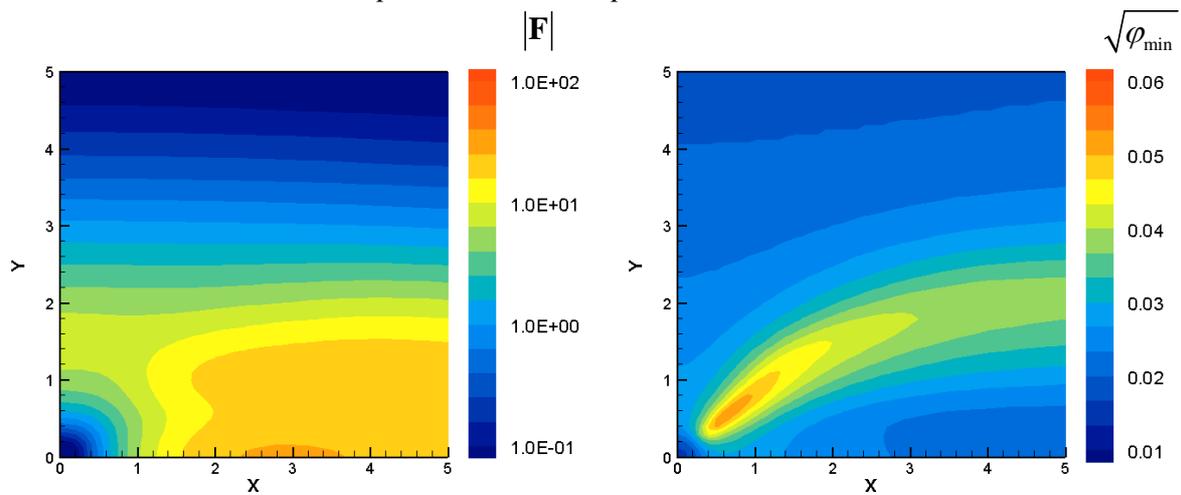
Tendo sido mostrado na seção 6.3 que os coeficientes de sensibilidade referentes aos parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$  eram linearmente independentes para o fluxo contínuo  $q_l(x, y)$  no problema 1, a presente otimização de experimento se dedica à identificação e a localização dos sensores necessários para a estimativa das propriedades. Naturalmente, a possibilidade de estimar todos os parâmetros simultaneamente é pesquisada com o uso de dois sensores da câmera infravermelha: um é localizado no centro da face  $\Gamma_5$  do corpo de prova e o outro é localizado em um ponto deslocado do centro de modo a quebrar as dependências lineares entre os coeficientes de sensibilidades com respeito aos parâmetros  $k_x$  e  $k_y$ . As figuras 6.4.1-3 mostram os mapas do valor do determinante da matriz  $\mathbf{F}$  e da raiz quadrada do seu menor autovalor em função de  $x$  e  $y$ , para 3 materiais testes que são o vidro, a alumina e o compósito de carbono. As propriedades foram definidas na seção 6.3, assim como as dimensões do corpo de prova e as condições relativas ao experimento. A análise considera a informação proveniente de 2 sensores ativados durante o experimento inteiro. A matriz  $\mathbf{F}$  é de tamanho  $[5 \times 5]$ , sendo os parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$  estimados. O objetivo das figuras 6.4.1-3 é determinar a posição ótima do segundo sensor para cada amostra de material.



*Figura 6.4.1: Condicionamento da matriz de informação em função de  $x$  e  $y$ , para 2 sensores e para o vidro.*



*Figura 6.4.2: Condicionamento da matriz de informação em função de  $x$  e  $y$ , para 2 sensores e para a alumina.*



*Figura 6.4.3: Condicionamento da matriz de informação em função de  $x$  e  $y$ , para 2 sensores e para compósito de carbono.*

A análise das figuras 6.4.1-3 mostra a possibilidade de estimar 5 parâmetros simultaneamente colocando-se o segundo sensor nas regiões onde os critérios D- e E- ótimos são maiores. Tais regiões, assim como os valores mínimos estabelecidos para  $|\mathbf{F}|$  e  $\sqrt{\varphi_{\min}}$  em cada caso estudado, são mostrados na tabela 6.4.1.

*Tabela 6.4.1: Localização ótima do sensor 2.*

MATERIAL	POSIÇÃO DO SENSOR 2	CRITÉRIOS
<i>Vidro</i>	$(0.8 \leq x \leq 3.4, y = 0, z = 0)$ ou $(x = 0, 0.8 \leq y \leq 3.4, z = 0)$	$ \mathbf{F}  > 5 \times 10^3$ e $\sqrt{\varphi_{\min}} > 0.08$
<i>Alumina</i>	$(0.8 \leq x \leq 2.8, y = 0, z = 0)$ ou $(x = 0, 0.8 \leq y \leq 2.8, z = 0)$	$ \mathbf{F}  > 50$ e $\sqrt{\varphi_{\min}} > 0.035$
<i>Compósito de carbono</i>	$(1 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2, z = 0)$ ou $(0.4 \leq x \leq 1.2, 0.4 \leq y \leq 1, z = 0)$	$ \mathbf{F}  > 10$ e $\sqrt{\varphi_{\min}} > 0.03$

Nota-se a queda evidente do condicionamento da matriz de informação na diagonal  $x = y$  para o vidro e para a alumina. As componentes da condutividade na direção  $x$  e na direção  $y$  destes materiais foram escolhidas iguais. Portanto, a difusão de calor é igualmente afetada nestas duas direções, fazendo que os coeficientes de sensibilidade para os parâmetros  $k_x$  e  $k_y$  na diagonal sejam idênticos. O determinante da matriz de informação é conseqüentemente muito pequeno na diagonal. Para o carbono, não se observe esta queda na diagonal  $x = y$  no determinante pelo motivo de que  $k_x \neq k_y$ .

Uma alternativa aparecendo quanto à escolha da posição do segundo sensor, a tentativa de estimar 5 parâmetros em conjunto usando 3 sensores é investigada. Nesta tentativa, o primeiro sensor é posicionado no centro da face não aquecida e o segundo sensor, posicionado dentro das regiões definidas na tabela 6.4.1. As posições dos sensores 1 e 2 são especificadas na tabela 6.4.2. O determinante da matriz  $\mathbf{F}$  e a raiz quadrada do valor do seu menor autovalor são avaliados levando em conta a informação do sensor 3 em todas as posições possíveis da face não aquecida do corpo de prova. Os resultados são mostrados nas figuras 6.4.4-6. O objetivo é determinar as regiões para se colocar o sensor 3 e aumentar a confiança nos resultados.

*Tabela 6.4.2: Localização do sensor 2.*

MATERIAL	POSIÇÃO DO SENSOR 1	POSIÇÃO DO SENSOR 2
<i>Vidro</i>	$(x = 0, y = 0, z = 0)$	$(x = 2, y = 0, z = 0)$
<i>Alumina</i>	$(x = 0, y = 0, z = 0)$	$(x = 2, y = 0, z = 0)$
<i>Compósito de carbono</i>	$(x = 0, y = 0, z = 0)$	$(x = 1.3, y = 1, z = 0)$

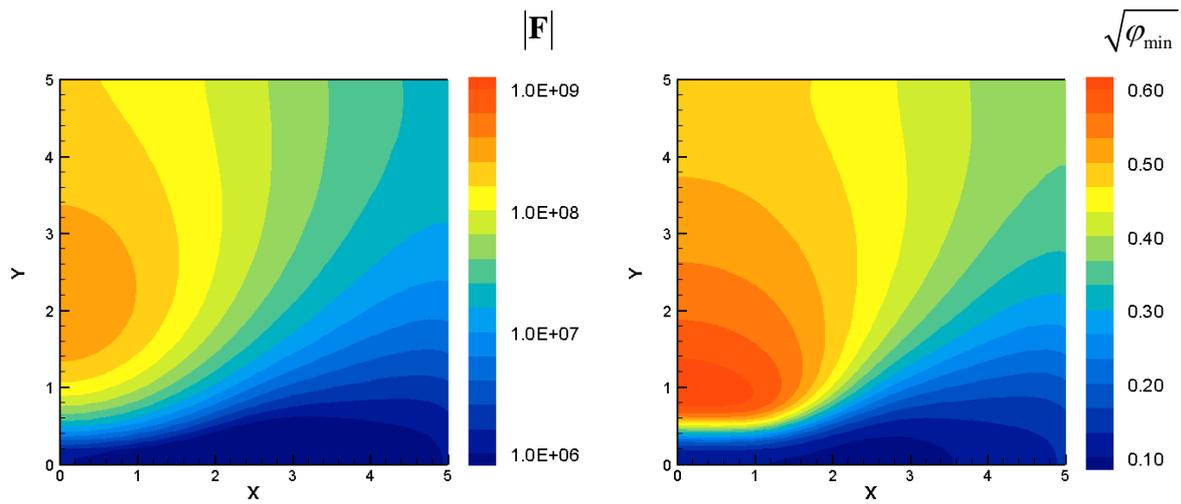
As figuras 6.4.4-6 apresentam os campos de  $|\mathbf{F}|$  e  $\sqrt{\varphi_{\min}}$ , considerando-se os sensores 1 e 2 localizados de acordo com a tabela 6.4.2, para cada um dos materiais estudados, respectivamente.

As figuras 6.4.4-5, não mostram outras alternativas quanto à escolha da posição do terceiro sensor para o vidro e a alumina. Para o carbono, a figura 6.4.6 mostra que 2 áreas de posicionamento do sensor 3 são susceptíveis de melhorar o condicionamento da matriz de informação. As regiões onde os critérios D- e E-ótimos são maiores são definidas na tabela 6.4.3 para os três materiais:

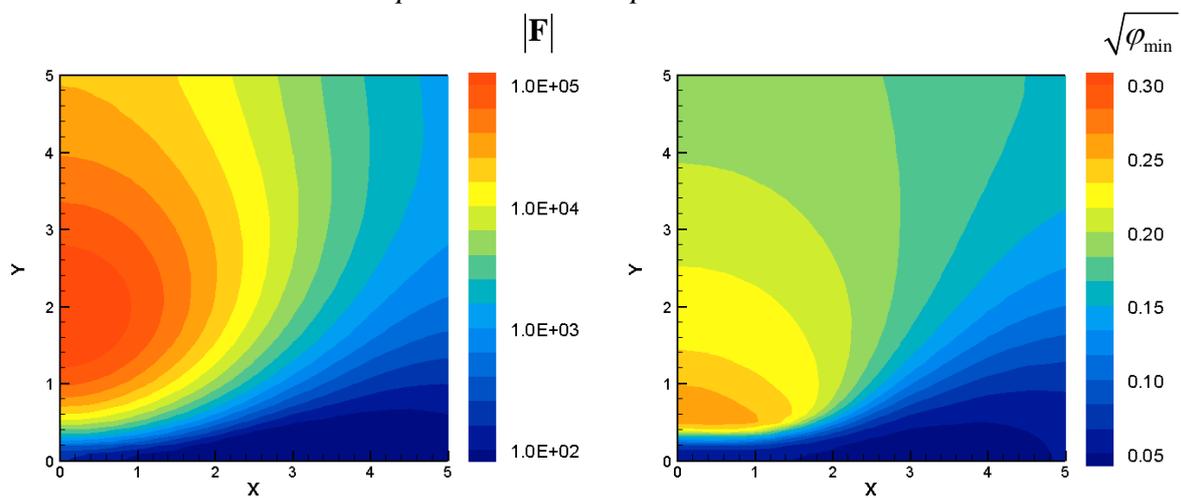
*Tabela 6.4.3: Localização ótima do sensor 3.*

MATERIAL	POSIÇÃO DO SENSOR 3	CRITÉRIOS
<i>Vidro</i>	$(x = 0, 1 \leq y \leq 5, z = 0)$	$ \mathbf{F}  > 5 \times 10^8$ e $\sqrt{\varphi_{\min}} > 0.5$
<i>Alumina</i>	$(x = 0, 0.6 \leq y \leq 5, z = 0)$	$ \mathbf{F}  > 2 \times 10^4$ e $\sqrt{\varphi_{\min}} > 0.2$
<i>Compósito de carbono</i>	$(1.8 \leq x \leq 5, y = 0, z = 0)$	$ \mathbf{F}  > 10^4$ e $\sqrt{\varphi_{\min}} > 0.045$

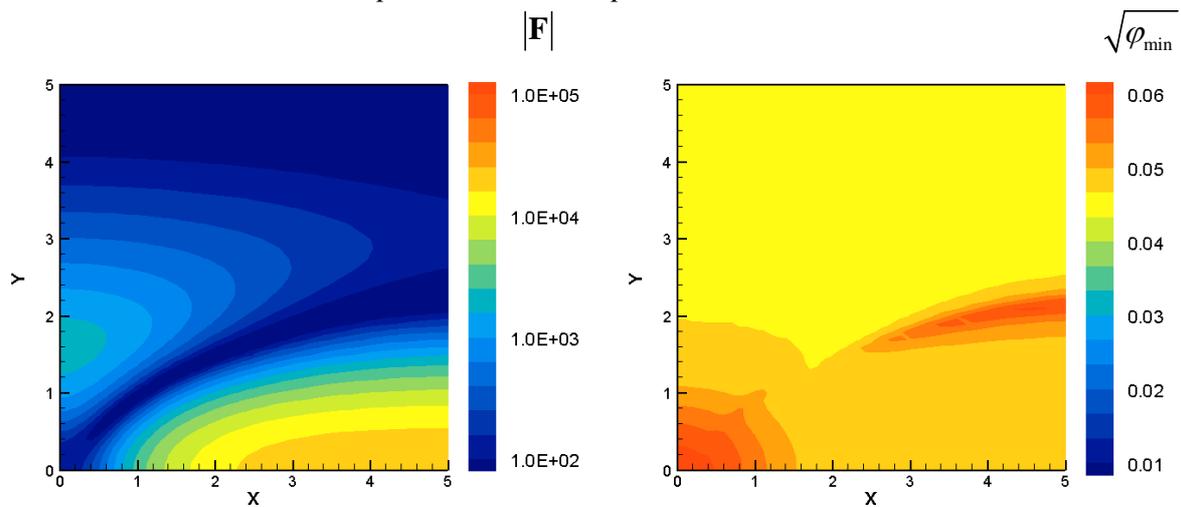
Nota-se a elevação sensível dos valores de  $|\mathbf{F}|$  e  $\sqrt{\varphi_{\min}}$  usados na definição dos critérios, usando a informação de três sensores. A inclusão de informações em proveniência de novos sensores não pode diminuir o condicionamento da matriz de informação. Por exemplo, o valor mínimo de  $|\mathbf{F}|$  ou  $\sqrt{\varphi_{\min}}$  obtido nas figuras 6.4.4-6 é sempre superior ou igual ao valor obtido para 2 sensores (ver figura 6.4.1-3). Sendo assim, pode-se repetir o procedimento definindo uma posição para o sensor 3, e procurar a determinar a posição do sensor 4 que seria susceptível de aumentar o condicionamento da matriz de informação.



*Figura 6.4.4: Condicionamento da matriz de informação em função de  $x$  e  $y$ , para 3 sensores e para o vidro.*



*Figura 6.4.5: Condicionamento da matriz de informação em função de  $x$  e  $y$ , para 3 sensores e para a alumina.*



*Figura 6.4.6: Condicionamento da matriz de informação em função de  $x$  e  $y$ , para 3 sensores e para o compósito de carbono.*

O procedimento de localização dos sensores sendo redundante e a câmera do experimento 1 podendo dispor de uma matriz de  $(128 \times 128)$  sensores, o condicionamento da matriz de informação é então analisado ativando um quarto da matriz de detecção focada no quarto de amostra (domínio matemático). Toda superfície não aquecida do corpo de prova é assim mapeada e o valor dos critérios D- e E-ótimos é avaliado no tempo final experimental  $t_f = 12$ . O valor dos critérios, para 4096 sensores ativados da câmera, é dado na tabela 6.4.4 em função do material:

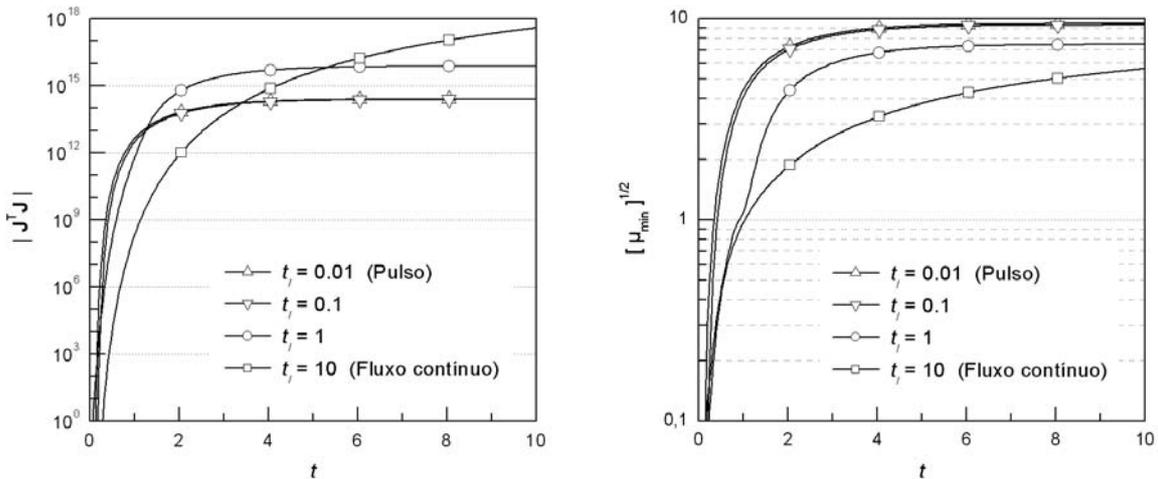
*Tabela 6.4.4: Critérios D- e E-ótimos usando 4096 sensores.*

MATERIAL	CRITÉRIO D-ÓTIMO	CRITÉRIO E-ÓTIMO
<i>Vidro</i>	$\max  \mathbf{F}  \approx 5.2 \times 10^{22}$	$\max \sqrt{\varphi_{\min}} \approx 14.5$
<i>Alumina</i>	$\max  \mathbf{F}  \approx 1.1 \times 10^{19}$	$\max \sqrt{\varphi_{\min}} \approx 7.7$
<i>Compósito de carbono</i>	$\max  \mathbf{F}  \approx 2.9 \times 10^{18}$	$\max \sqrt{\varphi_{\min}} \approx 1.5$

A tabela 6.4.4 mostra o aumento considerável dos critérios D- e E-ótimos ativando a matriz de detecção da câmera. Os resultados provam que o maior número possível de sensores deve ser usado para estimar as propriedades de materiais. A duração de aquecimento das amostras e a escolha do tempo final  $t_f$  do experimento são determinadas a seguir.

#### 6.4.2 Determinação do tempo de aquecimento e do tempo final do experimento

O tempo de aquecimento  $t_i$  ideal para a estimativa de parâmetros é determinado nesta seção. Para isto, a matriz de informação é avaliada para a alumina com passo de tempo constante, usando-se as informações anteriores disponíveis nos 4096 sensores da matriz de detecção. A frequência de aquisição de imagens é considerada fixa, inalterável, de 50 Hz. Só a duração do aquecimento por laser  $t_i$  pode ser alterada; os valores escolhidos são  $t_i = 0.01$ ,  $0.1$ ,  $1$  e  $10$ . A figura 6.4.7 mostra a evolução dos critérios de otimização para 5 parâmetros estimados em função do tempo de aquecimento.



*Figura 6.4.7: Condicionamento da matriz de informação em função do tempo de aquecimento para a alumina.*

A elevação dos critérios D- e E-ótimos é forte durante o período de aquecimento inicial da amostra. Para grandes tempos de aquecimento ( $t_f = 10$ ), os critérios continuam aumentando, porém com uma taxa menor e assintótica. Ao contrário, para tempos de aquecimento pequenos, não há mais informações disponíveis das medidas e os critérios atingem um patamar de valor determinado. Por isto, quando a amostra deixa de ser aquecida, como pode ser observado na figura 6.4.7 para os tempos de aquecimento  $t_f = 0.01$ ,  $0.1$  e  $1$ , os critérios aumentam de maneira brusca até atingirem valores constantes.

A análise do critério D-ótimo na figura 6.4.7 confirma a hipótese de que o fluxo contínuo gera a estimativa dos parâmetros com a menor região de confiança. Sendo assim, o tempo final de experimento  $t_f$  deve ser escolhido superior ao tempo necessário para entrar em regime permanente. A análise do critério E-ótimo confirma a hipótese contrária de que o pulso gera a estimativa dos parâmetros com maior precisão. Neste caso, o tempo final é escolhido quando o critério E-ótimo atinge seu patamar.

A contradição entre os critérios D- e E-ótimo indica a necessidade de realizar outros estudos mais aprofundados para determinar o perfil de fluxo que precisa ser usado no experimento 1. A tarefa é realizada comparando a evolução dos critérios para o pulso ( $t_f = 0.01$ ) e para o fluxo contínuo ( $t_f = t_f$ ), para os três materiais testes, e para 5 e mais parâmetros de escolha. Quatro diferentes conjuntos de parâmetros a serem estimados foram analisados, dependendo do tipo de material, conforme ilustrado na tabela 6.4.5.

*Tabela 6.4.5: Conjuntos de parâmetros a serem estimados para a otimização do experimento 1*

CONJUNTO	VIDRO	ALUMINA	COMPÓSITO DE CARBONO
<u>5 parâmetros:</u> $C, k_x, k_y, k_z$ e $Bi^{rad}$	✓	✓	✓
<u>6 parâmetros:</u> $C, k_x, k_y, k_z, Bi^{rad}$ e $\tau_0$	✓	✓	-
<u>7 parâmetros:</u> $C, k_x, k_y, k_z, Bi^{rad}, \tau_0$ e $\omega$	-	✓	-
<u>8 parâmetros:</u> $C, k_x, k_y, k_z, Bi^{rad}, \tau_0, \omega$ e $g$	-	✓	-

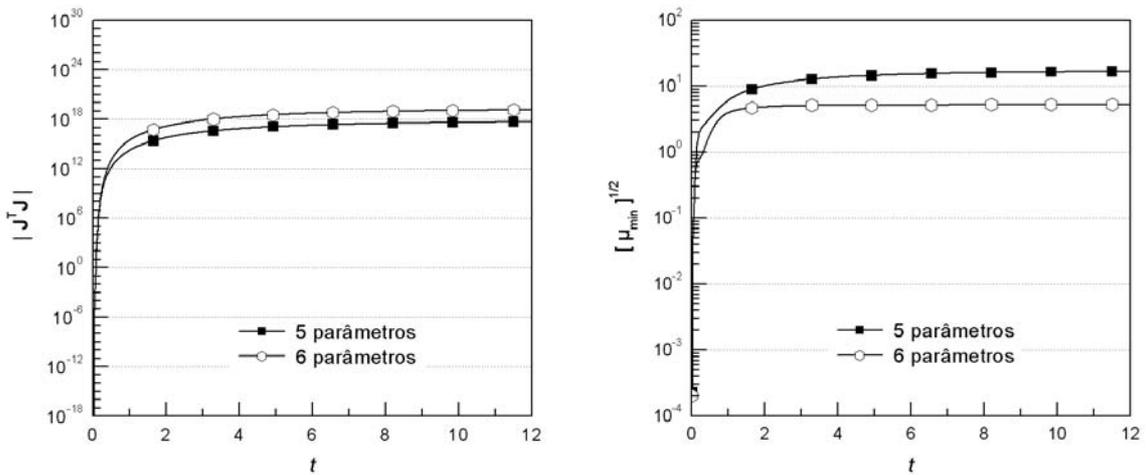
Como o espalhamento do vidro é nulo, de 5 a 6 parâmetros poderão ser estimados. Da mesma forma, os 5 parâmetros do primeiro conjunto poderão ser estimados no caso do carbono opaco.

A figura 6.4.8 mostra a evolução dos critérios de otimização para 5 e 6 parâmetros estimados simultaneamente. O tempo de aquecimento foi escolhido igual à  $t_l = 0.01$ , o que corresponde a um pulso de laser. Na figura 6.4.9, o aquecimento é constante. Ao comparar as figuras 6.4.8 e 6.4.9, o fluxo contínuo parece ser a forma de aquecimento apropriada para estimar 5 e 6 parâmetros. O determinante da matriz de informação, quando 6 parâmetros são estimados, atinge o valor  $2 \times 10^{25}$  com fluxo contínuo (este valor é susceptível de crescer escolhendo um tempo final maior), enquanto atinge o valor fixo  $1.5 \times 10^{19}$  para o pulso de laser. Da mesma forma, o critério E-ótimo atinge o valor 10.5 para o fluxo contínuo e atinge o valor 5.2 para o pulso de laser com o mesmo número de parâmetros estimados.

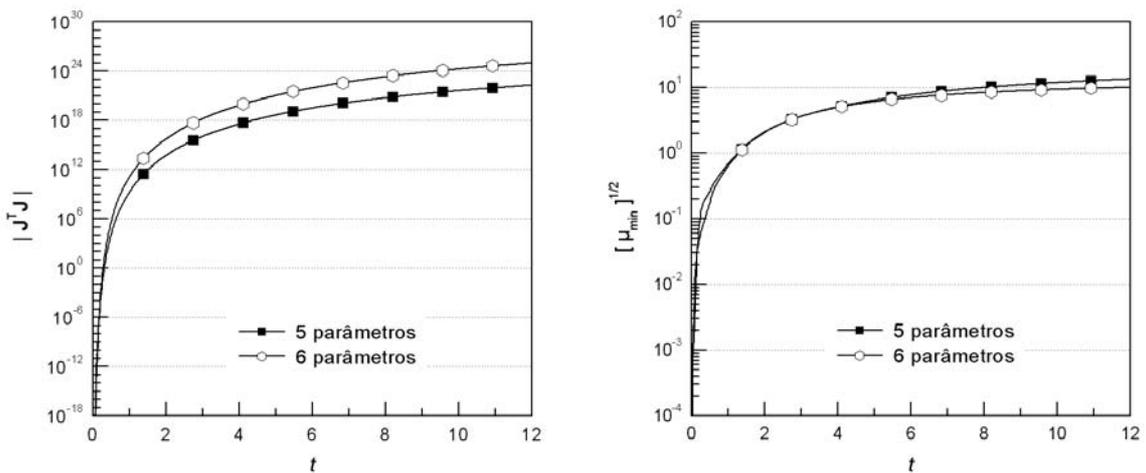
De um modo geral, o condicionamento da matriz de informação é melhor quando 6 parâmetros são estimados. Isto parece contradizer a observação feita na análise dos coeficientes de sensibilidade do vidro, seções 6.3.1.1 e 6.3.2.1, onde os coeficientes de sensibilidade normalizados relativos à espessura ótica pareciam nulos. A matriz de informação se baseia no produto da matriz de sensibilidade não normalizada. Apesar de não terem sido mostrados nas figuras 6.3.2-4 e 6.3.11-13, os coeficientes de sensibilidade definidos pela equação (5.1.11) têm a mesma ordem de magnitude que a temperatura, inclusive os coeficiente de sensibilidade com respeito à espessura ótica. Vale lembrar que a magnitude pequena dos coeficientes de sensibilidade normalizados

com respeito à  $\tau_0$  foi obtida devida a magnitude da espessura ótica (para o vidro:  $\tau_0 = 0.0025$ ).

Segundo os resultados obtidos para o critério E-ótimo com 5 parâmetros desconhecidos, o uso do flash ou do fluxo contínuo gera o mesmo nível de confiança para os resultados da estimativa, no tempo final de experimento  $t_f = 12$ . A incerteza sobre a estimativa do parâmetro  $Bi^{rad}$  usando o experimento 1 com o aquecimento flash é da mesma ordem que a incerteza sobre a estimativa do parâmetro  $k_z$  usando o experimento 1 com o fluxo contínuo. Os coeficientes de sensibilidade relativos aos respectivos parâmetros têm menor magnitude que os outros (ver seções 6.3.1.1 e 6.3.2.1).



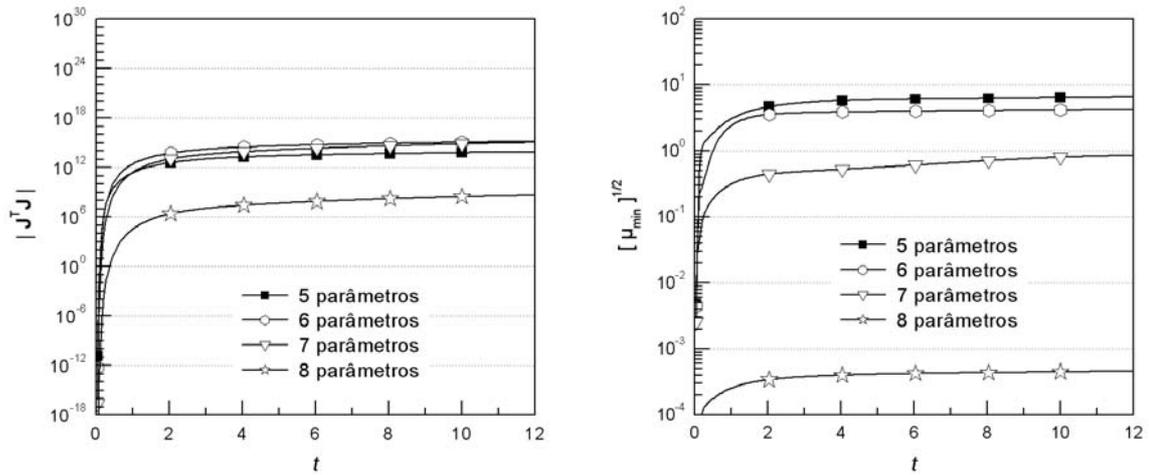
*Figura 6.4.8: Condicionamento da matriz de informação em função do número de parâmetros desconhecidos. Vidro,  $t_1 = 0.01$ .*



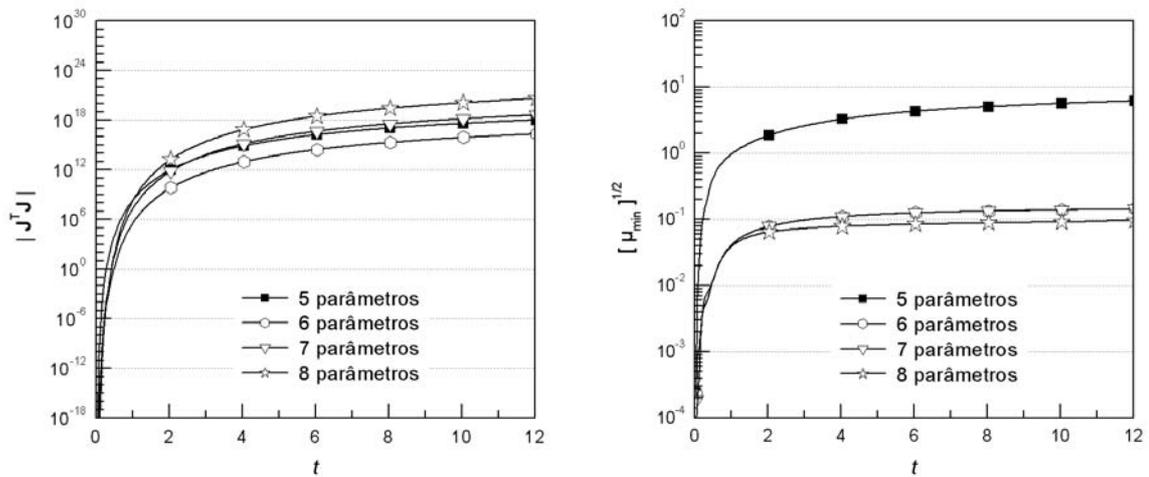
*Figura 6.4.9: Condicionamento da matriz de informação em função do número de parâmetros desconhecidos. Vidro,  $t_1 = t_f$ .*

A observação e a comparação das figuras 6.4.10 e 6.4.11, referentes ao material alumina, mostra resultados contraditórios com respeito otimização do experimento 1 pelos critérios D- e E-ótimos. A figura 6.4.11 mostra a possibilidade de estimar até 8 parâmetros com fluxo contínuo. Usando este perfil de fluxo, o determinante da matriz de informação atinge o valor mínimo  $3 \times 10^{17}$  para 6 parâmetros, enquanto atinge o valor máximo de  $1.5 \times 10^{15}$  usando o pulso de laser, como mostra a figura 6.4.10.

Observando a evolução do critério E-ótimo nas figuras 6.4.10-11, a estimativa de 5, 6 ou 7 parâmetros pelo experimento 1 gera resultados com menor intervalo de confiança quando o pulso de laser é usado. Para 7 ou menos parâmetros estimados, o critério atinge o valor 1. A contradição entre os critérios D- e E-ótimo ainda não permite afirmar qual perfil de fluxo deve ser usado para realizar o experimento 1.

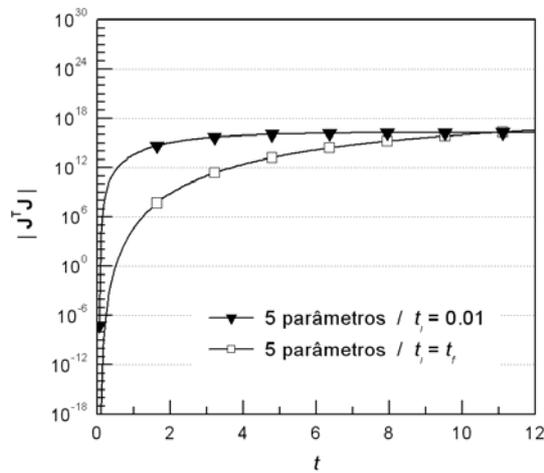


*Figura 6.4.10: Condicionamento da matriz de informação em função do número de parâmetros desconhecidos. Alumina,  $t_1 = 0.01$ .*

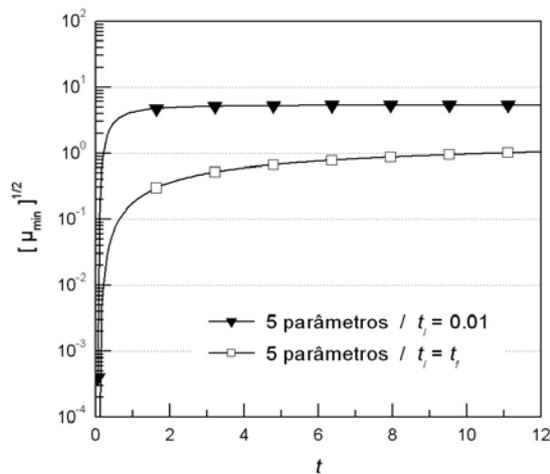


*Figura 6.4.11: Condicionamento da matriz de informação em função do número de parâmetros desconhecidos. Alumina,  $t_1 = t_f$ .*

A análise a seguir estende-se ao caso do compósito de carbono. Este material se torna interessante, não só porque sua condutividade varia com a direção, mas porque a utilização do pulso de laser gera uma estimativa mais acurada que a utilização do fluxo contínuo no experimento 1. Pelo menos, o critério D-ótimo atingido para o tempo adimensional  $t = 12$ , apresentado na figura 6.4.12, é idêntico para o experimento com pulso de laser e com fluxo contínuo, o valor atingido sendo  $2 \times 10^{16}$ . Se o tempo final for aumentado, os critérios D- e E-ótimos apresentam novamente comportamentos contraditórios: as propriedades, segundo o critério D-ótimo, estariam estimadas com mais precisão usando o fluxo contínuo.



*Figura 6.4.12: Critério D-ótimo para o compósito de carbono em função do tempo de aquecimento.*



*Figura 6.4.13: Critério E-ótimo para o compósito de carbono em função do tempo de aquecimento.*

Na continuação deste trabalho, o fluxo contínuo será usado como forma de aquecimento no experimento 1 para manter bom o condicionamento da matriz de informação para qualquer número de parâmetros desconhecidos. A utilização do flash não é apropriada ao modelo matemático do experimento 1: a geração de uma diferença de temperatura  $\Delta T_{\max}^*$  perceptível pela câmera ( $\approx 5$  K) na superfície  $\Gamma_5$  implica a geração de uma diferença de temperatura maior na superfície  $\Gamma_6$ . Dependendo do material, a perturbação necessária pode atingir 50 K. Neste caso, a aproximação linear introduzida nas equações (3.2.39-40) caracterizando as perdas de calor por convecção e por radiação não é mais representativa das perdas reais. Além das propriedades termofísicas serem diferentes com um intervalo de 50 K, a introdução de uma aproximação linear gera erros. Se o fluxo radiativo emitido pela superfície  $\Gamma_6$  for alterado inicialmente, o erro afeta indiretamente o campo inteiro de temperatura calculado no domínio matemático.

## 6.5 Estimativa dos Parâmetros Termofísicos

Após a identificação das condições experimentais ótimas feitas na seção 6.4 para identificar as propriedades termofísicas, utilizam-se agora os métodos de estimativa de parâmetros apresentados no Capítulo 5 com medidas simuladas de temperaturas transientes.

### 6.5.1 Comparação de métodos

Esta seção tem por objetivo identificar o método ou a composição de métodos que converge com a maior taxa e que apresenta a maior robustez em termos das estimativas iniciais usadas para os parâmetros no procedimento iterativo. Dependendo do método inverso utilizado, funções objetivo de tipo *mínimos quadrados (MQ)* ou *máximo a posteriori (MAP)* foram usadas. No entanto, ambas as funções envolvem o vetor de medidas  $\mathbf{Y}$ . No objetivo de validar o problema inverso, o vetor de medidas é previamente simulado usando a seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_{exato} + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Y}_{exato} + \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\Delta T}{2.576}\right) \quad (6.5.1)$$

onde  $\mathbf{Y}_{exato}$  é o vetor de temperaturas calculadas através da solução do problema direto com os valores exatos dos parâmetros de interesse (ver tabela 6.5.1).  $\omega$  é um vetor de mesmo tamanho que  $\mathbf{Y}_{exato}$  composto de números aleatórios com distribuição gaussiana, média nula e desvio padrão unitário, obtido usando o método de *Box-Muller* [68]. Para um intervalo de 99 % de nível de confiança,  $\omega$  assume um valor entre  $[-2.576; 2.576]$ . Por isso,  $\omega$  é multiplicada pelo suposto desvio padrão das medidas de temperatura,  $\sigma$ , tomado como constante e relacionado com a incerteza das medidas de temperatura  $\Delta T$ . Para os casos estudados neste trabalho é utilizado o valor de incerteza  $\Delta T = \pm 2$  K para a geração das medidas simuladas, o que corresponde a incerteza de leitura de temperatura feita por câmera infravermelha com sensor GaAs em temperatura ambiente e em altas temperaturas.

Outros dados, descritos na tabela 6.5.1 abaixo, foram utilizados para simular as medidas de temperatura. Esses dados dizem respeito às condições experimentais úteis para a solução do problema direto. As propriedades térmicas escolhidas para o material teste a ser usado nesta comparação de métodos são representativas de uma alumina [129]. Tais propriedades também são apresentadas na tabela 6.5.1. Usando os dados experimentais apresentados na tabela 6.5.1, diversos métodos são analisados na tentativa de estimar de 5 parâmetros:  $C^*$ ,  $k_x^*$ ,  $k_y^*$ ,  $k_z^*$  e  $h^{rad*}$ . As temperaturas experimentais são tomadas na face oposta à face aquecida pelo laser. Os parâmetros são estimados dentro de intervalos especificados na tabela 6.5.2 e definidos de acordo com a geometria da mostra e as limitações experimentais.

Nesta análise, 8 técnicas são comparadas, como mostrado na tabela 6.5.3. Estas técnicas envolvem o método de Gauss com função objetivo máximo a posteriori, o método de Levenberg-Marquardt com função objetivo mínimos quadrados, assim como o método Híbrido descrito na seção 5.3 com a mesma função objetivo [173]. Nota-se que o método Híbrido resolve um problema direto condutivo “C”, cuja solução é dada analiticamente pela equação (A.1.4) do Apêndice A, com as simplificações dadas pelas equações (A.3.1,2). No objetivo de acelerar a execução do método Híbrido e diminuir o tempo de avaliação do problema direto a menos de 1s, a temperatura é calculada somente nas posições de 128 sensores da matriz de detecção da câmera que pertencem às linhas de coordenadas  $(y^* = 0, 0 \leq x^* \leq a^*)$  e  $(x^* = 0, 0 < y^* \leq b^*)$  respectivamente.

Aproximadamente 25000 avaliações do problema direto são realizadas em 50 iterações com o método Híbrido, usando uma população total de 500 partículas. Outros tamanhos

*Tabela 6.5.1: Dados para a simulação de experimento.*

<u>Dimensões da amostra:</u>		
$2a^* = 10^{-2} \text{ m}$ , $2b^* = 10^{-2} \text{ m}$ , $c^* = 10^{-3} \text{ m}$ .		
<u>Propriedades termofísicas do material:</u>		
$C^* = 2.5 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$ ,		
$k_x^* = k_y^* = k_z^* = 5 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ,		
$\kappa_a^* = 10 \text{ m}^{-1}$ (material cinza),		
$\sigma_s^* = 10^4 \text{ m}^{-1}$ (material cinza),		
$g = 0.7$ (função de fase Henyey-Greestein),		
$n_r = 1.5$ (material cinza).		
<u>Propriedades da tinta protetora:</u>		
$\varepsilon = 1$ .		
<u>Condições experimentais:</u>		
Temperatura inicial da amostra: $T_0^* = 1800 \text{ K}$ ,		
Temperatura do meio ambiente: $T_\infty^* = 1800 \text{ K}$ ,		
Variação máxima de temperatura na amostra: $\Delta T_{\max}^* = 5 \text{ K}$ ,		
Coeficiente de transferência de calor: $h^{rad*} = 1373 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ,		
Potência do feixe laser: $Q_l^* = 0.25 \text{ W}$ ,		
Duração do fluxo laser: $t_l^* = 20 \text{ s}$ ,		
Raio do feixe laser (distribuição gaussiana): $r_l^* = 2 \times 10^{-3} \text{ m}$ ,		
Duração do experimento: $t_f^* = 20 \text{ s}$ .		
<u>Medição de temperaturas por Câmera Infravermelha:</u>		
Tamanho da superfície focada: $10^{-2} \text{ m} \times 10^{-2} \text{ m}$ ,		
Matriz de detecção: $128 \times 128$ pixels,		
Frequência de aquisição: $50 \text{ Hz}$ ,		
Incerteza sobre as temperaturas aquisitadas: $\Delta T = \pm 2 \text{ K}$ .		

*Tabela 6.5.2: Valores limites atribuídos para os parâmetros.*

$P_j$	Valor mínimo	Valor máximo
$C^*$	$0.1 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$	$10 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$
$k_x^*$	$0.1 \text{ W/m} \cdot \text{K}$	$100 \text{ W/m} \cdot \text{K}$
$k_y^*$	$0.1 \text{ W/m} \cdot \text{K}$	$100 \text{ W/m} \cdot \text{K}$
$k_z^*$	$0.1 \text{ W/m} \cdot \text{K}$	$100 \text{ W/m} \cdot \text{K}$
$h^{rad*}$	$5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$	$5000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$

de população foram testados, não assegurando a convergência do método híbrido para 90 % dos casos.

Por outro lado, os métodos de Levenberg-Marquardt e de Gauss utilizam o problema de condução com radiação acoplada “C+R”, formulado na seção 3.3.3, para resolver o problema direto e o gradiente. A solução é obtida numericamente pelo método FVM descrito no Capítulo 4, com a malha  $(N_x \times N_y \times N_z) \times N_t = (25 \times 25 \times 25) \times 48$ . O campo de temperatura transiente é simulado na face inferior da amostra, e comparado com imagens de  $(64 \times 64)$  sensores armazenadas com frequência de 50 Hz.

O custo computacional sendo muito grande devido à solução sistemática da ETR, o cálculo do gradiente foi reduzido para acelerar o tempo de convergência dos métodos de tipo gradiente. Para o cálculo do gradiente reduzido, o divergente do fluxo de calor por radiação é calculado de maneira aproximada. Neste caso, o divergente é calculado com os valores dos parâmetros estimados a cada iteração. Além disso, considera-se que as perturbações nos valores dos parâmetros necessárias para o cálculo do gradiente por diferenças finitas avançadas segundo a equação (5.4.1), não afetam o divergente do fluxo de calor por radiação. O efeito do gradiente aproximado sobre o processo de convergência é observado comparando os resultados das técnicas 1-2, 3-4, 5-6 e 7-8, na tabela 6.5.4.

As técnicas de 1 a 4 usam um único método para estimar os parâmetros. As técnicas 1 e 2 usam o método de Levenberg-Marquardt com função objetivo *Mínimos Quadrados* e as técnicas 3 e 4 usam o método de Gauss com função objetivo *Maximum a Posteriori*. Nota-se que nas técnicas 1 e 3 o gradiente é reduzido como descrito anteriormente. Para o método de Gauss, os parâmetros e as variâncias a priori, com 99 % de nível de confiança, são escolhidos idênticos aos parâmetros da estimativa inicial. As técnicas de 5 a 8 usam a combinação do método Híbrido com os métodos de Levenberg-Marquardt ou de Gauss, conforme descrito no Capítulo 5. A estimativa obtida pelo método híbrido serve de estimativa inicial para um destes dois métodos de gradiente. Para o método de Gauss aplicado à função objetivo máximo a posteriori, os parâmetros e as variâncias a priori, com 99 % de nível de confiança, são tomados iguais aos parâmetros estimados pelo método Híbrido. As técnicas 5 e 6 usam o método Híbrido como 1º passo e o método de Levenberg-Marquardt com função objetivo

mínimos-quadrados como 2º passo, enquanto as técnicas 7 e 8 usam o método Híbrido como 1º passo e o método de Gauss com função objetivo máximo a posteriori como 2º passo, sendo o gradiente do 2º passo reduzido nas técnicas 5 e 7.

*Tabela 6.5.3: Técnicas de estimativa.*

<b>Técnica</b>	<b>Método utilizado</b>	<b>Função objetivo</b>	<b>Modelo para o cálculo do problema direto</b>	<b>Modelo para o cálculo do gradiente</b>
1	Levenberg-Marquardt	MQ	C+R	C+R reduzido
2	Levenberg-Marquardt	MQ	C+R	C+R
3	Gauss	MAP	C+R	C+R reduzido
4	Gauss	MAP	C+R	C+R
5	<i>1º passo:</i> Híbrido	MQ	C	C
	<i>2º passo:</i> Levenberg-Marquardt		C+R	C+R reduzido
6	<i>1º passo:</i> Híbrido	MQ	C	C
	<i>2º passo:</i> Levenberg-Marquardt		C+R	C+R
7	<i>1º passo:</i> Híbrido	MQ	C	C
	<i>2º passo:</i> Gauss	MAP	C+R	C+R reduzido
8	<i>1º passo:</i> Híbrido	MQ	C	C
	<i>2º passo:</i> Gauss	MAP	C+R	C+R

A tabela 6.5.4 apresenta a comparação dos resultados obtidos com as técnicas de 1-8 para a capacidade térmica volumétrica, as três componentes da condutividade térmica e o coeficiente de transferência de calor na forma dimensional. Além do resultado das estimativas, apresenta-se o número de iterações necessário para os métodos convergirem acompanhado do tempo CPU. Os programas foram rodados em um computador Pentium IV HT 2.8 GHz. Para todas as técnicas, a estimativa inicial foi escolhida próxima ao vetor de parâmetros exato (ver tabela 6.5.1), isto é:  $C^{*0} = 2.8 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$ ,  $k_x^{*0} = k_y^{*0} = k_z^{*0} = 8 \text{ W/m.K}$  e  $h^{rad*0} = 800 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ . Os resultados nas técnicas 5-8 são apresentados em duas linhas, correspondendo respectivamente aos dois passos usados na aplicação da combinação do método Híbrido com os outros métodos (ver Capítulo 5).

*Tabela 6.5.4: Resultados obtidos com estimativa inicial próxima aos parâmetros exatos.*

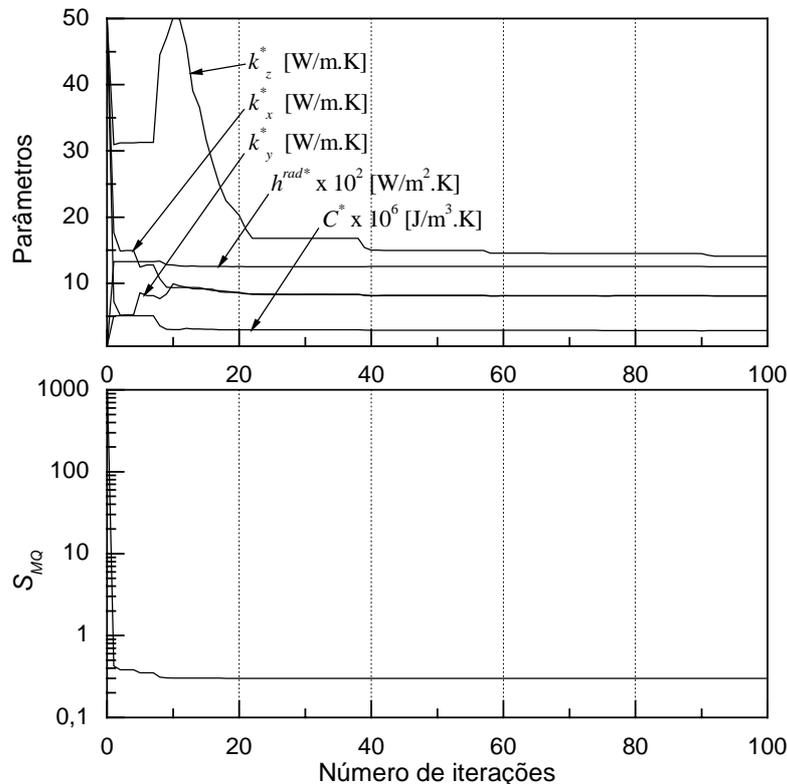
Técnica	Número de iterações	Tempo CPU	Estimativa				
			$C^* \times 10^6$ J/m <sup>3</sup> .K	$k_x^*$ W/m.K	$k_y^*$ W/m.K	$k_z^*$ W/m.K	$h^{rad*}$ W/m <sup>2</sup> .K
1	16	78h 77'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
2	16	87h 05'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
3	13	63h 59'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
4	6	32h 49'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
5	50	1h 29'	2.97 ± 0.02	8.73 ± 0.02	8.74 ± 0.02	15.0 ± 0.1	1208 ± 1
	15	73h 29'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
6	50	1h 29'	2.97 ± 0.02	8.73 ± 0.02	8.74 ± 0.02	15.0 ± 0.1	1208 ± 1
	16	86h 22'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
7	50	1h 29'	2.97 ± 0.02	8.73 ± 0.02	8.74 ± 0.02	15.0 ± 0.1	1208 ± 1
	11	54h 09'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
8	50	1h 29'	2.97 ± 0.02	8.73 ± 0.02	8.74 ± 0.02	15.0 ± 0.1	1208 ± 1
	5	27h 21'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3

A tabela 6.5.4 mostra a eficiência de todas as técnicas quando a estimativa inicial é próxima aos parâmetros exatos do problema: os resultados, dentro do intervalo de confiança, possuem a incerteza de 1 % do valor do parâmetro para os parâmetros  $C^*$ ,  $k_x^*$  e  $k_y^*$  e de 3 % para os parâmetros  $k_z^*$  e  $h^{rad*}$ . A comparação dos resultados das técnicas 1-2 e 5-6 revela uma diminuição do tempo computacional quando o gradiente é aproximado no método de Levenberg-Marquardt, sem afetar o número de iterações nem a precisão dos resultados. O fenômeno contrário é observado quando o método de Gauss é aplicado: comparando os resultados das técnicas 3-4 e 7-8, observa-se um nítido aumento do número de iterações, e por consequência do tempo CPU para atingir a convergência, quando o gradiente reduzido é utilizado nestes casos. No entanto, a utilização do gradiente simplificado não afeta a precisão dos resultados. A simplificação do gradiente, ao invés de reduzir o tempo computacional, teve como efeito reduzir a taxa de convergência devido à falta de precisão no gradiente, quando o método de Gauss é usado.

A tabela 6.5.4 mostra que o uso das técnicas 5-8, com processo de minimização dividido em dois passos, aumenta o tempo CPU em aproximadamente 1 hora e 30 minutos, sem melhorar a precisão dos resultados. Isto ocorre sempre que a estimativa

inicial estiver próxima dos parâmetros exatos. Se a estimativa inicial estiver longe dos parâmetros exatos do problema, as técnicas 1-4 podem convergir para um mínimo local e não para o mínimo global da função objetivo considerada. Isto acontece, por exemplo, considerando os seguintes parâmetros iniciais:  $C^{*0} = 0.1 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$ ,  $k_x^{*0} = k_y^{*0} = k_z^{*0} = 50 \text{ W/m.K}$  e  $h^{rad*0} = 5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ , como mostrado nos resultados apresentados na tabela 6.5.5.

A tabela 6.5.5 ainda mostra que somente as técnicas construídas em dois passos convergem quando a estimativa inicial se afasta dos parâmetros exatos: os resultados obtidos do método híbrido fornecem uma estimativa inicial bastante próxima dos parâmetros exatos para assegurar a convergência na 2ª etapa do problema inverso. Para uma população de 500 partículas, foi assumido um número de iterações máximo para o método híbrido de 50 iterações: como pode ser visto na figura 6.5.1, o mínimo da norma dos mínimos-quadrados já foi alcançado logo nas primeiras iterações. Porém, a convergência para os parâmetros só foi alcançada após aproximadamente 40 iterações.



*Figura 6.5.1: Evolução do funcional e dos parâmetros dimensionais para o método híbrido com estimativa inicial longe dos parâmetros exatos.*

Comparando os resultados obtidos no final do 1º passo das técnicas 5-8, tabelas 6.5.4 e 6.5.5, verifica-se que a estimativa de parâmetros no 1º passo corresponde ao mínimo global da norma dos mínimos quadrados para o modelo com apenas a condução. De um modo geral, a redução do gradiente no 2º passo das técnicas 5 e 7 não afeta a precisão dos resultados, mas tende a aumentar o número de iterações para a convergência. Ao comparar os resultados das técnicas 5-6 e 7-8, nota-se que o método de Gauss com função objetivo máximo a posteriori converge com menos iterações para o mínimo global que o método de Levenberg-Marquardt com função objetivo Mínimos-Quadrados. Isto se deve provavelmente ao fato de que, com a função objetivo máximo a posteriori, a informação a respeito dos parâmetros obtida no 1º passo, através de uma média e de uma variância, é levada em consideração no 2º passo para a maximização da distribuição a posteriori dos parâmetros, que caracteriza um estimador Bayesiano [163].

*Tabela 6.5.5: Resultados obtidos com estimativa inicial longe dos parâmetros exatos.*

Técnica	Número de iterações	Tempo CPU	Estimativa				
			$C^* \times 10^6$ J/m <sup>3</sup> .K	$k_x^*$ W/m.K	$k_y^*$ W/m.K	$k_z^*$ W/m.K	$h^{rad*}$ W/m <sup>2</sup> .K
1	NC <sup>(1)</sup>	-	-	-	-	-	-
2	NC <sup>(1)</sup>	-	-	-	-	-	-
3	NC <sup>(1)</sup>	-	-	-	-	-	-
4	NC <sup>(1)</sup>	-	-	-	-	-	-
5	50	1h 48'	3.00 ± 0.02	8.77 ± 0.02	8.79 ± 0.02	14.9 ± 0.1	1196 ± 1
	21	114h18'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
6	50	1h 48'	3.00 ± 0.02	8.77 ± 0.02	8.79 ± 0.02	14.9 ± 0.1	1196 ± 1
	16	86h 54'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
7	50	1h 48'	3.00 ± 0.02	8.77 ± 0.02	8.79 ± 0.02	14.9 ± 0.1	1196 ± 1
	10	54h 42'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
8	50	1h 48'	3.00 ± 0.02	8.77 ± 0.02	8.79 ± 0.02	14.9 ± 0.1	1196 ± 1
	5	27h 13'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3

<sup>(1)</sup> NC = Não convergiu.

Ao analisar os resultados das tabelas 6.5.4 e 6.5.5, nota-se que a aproximação do gradiente não contribui sempre para reduzir o tempo computacional. A maneira mais indicada para reduzir o número de iterações, e conseqüentemente o tempo

computacional, é usar o método de Gauss com função objetivo Maximum a Posteriori. Por outro lado, as técnicas divididas em dois passos devem ser utilizadas sistematicamente a fim de garantir a convergência no 2º passo: os resultados do método Híbrido, próximos aos parâmetros exatos, são então introduzidos como estimativa inicial e informação a priori no 2º passo. Conseqüentemente, a técnica 8, por ser a mais robusta e a mais veloz [173], foi escolhida para estimar os parâmetros  $C^*$ ,  $k_x^*$ ,  $k_y^*$ ,  $k_z^*$  e  $h^{rad*}$  com outros materiais teste, conforme apresentado na seção seguinte.

## 6.5.2 Validação do problema inverso

A técnica 8, envolvendo o esquema de 2 passos descritos no Capítulo 5, onde no primeiro passo utiliza-se o método Híbrido com modelo direto simplificado e no segundo passo o método de Gauss aplicado à função objetivo máximo a posteriori, é agora testada na estimativa das propriedades condutivas para diversos materiais.

### 6.5.2.1 Influência do material

Com o objetivo de avaliar a Técnica 8 na solução do problema inverso com diferentes materiais a altas temperaturas, três arquivos de medidas simuladas foram gerados, seguindo o procedimento descrito na seção anterior. O vidro, a cerâmica de alumina e o compósito de carbono ortotrópico são escolhidos nesta seção para gerar os arquivos de medidas. As amostras, cobertas por uma tinta de grafite de emissividade  $\varepsilon = 1$ , conservam o tamanho definido na seção 6.5.1, isto é,  $2a^* = 10^{-2}$  m,  $2b^* = 10^{-2}$  m e  $c^* = 10^{-3}$  m. Os dados relacionados à câmera infravermelha também são assumidos idênticos aos mencionados na tabela 6.5.1, como, por exemplo, a incerteza sobre as medidas de temperatura de valor  $\Delta T = \pm 2$  K. As demais condições experimentais não mencionadas na tabela 6.5.6 podem ser consultadas na tabela 6.5.1.

A tabela 6.5.6 mostra os resultados da estimativa de parâmetros  $C^*$ ,  $k_x^*$ ,  $k_y^*$ ,  $k_z^*$  e  $h^{rad*}$  para o vidro a temperatura de 800 K. As estimativas que resultam do primeiro e segundo passo da técnica 8 foram separadas em duas colunas: a 3ª coluna da tabela mostra a estimativa dos parâmetros pelo método Híbrido com modelo simplificado de condução e a 4ª coluna mostra a estimativa dos parâmetros pelo método de Gauss com modelo acoplado de condução e radiação.

Para o método de Gauss, o modelo de condução-radiação completo é programado para calcular o gradiente. A tabela 6.5.6 foi dividida em 4 blocos, a saber: a), b), c), e d), de maneira a diferenciar as estimativas iniciais. A estimativa inicial no bloco a) é considerada próxima dos valores exatos dos parâmetros. Nota-se que a estimativa inicial já foi utilizada na seção 6.5.1 para comparar as técnicas de solução do problema inverso. A estimativa inicial no bloco b) ao contrário é considerada longe dos valores exatos dos parâmetros, e foi utilizada também na seção 6.5.1 para comparar as técnicas entre si e demonstrar que a utilização de um método de tipo gradiente não permitia resolver o problema inverso sem ajuda do método Híbrido. As estimativas iniciais, nos blocos c) e d), são escolhidas neste sentido: consideradas como valores iniciais difíceis, os métodos de tipo gradiente não obtiveram convergência para os parâmetros esperados.

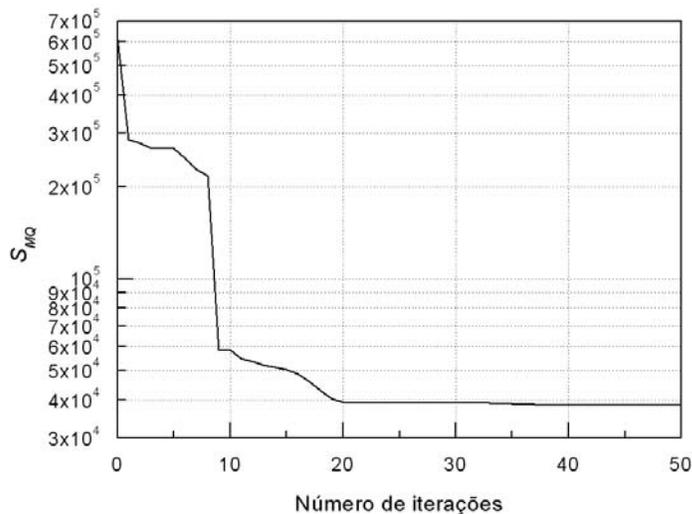
Os resultados obtidos na tabela 6.5.6 mostram a excelente convergência da técnica 8 para todas as estimativas iniciais, com um tempo CPU de aproximadamente 7h. No entanto, os resultados obtidos no 1º passo para o parâmetro  $k_z^*$  apresentam um erro maior que 100 %, usando as estimativas iniciais dadas nos blocos a) e d). Os resultados obtidos depois do primeiro passo variam também com a estimativa inicial, mostrando uma pequena influência deste sobre a taxa de convergência do método Híbrido. A proximidade da estimativa inicial com um mínimo local diminui a probabilidade de um vetor da população inicial de encontrar outro mínimo. Conseqüentemente, novas gerações da população são geradas próxima a estimativa inicial, diminuindo a taxa de convergência em direção do mínimo global. Por isso, ocorrem marchas características de métodos probabilísticos durante o processo de minimização, onde os vetores de parâmetros produzidos não conseguem encontrar valores mínimos do funcional, como o mostra a figura 6.5.2 através do histórico de minimização do funcional  $S_{MQ}$  pelo método Híbrido com a estimativa inicial a). A convergência do método é ainda dificultada no 1º passo devido à pequena magnitude dos coeficientes de sensibilidade com relação ao parâmetro  $k_z^*$ . Por isso, este é o parâmetro estimado no 1º passo com o maior erro e também com a maior incerteza. No entanto, o método Híbrido, e seu principal componente o método Enxame de Partículas, é um método robusto na procura do mínimo global da função objetivo. Por isto, ele se torna um módulo

Tabela 6.5.6: Estimativa dos parâmetros do vidro.

$P_j$	Estimativa inicial	Estimativa pelo método Híbrido	Estimativa pelo método de Gauss
$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$2.8 \times 10^6$	$2.58 \times 10^6 \pm 0.01 \times 10^6$	$2.20 \times 10^6 \pm 0.01 \times 10^6$
$k_x^*$ [W/m.K]	8	$2.22 \pm 0.01$	$1.50 \pm 0.01$
$k_y^*$ [W/m.K]	8	$2.20 \pm 0.01$	$1.50 \pm 0.01$
$k_z^*$ [W/m.K]	8	$5.63 \pm 0.01$	$1.50 \pm 0.03$
$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	800	$123 \pm 1$	$131 \pm 1$
a)		# iterações: 50 $S_{MO}: 6.081 \times 10^5 \rightarrow 3.851 \times 10^4$ CPU: 1h 36'	# iterações: 8 $S_{MAP}: 4.319 \times 10^6 \rightarrow 4.105 \times 10^6$ CPU: 5h 53'
$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$0.1 \times 10^6$	$2.40 \times 10^6 \pm 0.01 \times 10^6$	$2.20 \times 10^6 \pm 0.01 \times 10^6$
$k_x^*$ [W/m.K]	50	$2.00 \pm 0.01$	$1.50 \pm 0.01$
$k_y^*$ [W/m.K]	50	$1.98 \pm 0.01$	$1.50 \pm 0.01$
$k_z^*$ [W/m.K]	50	$2.73 \pm 0.01$	$1.50 \pm 0.03$
$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	5	$129 \pm 1$	$131 \pm 1$
b)		# iterações: 50 $S_{MO}: 6.173 \times 10^7 \rightarrow 3.844 \times 10^4$ CPU: 2h 27'	# iterações: 7 $S_{MAP}: 4.202 \times 10^6 \rightarrow 4.105 \times 10^6$ CPU: 5h 09'
$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$0.1 \times 10^6$	$2.45 \times 10^6 \pm 0.01 \times 10^6$	$2.20 \times 10^6 \pm 0.01 \times 10^6$
$k_x^*$ [W/m.K]	0.5	$2.02 \pm 0.01$	$1.50 \pm 0.01$
$k_y^*$ [W/m.K]	0.5	$2.01 \pm 0.01$	$1.50 \pm 0.01$
$k_z^*$ [W/m.K]	0.5	$2.87 \pm 0.01$	$1.50 \pm 0.03$
$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	5	$128 \pm 1$	$131 \pm 1$
c)		# iterações: 50 $S_{MO}: 8.870 \times 10^7 \rightarrow 3.845 \times 10^4$ CPU: 1h 46'	# iterações: 6 $S_{MAP}: 4.208 \times 10^6 \rightarrow 4.105 \times 10^6$ CPU: 4h 26'
$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$10 \times 10^6$	$2.61 \times 10^6 \pm 0.01 \times 10^6$	$2.20 \times 10^6 \pm 0.01 \times 10^6$
$k_x^*$ [W/m.K]	0.5	$2.24 \pm 0.01$	$1.50 \pm 0.01$
$k_y^*$ [W/m.K]	50	$2.21 \pm 0.01$	$1.50 \pm 0.01$
$k_z^*$ [W/m.K]	0.5	$7.24 \pm 0.02$	$1.50 \pm 0.03$
$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	5000	$125 \pm 1$	$131 \pm 1$
d)		# iterações: 50 $S_{MO}: 9.698 \times 10^5 \rightarrow 3.859 \times 10^4$ CPU: 1h 41'	# iterações: 8 $S_{MAP}: 4.312 \times 10^6 \rightarrow 4.105 \times 10^6$ CPU: 5h 54'

essencial, mesmo que acoplado ao método de Gauss em um segundo passo, para resolver o problema inverso.

A introdução de uma estimativa grosseira do parâmetro  $k_z^*$  não influencia a obtenção de resultados satisfatórios pelo método de Gauss, apesar do método convergir com algumas iterações suplementares e de reduzir de maneira pouca significativa a função máximo a posteriori. A prescrição de valores limites dos parâmetros, dados na tabela 6.5.2, permitiu, no caso do vidro, controlar as oscilações no processo de estimativa devidas a grande diferença entre a estimativa inicial e os valores exatos. Outra maneira de controlar as oscilações é diminuir os valores na diagonal da matriz de covariância  $\mathbf{V}$  dos parâmetros, levando em conta, por exemplo, as incertezas sobre os parâmetros intermediários. Mas a importância atribuída à informação a priori causaria o efeito indesejável de orientar a estimativa em direção dos parâmetros a priori.



*Figura 6.5.2: Evolução do funcional para o método Híbrido com estimativa inicial próxima dos parâmetros exatos.*

Os resultados para a alumina, apresentados na tabela 6.5.7, têm uma excelente precisão: apesar de não aparecer de forma explícita, o erro na estimativa final de parâmetros foi de apenas 0.1 % com relação aos parâmetros exatos. As incertezas obtidas, com 99 % de nível de confiança, são da ordem de 1 % dos parâmetros exatos. No entanto, pode-se observar, depois do 1º passo, que o parâmetro  $k_z^*$  foi novamente estimado com um erro maior que 100 % devido à forte participação radiativa no problema direto e a pequena magnitude dos

coeficientes de sensibilidade com relação a este parâmetro. Os resultados intermediários desta vez foram obtidos parecidos, independentemente da estimativa inicial. Isto mostra que as estimativas de parâmetros do vidro realizadas no 1º passo, tabela 6.5.6.a) e d), convergiram para um mínimo local, e que um número maior de iterações eram necessárias para o método convergir para o mínimo global. O tempo médio para completar uma iteração pelo método de Gauss aumentou em média de 45' no caso do vidro para 5h 30' no caso da alumina, mostrando a influência do espalhamento sobre a taxa de convergência da solução explícita da ETR [48]. Neste exemplo o albedo prescrito para a alumina é 0.999.

O tempo para estimar os parâmetros do compósito de carbono é apresentado na tabela 6.5.8. Aproximadamente 30 minutos são necessários para o método de Gauss convergir. O modelo desacoplado de condução é aplicado no 2º passo para avaliar o problema direto e o gradiente. Por isso, os resultados intermediários são muito próximos dos parâmetros exatos, já que não transferência de calor por radiação dentro do compósito de carbono. Porém, estes resultados são estimados fora do intervalo de confiança, devido a dois fatores. O primeiro fator é relativo à discrepância pequena existente entre a solução numérica e a solução analítica do problema de condução que é de aproximadamente 0.001 K. Multiplicada por 4096 sensores e por 1000 imagens armazenadas durante todo experimento, a discrepância induz uma modificação importante no valor do funcional, alterando a estimativa dos parâmetros. O segundo fator corresponde à limitação do número de iterações para o método híbrido. Apesar disso, a estimativa do método Híbrido providência uma excelente estimativa inicial para o método de Gauss, permitindo a convergência da técnica 8 para o carbono.

#### 6.5.2.2 Influência da repetição de um experimento

Nesta seção são analisados os resultados para várias repetições de um mesmo experimento. Os parâmetros exatos são esperados como solução do problema inverso. O objetivo é detectar a possibilidade da técnica 8 falhar com a repetição de uma mesma estimativa. Vinte repetições do mesmo experimento foram realizadas, sendo o arquivo de medidas simuladas modificado a cada repetição onde o material considerado foi a alumina.

Tabela 6.5.7: Estimativa dos parâmetros da alumina.

$P_j$	Estimativa inicial	Estimativa pelo método Híbrido	Estimativa pelo método de Gauss
$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$2.8 \times 10^6$	$2.97 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$
$k_x^*$ [W/m.K]	8	8.73 $\pm$ 0.02	5.00 $\pm$ 0.06
$k_y^*$ [W/m.K]	8	8.74 $\pm$ 0.02	5.00 $\pm$ 0.06
$k_z^*$ [W/m.K]	8	15.03 $\pm$ 0.09	5.00 $\pm$ 0.16
$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	800	1208 $\pm$ 1	1373 $\pm$ 3
a)		# iterações: 50 $S_{MO}$ : $6.515 \times 10^4 \rightarrow 3.829 \times 10^4$ CPU: 1h 29'	# iterações: 5 $S_{MAP}$ : $4.402 \times 10^6 \rightarrow 4.102 \times 10^6$ CPU: 27h 21'
$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$0.1 \times 10^6$	$3.00 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$
$k_x^*$ [W/m.K]	50	8.77 $\pm$ 0.02	5.00 $\pm$ 0.06
$k_y^*$ [W/m.K]	50	8.79 $\pm$ 0.02	5.00 $\pm$ 0.06
$k_z^*$ [W/m.K]	50	14.88 $\pm$ 0.09	5.00 $\pm$ 0.16
$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	5	1196 $\pm$ 1	1373 $\pm$ 3
b)		# iterações: 50 $S_{MO}$ : $1.746 \times 10^9 \rightarrow 3.829 \times 10^4$ CPU: 1h 48'	# iterações: 5 $S_{MAP}$ : $4.432 \times 10^6 \rightarrow 4.102 \times 10^6$ CPU: 27h 12'
$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$0.1 \times 10^6$	$2.84 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$
$k_x^*$ [W/m.K]	0.5	8.45 $\pm$ 0.02	5.00 $\pm$ 0.06
$k_y^*$ [W/m.K]	0.5	8.46 $\pm$ 0.02	5.00 $\pm$ 0.06
$k_z^*$ [W/m.K]	0.5	12.47 $\pm$ 0.06	5.00 $\pm$ 0.16
$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	5	1204 $\pm$ 1	1373 $\pm$ 3
c)		# iterações: 50 $S_{MO}$ : $2.487 \times 10^9 \rightarrow 3.827 \times 10^4$ CPU: 1h 27'	# iterações: 6 $S_{MAP}$ : $4.400 \times 10^6 \rightarrow 4.102 \times 10^6$ CPU: 32h 01'
$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$10 \times 10^6$	$2.74 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$
$k_x^*$ [W/m.K]	0.5	8.49 $\pm$ 0.02	5.00 $\pm$ 0.06
$k_y^*$ [W/m.K]	50	8.51 $\pm$ 0.02	5.00 $\pm$ 0.06
$k_z^*$ [W/m.K]	0.5	12.57 $\pm$ 0.06	5.00 $\pm$ 0.16
$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	5000	1200 $\pm$ 1	1373 $\pm$ 3
d)		# iterações: 50 $S_{MO}$ : $4.667 \times 10^5 \rightarrow 3.826 \times 10^4$ CPU: 1h 32'	# iterações: 6 $S_{MAP}$ : $4.416 \times 10^6 \rightarrow 4.102 \times 10^6$ CPU: 31h 58'

Tabela 6.5.8: Estimativa dos parâmetros do compósito de carbono.

$P_j$	Estimativa inicial	Estimativa pelo método Híbrido	Estimativa pelo método de Gauss
$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$2.8 \times 10^6$	$3.80 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$3.80 \times 10^6 \pm 0.03 \times 10^6$
$k_x^*$ [W/m.K]	8	29.83 $\pm$ 0.11	30.04 $\pm$ 0.24
$k_y^*$ [W/m.K]	8	2.48 $\pm$ 0.02	2.50 $\pm$ 0.01
$k_z^*$ [W/m.K]	8	28.89 $\pm$ 0.17	30.21 $\pm$ 1.97
$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	800	1367 $\pm$ 10	1373 $\pm$ 2
a)		# iterações: 50 $S_{MO}$ : $1.250 \times 10^5 \rightarrow 3.814 \times 10^4$ CPU: 1h 41'	# iterações: 5 $S_{MAP}$ : $4.101 \times 10^6 \rightarrow 4.100 \times 10^6$ CPU: 0h 26'
$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$0.1 \times 10^6$	$3.83 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$3.80 \times 10^6 \pm 0.03 \times 10^6$
$k_x^*$ [W/m.K]	50	30.90 $\pm$ 0.09	30.05 $\pm$ 0.24
$k_y^*$ [W/m.K]	50	2.53 $\pm$ 0.01	2.50 $\pm$ 0.01
$k_z^*$ [W/m.K]	50	38.16 $\pm$ 0.22	30.24 $\pm$ 1.98
$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	5	1375 $\pm$ 2	1373 $\pm$ 2
b)		# iterações: 50 $S_{MO}$ : $1.746 \times 10^9 \rightarrow 3.814 \times 10^4$ CPU: 1h 28'	# iterações: 5 $S_{MAP}$ : $4.100 \times 10^6 \rightarrow 4.100 \times 10^6$ CPU: 0h 30'
$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$0.1 \times 10^6$	$3.82 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$3.80 \times 10^6 \pm 0.03 \times 10^6$
$k_x^*$ [W/m.K]	0.5	30.38 $\pm$ 0.08	30.04 $\pm$ 0.24
$k_y^*$ [W/m.K]	0.5	2.50 $\pm$ 0.01	2.50 $\pm$ 0.01
$k_z^*$ [W/m.K]	0.5	33.08 $\pm$ 0.19	30.23 $\pm$ 1.97
$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	5	1372 $\pm$ 3	1373 $\pm$ 2
c)		# iterações: 50 $S_{MO}$ : $2.487 \times 10^9 \rightarrow 3.814 \times 10^4$ CPU: 1h 34'	# iterações: 6 $S_{MAP}$ : $4.100 \times 10^6 \rightarrow 4.100 \times 10^6$ CPU: 0h 31'
$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$10 \times 10^6$	$3.85 \times 10^6 \pm 0.04 \times 10^6$	$3.81 \times 10^6 \pm 0.03 \times 10^6$
$k_x^*$ [W/m.K]	0.5	29.91 $\pm$ 0.15	30.04 $\pm$ 0.24
$k_y^*$ [W/m.K]	50	2.46 $\pm$ 0.06	2.50 $\pm$ 0.01
$k_z^*$ [W/m.K]	0.5	31.40 $\pm$ 0.25	30.19 $\pm$ 1.96
$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	5000	1378 $\pm$ 5	1373 $\pm$ 2
d)		# iterações: 50 $S_{MO}$ : $4.802 \times 10^5 \rightarrow 3.814 \times 10^4$ CPU: 2h 00'	# iterações: 5 $S_{MAP}$ : $4.101 \times 10^6 \rightarrow 4.100 \times 10^6$ CPU: 0h 26'

A estimativa inicial é escolhida longe dos parâmetros exatos, isto é,  $C^{*0} = 0.1 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$ ,  $k_x^{*0} = k_y^{*0} = k_z^{*0} = 50 \text{ W/m} \cdot \text{K}$  e  $h^{rad*0} = 5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ . A tabela 6.5.9 mostra para cada repetição os resultados intermediários obtidos pelo método Híbrido e os resultados obtidos pelo método de Gauss em duas linhas. Os resultados são acompanhados de incertezas com 99 % de nível de confiança.

A tabela 6.5.9 mostra resultados convergidos para as estimativas, exceto para o caso da estimativa 11. Considerando 20 ensaios, o método Híbrido foi capaz de gerar boas estimativas iniciais para o 2º passo, com 95 % de sucesso. Uma ampla distribuição de soluções foi obtida no final da execução do método Híbrido. O método Híbrido trabalha com números randômicos. A cada rodada do método Enxame de Partículas, uma população de vetores é gerada. No entanto, esta população não é sempre repartida de maneira rigorosamente uniforme, criando zonas de maior concentração e zonas de baixa concentração onde pode se encontrar às vezes o mínimo global da função objetivo. Na verdade, a repartição da população determina bastante o modo em que o método vai atingir o mínimo global. Provavelmente, no ensaio 11, a concentração inicial de partículas era baixa ao redor do mínimo global, fazendo que o método Híbrido não conseguisse convergir para ele em 50 iterações.

No ensaio 11, a estimativa para o parâmetro  $k_z^*$  corresponde ao valor limite superior admitido para o experimento, dado na tabela 6.5.2. Devido à diferença entre o vetor de parâmetros estimados pelo método Híbrido e o vetor de parâmetros exatos, grandes oscilações ocorreram posteriormente durante o processo de minimização no 2º passo, fazendo o método de Gauss convergir para um mínimo local. A fim de garantir a convergência da Técnica 8 para o mínimo global, será necessário modificar o gerador de números randômicos e aumentar o número de avaliação do modelo direto reduzido a 50000 ou 100000 para o método Híbrido.

Apesar da falta de convergência no ensaio 11, o método de Gauss convergiu para o mínimo global e estimou os parâmetros com pequeno intervalo de confiança, de modo que não seja visível a diferença entre os parâmetros exatos e estimados. Em conclusão, a técnica 8 se mostra estável para a solução do problema inverso 1.

Tabela 6.5.9: Resultados da estimativa de 5 parâmetros com repetição do experimento.

Ensaio	$C^*$ (J/m <sup>3</sup> .K)	$k_x^*$ [W/m.K]	$k_y^*$ [W/m.K]	$k_z^*$ [W/m.K]	$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]
1	$2.75 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$9.04 \pm 0.05$	$9.14 \pm 0.05$	$17.55 \pm 0.76$	$1174 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
2	$2.95 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$9.33 \pm 0.05$	$9.39 \pm 0.05$	$20.78 \pm 0.99$	$1161 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
3	$2.77 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$8.59 \pm 0.05$	$8.59 \pm 0.05$	$12.51 \pm 0.46$	$1162 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
4	$3.00 \times 10^6 \pm 0.03 \times 10^6$	$8.85 \pm 0.05$	$8.85 \pm 0.05$	$14.41 \pm 0.56$	$1156 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
5	$2.82 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$8.87 \pm 0.05$	$8.85 \pm 0.05$	$14.73 \pm 0.58$	$1166 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
6	$2.71 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$8.84 \pm 0.05$	$8.83 \pm 0.05$	$15.07 \pm 0.60$	$1170 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
7	$2.80 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$8.63 \pm 0.06$	$8.59 \pm 0.05$	$12.64 \pm 0.47$	$1166 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
8	$2.47 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$7.76 \pm 0.06$	$7.76 \pm 0.06$	$7.97 \pm 0.25$	$1154 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
9	$2.57 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$8.37 \pm 0.06$	$8.37 \pm 0.06$	$11.31 \pm 0.40$	$1169 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
10	$3.00 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$9.01 \pm 0.05$	$8.98 \pm 0.05$	$15.92 \pm 0.65$	$1156 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
11	$2.97 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$10.53 \pm 0.05$	$10.57 \pm 0.05$	$99.00 \pm 15.42$	$1168 \pm 2$
	NC	NC	NC	NC	NC
12	$2.66 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$8.62 \pm 0.05$	$8.66 \pm 0.05$	$12.72 \pm 0.47$	$1160 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
13	$2.72 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$8.72 \pm 0.05$	$8.69 \pm 0.05$	$13.99 \pm 0.54$	$1173 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
14	$2.40 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$8.42 \pm 0.06$	$8.41 \pm 0.06$	$10.62 \pm 0.36$	$1143 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
15	$2.68 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$8.62 \pm 0.06$	$8.52 \pm 0.05$	$12.34 \pm 0.45$	$1158 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
16	$2.96 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$8.94 \pm 0.05$	$8.92 \pm 0.05$	$15.88 \pm 0.65$	$1165 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
17	$2.67 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$8.94 \pm 0.05$	$8.99 \pm 0.05$	$15.64 \pm 0.64$	$1166 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
18	$2.86 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$8.87 \pm 0.05$	$8.85 \pm 0.05$	$14.93 \pm 0.59$	$1166 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
19	$2.75 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$9.17 \pm 0.05$	$9.19 \pm 0.05$	$16.64 \pm 0.70$	$1154 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$
20	$2.72 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$8.57 \pm 0.05$	$8.60 \pm 0.05$	$13.15 \pm 0.50$	$1171 \pm 2$
	$2.49 \times 10^6 \pm 0.02 \times 10^6$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.16$	$1373 \pm 3$

### 6.5.3 Resultados do problema inverso

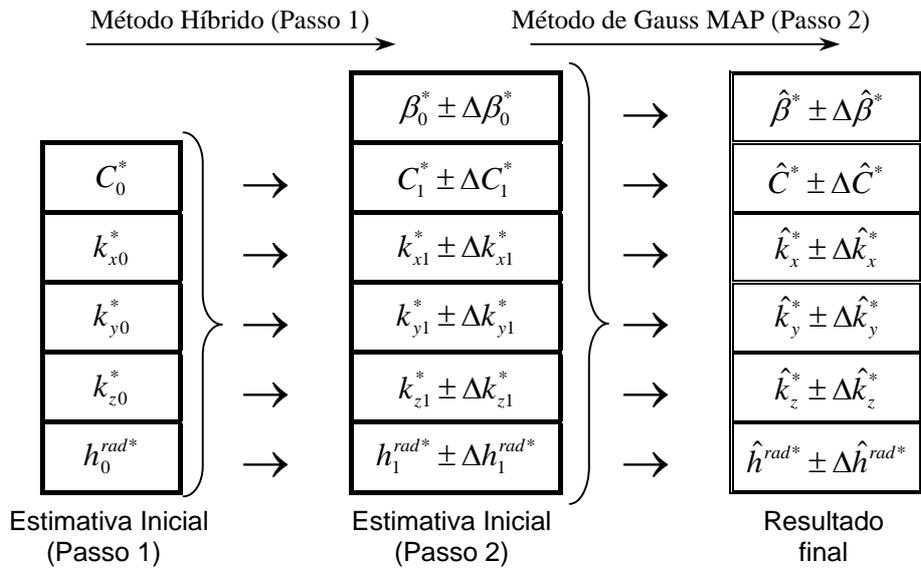
Tendo excelentes resultados na estimativa de 5 parâmetros desconhecidos, a técnica 8 foi implementada a fim de estimar um número maior de parâmetros, incluindo desta vez as propriedades radiativas cinzas. Esta etapa envolve os materiais semitransparentes seguintes: o vidro e a alumina.

#### 6.5.3.1 Identificação das propriedades termofísicas do vidro

Na técnica 8, o primeiro passo usa um problema direto reduzido onde a radiação não é levada em conta. No procedimento de minimização do passo 1, os parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ ,  $Bi^{rad}$  são estimados de maneira a gerar o valor mínimo da norma dos mínimos quadrados. Os resultados obtidos  $P_1^*$ , acompanhado das suas incertezas  $\Delta P_1^*$ , são reutilizados como estimativa inicial e informação a priori para o segundo passo do problema inverso.

Como a estimativa de mais de 5 parâmetros envolve a estimativa dos parâmetros radiativos, é preciso escolher um valor para a estimativa inicial, um valor a priori, assim como um valor para a variância dos parâmetros radiativos, devido ao uso da função objetivo MAP no segundo passo. O valor a priori do coeficiente de extinção do vidro é escolhido de  $\psi_{\beta^*} = 10 \text{ m}^{-1}$ , sendo que o valor exato é  $\beta^* = 2.5 \text{ m}^{-1}$ . O desvio padrão do coeficiente de extinção, que entra na composição da matriz de covariância dos parâmetros, é escolhido de  $\sigma_{\beta^*} = 10 \text{ m}^{-1}$ . A estimativa inicial do passo 1 é escolhida idêntica à da seção 6.5.2.1, isto é,  $C^{*0} = 0.1 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$ ,  $k_x^{*0} = k_y^{*0} = k_z^{*0} = 50 \text{ W/m.K}$  e  $h^{rad*0} = 5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ . A figura 6.5.3 resume o processo de estimativa de 6 parâmetros do vidro.

Para verificar a robustez da técnica com a estimativa de 6 parâmetros, faz-se variar o valor inicial do parâmetro  $\beta_0^*$ . Os diferentes resultados da estimativa são mostrados na tabela 6.5.10 para 4 valores iniciais dos coeficientes de extinção  $\beta_0^* = 1, 10, 1000$  e  $10^5$ . As linhas de fundo cinza indicam as estimativas iniciais. As outras de fundo branco, os resultados finais acompanhados das incertezas.



*Figura 6.5.3: Esquema de estimativa dos parâmetros termofísicos do vidro.*

A estimativa de parâmetros não convergiu conforme os resultados da análise de projeto ótimo, figura 6.4.9. A observação dos critérios D- e E-ótimo não revelou nenhum mal condicionamento da matriz de informação para a estimativa de 6 parâmetros. Segundo os resultados para os critérios D- e E-ótimo, um intervalo de confiança mínimo devia ter sido obtido no final da estimativa. No entanto, o método não convergiu para o mínimo global para os ensaios 2 e 4. No ensaio 1, a incerteza sobre o coeficiente de extinção foi obtida 40 vezes o valor da estimativa final, induzindo valores negativos como solução do problema inverso.

*Tabela 6.5.10: Resultados da estimativa de 6 parâmetros do vidro.*

Ensaio	$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$k_x^*$ [W/m.K]	$k_y^*$ [W/m.K]	$k_z^*$ [W/m.K]	$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	$\beta^*$ [m <sup>-1</sup> ]
<b>1</b>	$0.1 \times 10^6$	50	50	50	5	1
	$2.20 \times 10^6$ $\pm 0.01 \times 10^6$	1.50 $\pm 0.02$	1.50 $\pm 0.02$	1.50 $\pm 0.06$	131.1 $\pm 0.3$	1 $\pm 47$
<b>2</b>	$0.1 \times 10^6$	50	50	50	5	10
	NC	NC	NC	NC	NC	NC
<b>3</b>	$0.1 \times 10^6$	50	50	50	5	1000
	NC	NC	NC	NC	NC	NC
<b>4</b>	$0.1 \times 10^6$	50	50	50	5	100000
	NC	NC	NC	NC	NC	NC

Os resultados da tabela 6.5.10 confirmam a interpretação feita na seção 6.3.2.1. A obtenção de coeficientes de sensibilidade nulos para um parâmetro do problema não permite a sua identificação. O coeficiente de extinção do vidro não foi estimado e necessariamente os outros parâmetros também não foram.

### 6.5.3.2 Identificação das propriedades termofísicas da alumina

Da interpretação feita na seção 6.3.2.2, a probabilidade de sucesso da estimativa de 8 parâmetros é maior. Apesar da magnitude pequena dos coeficientes de sensibilidade com respeito ao parâmetro adimensional  $\tau_0$  (ver figura 6.3.14-16), o valor para o critério D-ótimo foi obtido bastante significativo (ver figura 6.4.11). A estimativa de 8 parâmetros foi implementada com o material alumina usando as seguintes informações para o método de Gauss com função objetivo MAP:

*Tabela 6.5.11: Informação a priori para a estimativa dos parâmetros termofísicos da alumina.*

Parâmetro	Valor exato	Valor a priori	Desvio padrão a priori
$\beta^*$	$\beta^* = 10010 \text{ m}^{-1}$	$\psi_{\beta^*} = 50000 \text{ m}^{-1}$	$\Delta\beta_0^* = 50000 \text{ m}^{-1}$
$\omega$	$\omega = 0.999001$	$\psi_{\omega} = 0.999$	$\Delta\omega_0 = 0.1$
$g$	$g = 0.7$	$\psi_g = 0.5$	$\Delta g_0 = 0.2$

Para diversas estimativas iniciais dos parâmetros  $\beta^*$ ,  $\omega$  e  $g$ , mesmo próximas dos parâmetros exatos, a técnica 8 não converge para o mínimo global. Este resultado, pouco esperado, resulta de instabilidades no processo de minimização da função MAP, fazendo o método convergir para mínimos locais. Foi, portanto, decidido assumir a função de fase conhecida e reduzir o número de propriedades desconhecidas a 7. O esquema referente à técnica 8 para a estimativa de 7 parâmetros é mostra na figura 6.5.4.

A informação a priori sobre as propriedades radiativas é dada na tabela 6.5.11, tirando a linha referente ao fator de assimetria. Para verificar a convergência do método, várias estimativas iniciais dos parâmetros  $\beta_0^*$  e  $\omega_0$  são escolhidas, afastadas ou não dos valores exatos. Os resultados da estimativa são dados na tabela 6.5.12 em linha de fundo branco.

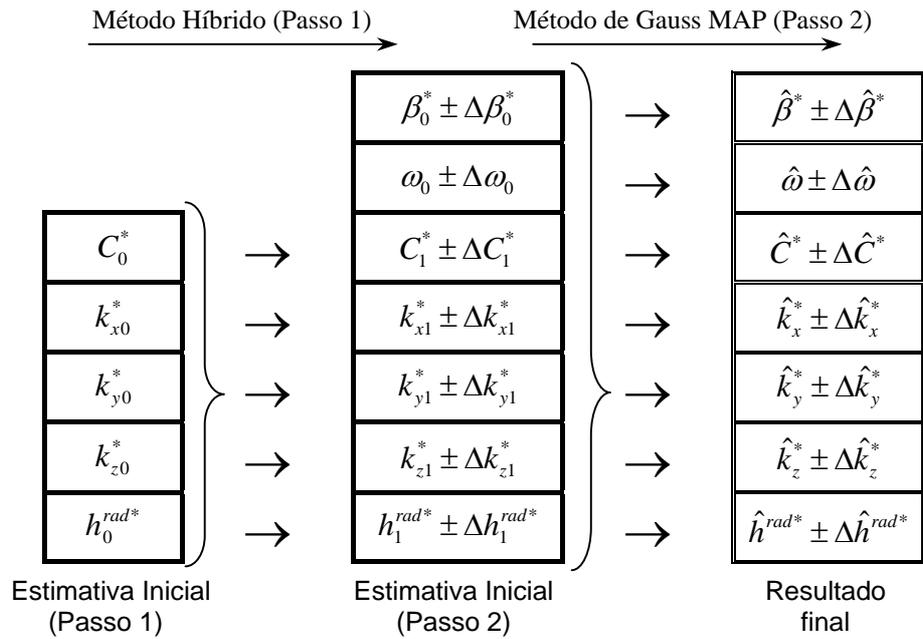


Figura 6.5.4: Esquema de estimativa dos parâmetros termofísicos da alumina.

Tabela 6.5.12: Resultados da estimativa de 7 parâmetros da alumina.

Ensaio	$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$k_x^*$ [W/m.K]	$k_y^*$ [W/m.K]	$k_z^*$ [W/m.K]	$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	$\beta^*$ [m <sup>-1</sup> ]	$\omega$
1	0.1×10 <sup>6</sup>	50	50	50	5	2000	0.99
	2.49×10 <sup>6</sup> ± 0.03×10 <sup>6</sup>	4.98 ± 0.08	4.97 ± 0.08	4.90 ± 0.23	1365 ± 13	9688 ± 657	0.9996 ± 0.0103
2	0.1×10 <sup>6</sup>	50	50	50	5	50000	0.99
	2.49×10 <sup>6</sup> ± 0.03×10 <sup>6</sup>	4.98 ± 0.08	4.97 ± 0.08	4.90 ± 0.23	1365 ± 13	9688 ± 657	0.9996 ± 0.0103
3	0.1×10 <sup>6</sup>	50	50	50	5	2000	0.9999
	2.49×10 <sup>6</sup> ± 0.03×10 <sup>6</sup>	4.98 ± 0.08	4.97 ± 0.08	4.90 ± 0.23	1365 ± 13	9688 ± 657	0.9996 ± 0.0103
4	0.1×10 <sup>6</sup>	50	50	50	5	50000	0.9999
	2.49×10 <sup>6</sup> ± 0.03×10 <sup>6</sup>	4.98 ± 0.08	4.97 ± 0.08	4.90 ± 0.23	1365 ± 13	9688 ± 657	0.9996 ± 0.0103
5	0.1×10 <sup>6</sup>	50	50	50	5	10	0
	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
6	0.1×10 <sup>6</sup>	50	50	50	5	100000	0
	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
7	0.1×10 <sup>6</sup>	50	50	50	5	10	0.9999
	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC
8	0.1×10 <sup>6</sup>	50	50	50	5	100000	0.9999
	2.49×10 <sup>6</sup> ± 0.03×10 <sup>6</sup>	4.98 ± 0.08	4.97 ± 0.08	4.90 ± 0.23	1365 ± 13	9688 ± 657	0.9996 ± 0.0103

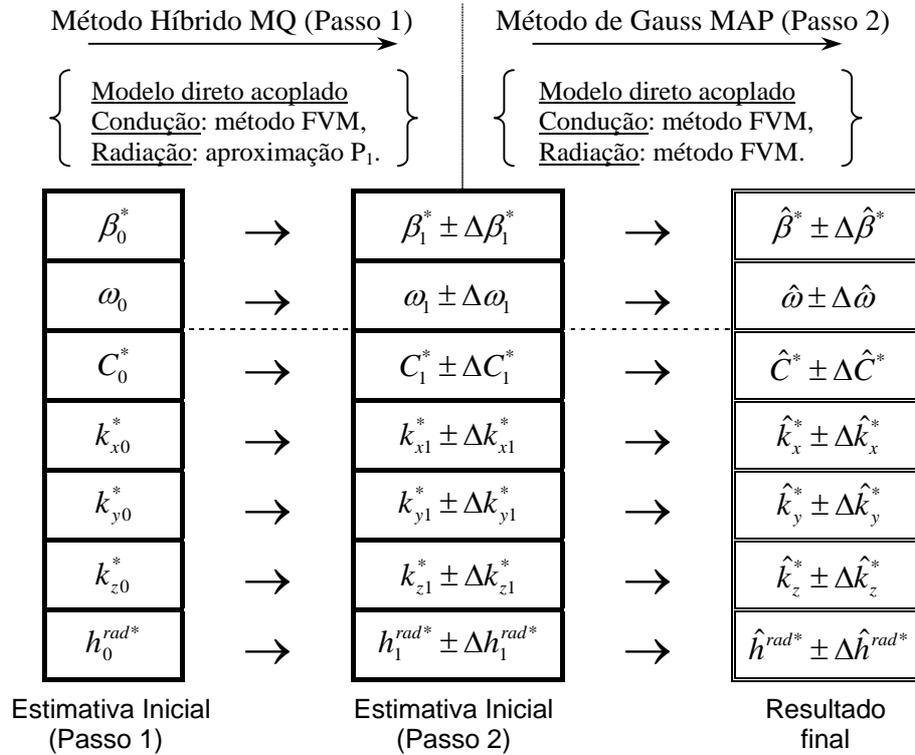
A análise da tabela 6.5.12 revela a possibilidade de estimar 7 parâmetros de um material óticamente espesso ( $\tau_0 > 1 \Leftrightarrow \beta_0^* > 1000 \text{ m}^{-1}$ ) e espalhante ( $\omega > 0.9$ ). Analisando os resultados dos ensaios 1-4 e 8, o valor a priori escolhido para  $\beta^*$  e  $\omega$  não altera a convergência do método para os parâmetros exatos, sendo o desvio padrão para  $\beta^*$  e  $\omega$  escolhido da mesma ordem de grandeza que os parâmetros. Resultados exatos são obtidos quando as estimativas iniciais  $\beta_0^*$  e  $\omega_0$  e as informações a priori são escolhidas representativas do material em questão. Por exemplo, se o material for considerado não espalhante (ensaio 5 e 6) ou óticamente fino (ensaio 6 e 7), a técnica 8 converge para um mínimo local.

A técnica 8 permite identificar de maneira satisfatória as propriedades da alumina cinza. Qualquer informação inicial pode ser prescrita para os parâmetros  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ ,  $\text{Bi}^{rad}$  na condição de escolher adequadamente  $\beta_0^*$  e  $\omega_0$ . Um modelo de função de fase coerente precisa ser definido no problema direto. Por isso, a função de fase foi predita pela teoria de Mie, aproximada por uma função de Henyey-Greestein e discretizada sobre 48 direções.

### 6.5.3.3 Proposta e sugestão para a evolução da técnica 8

Se nenhum valor for conhecido com respeito às propriedades radiativas, uma variação mais elaborada da técnica 8, representada na figura 6.5.5, pode ser implementada. Neste esquema, o modelo direto calculado por solução analítica é substituído por um modelo acoplado com a radiação. O campo de temperatura é obtido por solução do método ADI de Douglas-Gunn [158]. A solução instantânea do campo radiativo é obtida usando a aproximação  $P_1$  [174,175]. O vetor de parâmetros desconhecidos a ser estimados pelo método híbrido fica com 7 elementos. Em contra parte da elevação de custo computacional gerada pelo acoplamento condução-radiação e pela estimativa de 7 parâmetros, a estimativa intermediária gerada pelo método híbrido garante a convergência do método de Gauss (2º passo) para o mínimo global. De modo a reduzir o custo computacional elevado devido ao uso do método híbrido junto com a solução do problema acoplado, a interpolação da norma dos mínimos quadrados pode ser implementada com funções radiais de base [176]. Esta técnica permite localizar o

mínimo da função objetivo com um número de avaliações do problema direto bem menor [176].



*Figura 6.5.5: Proposta de esquema para a estimativa de parâmetros termofísicos de MST espalhantes.*

A técnica 8 é confiável graças a sua estrutura seqüencial. O primeiro passo, que usa o método híbrido robusto, tem por objetivo a estimativa aproximativa dos parâmetros. O modelo direto usado nesta etapa do programa é de baixa qualidade, porém, sua solução é rápida. Ao contrário, o segundo passo, com a utilização do método de convergência rápida, alcança os parâmetros exatos graças a um modelo de alta definição. A técnica 8 é um método econômico a usar de preferência quando a solução do problema direto requer mais de 1 min de calculo numérico. Problemas simples, com a solução do problema direto obtida em menos de 1 s, são de preferência resolvidos por métodos de tipo estocásticos. Para problemas de transferência radiativa, o tempo geralmente representa uma limitação.

# Capítulo 7

## Conclusão e Proposta da Continuação do Trabalho

### 7.1 Conclusão

Apresentou-se, a partir da simulação de dois experimentos distintos, a solução do problema inverso de estimativa das propriedades termofísicas de materiais semitransparentes cinzas a altas temperaturas assim como a solução do campo de emissão espectral e direcional emitido. Para a solução dos problemas diretos onde ocorrem transferências de calor por condução e por radiação foi utilizado o Método de Volumes Finitos. Resultados obtidos do problema direto foram validados através da comparação com outros resultados disponíveis na literatura, onde o acoplamento condução-radiação era envolvido.

A análise dos coeficientes de sensibilidade com relação aos parâmetros desconhecidos para os dois experimentos permitiu avaliar a possibilidade de estimar os parâmetros em função do experimento. Dos resultados apresentados no Capítulo 6, o experimento 2 não podia ser utilizado para a estimativa de propriedades de materiais semitransparente. A análise dos critérios D-ótimos e E-ótimos permitiu então a definição de variáveis ótimas para a realização do experimento 1, tais como o tempo de duração experimental, a magnitude e o perfil do fluxo de calor e a espessura das amostras. Conclusões sobre os resultados obtidos no Capítulo 6 são resumidas em função do experimento.

#### 7.1.1 Conclusões relativas ao experimento 1

Os coeficientes de sensibilidade com relação às três componentes da condutividade térmica, à capacidade térmica volumétrica de materiais ortotrópicos e às perdas de calor por convecção e radiação nas superfícies são não-nulos e linearmente independentes, quando um fluxo laser contínuo é aplicado pontualmente na superfície superior da amostra de material, como foi estipulado no experimento 1.

A análise do condicionamento da matriz de informação mostra que o maior número de sensores ativos da câmera infravermelha é necessário em vista da medição de temperatura na face não diretamente aquecida por laser. Um tempo de aquecimento de 20 s é considerado suficiente para estimar as propriedades termofísicas de materiais de características parecidas com as do vidro, a alumina e o carbono compósito a altas temperaturas com variância mínima.

Métodos de minimização determinísticos para a solução do problema inverso não convergiram para o mínimo global em casos com estimativa inicial bem distante dos valores exatos dos parâmetros. Um procedimento em dois passos, usando o método Híbrido com norma dos mínimos quadrados e o método de Gauss com função objetivo maximum a posteriori, foi então desenvolvido a fim de garantir a convergência do método. A redução do tempo computacional foi obtida misturando problemas de qualidade reduzida com o problema direto original na formulação do problema inverso.

Usando o método de minimização em dois passos, as três componentes da condutividade térmica de materiais ortotrópicos, a capacidade térmica volumétrica e as perdas de calor foram estimadas com alta precisão para materiais parecidos com o vidro a 800 K, a alumina e o carbono compósito a 1800 K. O método foi capaz, inclusive, de estimar as propriedades radiativas cinzas, como o coeficiente de extinção média e o albedo, com variância pequena em casos de materiais altamente espalhantes.

### 7.1.2 Conclusões relativas ao experimento 2

O fluxo espectral e direcional emitido por materiais semitransparentes a altas temperaturas é simulado usando um modelo tri-dimensional e fronteiras semitransparentes com mudança de índice de refração. Para isto, a função dielétrica é previamente determinada escolhendo parâmetros óticos tabelados que entram na composição da equação de Lorentz modificada. As propriedades radiativas são preditas usando a teoria de Mie: um conhecimento a priori da morfologia microscópica do material é necessária nesta etapa de modelagem. A boa concordância entre os resultados simulados e os resultados experimentais permite validar o modelo.

Do fluxo espectral e direcional deduz-se imediatamente o fator de emissão espectral e direcional. Definido como a razão entre o fluxo espectral e direcional emitido pelo material semitransparente e o fluxo espectral emitido por um corpo negro trazido a temperatura idêntica, o fator de emissão só é válido quando o material encontra-se a

temperatura homogênea. Na prática, a distribuição desigual do fluxo radiativo interno gera um gradiente de temperatura não desejado. Para estimar a discrepância causada pelo gradiente, um estudo é realizado comparando os fatores de emissão obtidos para diferentes espessuras do corpo de prova e diferentes desequilíbrios de potência entre os canais do sistema de aquecimento.

O fator de emissão constitui a grandeza medida para o problema inverso definido como problema 2. No objetivo de estimar as propriedades radiativas de materiais semitransparentes a altas temperaturas, os coeficientes de sensibilidade do fator de emissão com respeito aos parâmetros radiativos são desenhados. Estes são linearmente dependentes para qualquer comprimento de onda do espectro infravermelho e nulos quando o material não absorve. Diante dos resultados, o experimento 2 não permite a estimativa de propriedades radiativas de materiais semitransparentes a altas temperaturas.

A expectativa inicial de estimar as propriedades termofísicas de materiais a altas temperaturas não foi alcançada, mesmo reunindo as informação em proveniência da simulação dos problemas 1 e 2. Apenas os resultados da simulação do experimento 1, proposto neste trabalho, revela um avanço na identificação acurada de propriedades de meios cinzas. A fim de melhorar no futuro a qualidade da estimativa, algumas idéias são listadas na seção seguinte.

## 7.2 Proposta da Continuação do Trabalho

Uma atenção particular é levada com relação à caracterização espectral do comportamento radiativa de meios semitransparentes. Efetivamente, as propriedades radiativas, conhecidas através dos coeficientes de absorção, espalhamento, extinção e do fator de assimetria da função de fase, não podem ser estimadas usando medidas de fator de emissão espectral e direcional. Outros caminhos devem ser investigados para a continuação deste trabalho.

O primeiro caminho consiste em usar, como parte de um novo problema inverso 2, um sistema medição de refletividades e de transmissividades de uma amostra plana de material a altas temperaturas. O dispositivo, que mede a refletividade especular e hemisférica e a transmissividade, foi amplamente utilizado a temperatura ambiente para estimar as propriedades radiativas de materiais semitransparentes. A adaptação do

dispositivo às altas temperaturas continua se revelando tecnicamente impossível por dois motivos: a) a intensidade emitida pelo próprio material é bem superior à intensidade refletida e transmitida em proveniência da fonte monocromática e b) o módulo de medição do fluxo refletido e transmitido (espectrômetro) não pode ocupar o lugar do sistema de aquecimento.

O segundo caminho consiste em usar o fator de emissão espectral e direcional como fonte de informação do problema inverso 2. No entanto, em vez de estimar os parâmetros radiativos que entram na composição da equação de transferência radiativa, procura-se a estimar parâmetros óticos que entram na composição da equação de Lorentz modificada a fim de determinar a função dielétrica ( $\cong$  índice de refração) do material em função do comprimento de onda. A partir de especulações sobre a morfologia microscópica do material, a teoria de Mie para partículas esféricas ou cilíndricas (materiais fibrosos), ou o método de Monte Carlo, são usados para calcular diretamente as propriedades radiativas. A otimização do novo problema 2 deverá comportar as seguintes etapas:

- Validação da teoria de Mie para partículas esféricas ou cilíndricas pelo método de Monte Carlo
- Análise dos coeficientes de sensibilidade do fator de emissão com respeito aos parâmetros óticos que entram na equação de Lorentz modificada.
- Se forem linearmente independentes, análise e validação da técnica de minimização seqüencial com função objetivo maximum a posteriori.

Note que a teoria de Mie com partículas esféricas já foi validada para a realização deste trabalho assim como a validação do problema de solução da equação da energia e da equação de transferência radiativa. A análise de critérios para otimizar o experimento não de mostra necessária em vista de que a espessura do corpo de prova e as condições de execução do experimento 2 já foram estabelecidas na seção 6.3.

Caso a função dielétrica de meios semitransparentes pudesse ser estimada em função do comprimento de onda, os resultados da estimativa do problema 1 deverão ser introduzidos como informação inicial e como informação a priori no problema 2. Em tal situação, os objetivos de identificação de propriedades termofísicas de materiais semitransparentes a altas temperaturas seriam completamente preenchidos.

# Referências Bibliográficas

- [1] VISKANTA, R., ANDERSON, E.E., “Heat Transfer in Semi-Transparent Solids”, *Advances in Heat Transfer*, v. 11, pp. 317-441, 1975.
- [2] KUNC, T., LALLEMAND, M., SAULNIER, J.B., “Some New Developments on Coupled Radiative-Conductive Heat Transfer in Glasses – Experiments and Modeling”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 27, n. 12, pp. 2307-2319, 1984.
- [3] BAEK, S.W., KIM, T.Y., LEE, J.S., “Transient Cooling of a Finite Cylindrical Medium in the Rarefied Cold Environment”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 36, n. 6, pp. 3949-3956, 1993.
- [4] WU, C.Y., OU, N.R., “Transient Two-Dimensional Radiative and Conductive Heat Transfer in a Scattering Medium”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 37, pp. 2675-2686, 1994.
- [5] YUEN, W.W., TAKARA, E.E., “Development of a Generalized Zonal Method for the Analysis of Radiative Transfer in Absorbing and Anisotropically-Scattering Media”, *Numerical Heat Transfer: Part B*, v. 25, 1994.
- [6] TONG, T.W., YARBROUGH, D.W., MCELROY, D.L. *et al.*, “Transient Conductive and Radiative Heat Transfer through a Porous Layer with one Boundary Subject to a Time-Varying Temperature Conduction”, *Thermal Conductivity*, v. 19, pp. 467-479, 1987.
- [7] GLASS, D.E., OZISIK, M.N., MCRAE, D.S., “Combined Conduction and Radiation with Flux Boundary Condition for a Semi-Transparent Medium covered by Thin Radiating Layers”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 38, n. 3, pp. 201-208, 1987.
- [8] TAN, H.P., QIZHENG YU, LALLEMAND, M., “Transient Combined Radiative-Conductive Heat Transfer at High Temperature in Semi-Transparent Materials”, *J. Eng. Thermophys.*, v. 10, n. 3, pp. 295-300, 1989.

- [9] TAN, H.P., LALLEMAND, M., “Transient Radiative-Conductive Heat Transfer in Flat Glass Submitted to Temperature, Flux and Mixed Boundary Conditions”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 32, n. 5, pp. 795-810, 1989.
- [10] TSAI, J.H., LIN, J.D., “Transient Combined Conduction and Radiation with Anisotropic Scattering”, *AIAA J. Thermophysics and Heat Transfer*, v. 4, n. 1, pp. 92-97, 1990.
- [11] SIEGEL, R., “Transient Heat Transfer in a Semi-Transparent Radiating Layer with Boundary Convection and Surface Reflections”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 39, n. 1, pp. 69-79, 1996.
- [12] SPUCKLER, C.M., SIEGEL, R., “Refractive Index and Scattering Effects on Radiative Behavior of a Semi-Transparent Layer”, *AIAA J. Thermophysics and Heat Transfer*, v. 7, n. 2, pp. 302-310, 1993.
- [13] SPUCKLER, C.M., SIEGEL, R., “Refractive Index and Scattering Effects on Radiation in a Semi-Transparent Laminated Layer”, *AIAA J. Thermophysics and Heat Transfer*, v. 8, n. 2, pp. 193-201, 1994.
- [14] SIEGEL, R., “Transient Radiative Cooling of a Droplet-Filled Layer”, *ASME J. Heat Transfer*, v. 109, n. 2, pp. 159-164, 1987.
- [15] SIEGEL, R., “Separation of Variables Solution for Non-Linear Radiative Cooling”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 30, n. 5, pp. 959-965, 1987.
- [16] TSAI, J.R., OZISIK, M.N., SANTARELLI, F., “Radiation in Spherical Symmetry with Anisotropic Scattering and Variable Properties”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 42, n. 3, pp. 187-199, 1989.
- [17] MACHALI, H.F., “Radiative Transfer in Participating Media under Conditions of Radiative Equilibrium”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 53, n. 2, pp. 201-210, 1995.
- [18] MACHALI, H.F., MADKOUR, M.A., “Radiative Transfer in Participating Slab with Anisotropic Scattering and General Boundary Conditions”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 54, n. 5, pp. 803-813, 1995.

- [19] GANAPOL, B.D., “Radiative Transfer in a Semi-Infinite Medium with Specularly Reflecting Boundary”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 53, n. 3, pp. 257-267, 1995.
- [20] LIN, J.D., TSAI, J.H., “Radiation-Conduction Interaction in a Planar, Anisotropically Scattering Medium with Flux Boundary”, *Numerical Heat Transfer: Part A*, v. 16, pp. 119-128, 1989.
- [21] YANG, Q., WANG, J., “The Solution of Coupled Conductive-Radiative Heat Transfer with Linear Scattering”, *J. Eng. Thermophys.*, v. 11, n. 4, pp. 434-437, 1990.
- [22] SIEWERT, C.E., “An Improved Iterative Method for Solving a Class of Coupled Conductive-Radiative Heat Transfer Problems”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 54, n. 4, pp. 599-605, 1995.
- [23] FRANKEL, J.I., “Cumulative Variable Formulation for Transient Conductive and Radiative Transport in participating Medium”, *AIAA J. Thermophysics and Heat Transfer*, v. 9, n. 2, pp. 210-218, 1995.
- [24] PETROV, V.A., “Combined Radiation and Conduction Heat Transfer in High Temperature Fiber Thermal Insulation”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 40, pp. 2241-2247, 1997.
- [25] SIEGEL, R., “Transient Thermal Effects of Radiant Energy in Translucent Materials”, *ASME J. Heat Transfer*, v. 120, n. 1, pp. 4-23, 1998.
- [26] TAN, H., RUAN, L., XIA, X. *et al.*, “Transient Coupled Radiative and Conductive Heat Transfer in an Absorbing, Emitting and Scattering Medium”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 42, pp. 2967-2980, 1999.
- [27] SIEWERT, C.E., THOMAS, J.R., “A Computational Method for Solving a Class of Coupled Conductive-Radiative Heat Transfer Problems”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 45, n. 5, pp. 273-281, 1991.
- [28] LAZARD, M., ANDRÉ, S., MAILLET, D., “Transient Coupled Radiative-Conductive Heat Transfer in a Gray Planar Medium with Anisotropic Scattering”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 69, n. 1, pp. 23-33, 2001.

- [29] LAZARD, M., “Semi-Transparent Slab and Kernel Substitution Method: Review and Determination of the Optimal Coefficients”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 86, n. 1, pp. 31-43, 2004.
- [30] SAULNIER, J.B., *La modélisation thermique et ses applications aux transferts couplés et aux contrôle actif*, Thèse de Doctorat d’Etat, Université de Poitiers, France, 1980.
- [31] TAN, H., MAESTRE, B., LALLEMAND, M., “Transient and Steady-State Combined Heat Transfer in Semi-Transparent Materials Subjected to a Pulse or a Step Irradiation”, *ASME J. Heat Transfer*, v. 113, pp. 166-173, 1991.
- [32] ANDRÉ, S., DEGIOVANNI, A., “A Theoretical Study of the Transient Coupled Conduction and Radiation Heat Transfer in Glass: Phonic Diffusivity Measurements by the Flash Technique”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 38, n. 18, pp. 3401-3412, 1995.
- [33] HAHN, O., RAETHER, F., ARDUINI-SCHUSTER, M.C. *et al.*, “Transient Coupled Conductive/Radiative Heat Transfer in Absorbing, Emitting and Scattering Media: Application to Laser-Flash Measurement on Ceramic Materials”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 40, n. 3, pp. 689-698, 1997.
- [34] ANDRÉ, S., DEGIOVANNI, A., “A New Way of Solving Transient Radiative-Conductive Heat Transfer Problems”, *ASME J. Heat Transfer*, v. 120, pp. 943-955, 1998.
- [35] DA SILVA, Z.E., *Transferts couplés conduction-radiation: application de la méthode flash aux milieux semi-transparentes*, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 1997.
- [36] TAN, H., RUAN, L., TONG, T.W., “Temperature Response in Absorbing, Isotropic Scattering Medium Caused by Laser Pulse”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 43, n. 2, pp. 311-320, 2000.
- [37] PATANKAR, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, New York, Mc Graw-Hill, 1980.

- [38] RAITHBY, G.D., CHUI, E.H., “A Finite-Volume Method for Predicting a Radiant Heat Transfer in Enclosures with Participating Media”, *ASME J. Heat Transfer*, v. 112, n. 2, pp. 415-423, 1990.
- [39] CHUI, E.H., RAITHBY, G.D., “Computation of Radiant Heat Transfer on a Nonorthogonal Mesh Using the Finite-Volume Method”, *Numerical Heat Transfer: Part B*, v. 23, pp. 269-288, 1993.
- [40] CHAI, J.C., LEE, H.S., PATANKAR, S.V., “Finite Volume Method for Radiação Heat transfer”, *AIAA J. Thermophysics and Heat Transfer*, v. 8, pp.419-425, 1994.
- [41] CHAI, J.C., PARTHASARTHY, G., LEE, H.S. *et al.*, “Finite Volume Radiative Heat Transfer Procedure for Irregular Geometries”, *AIAA J. Thermophysics and Heat Transfer*, v. 9, n. 3, pp. 410-415, 1995.
- [42] CHUI, E.H., RAITHBY, G.D., HUGHES, P.M.J, “Prediction of Radiative Transfer in Cylindrical Enclosures with the Finite Volume Method”, *AIAA J. Thermophysics and Heat Transfer*, v. 6, n. 4, pp.605-611, 1992.
- [43] MODER, J.P., CHAI, J.C., PARTHASARTHY, G. *et al.*, Nonaxisymmetric Radiative Transfer in Cylindrical Enclosures, *Numerical Heat Transfer: Part B*, v. 30, pp. 437-452, 1996.
- [44] KIM, M.Y., BAEK, S.W., “Analysis of Radiative Transfer in Cylindrical Enclosures Using the Finite Volume Method”, *AIAA J. Thermophysics and Heat Transfer*, v. 11, n. 11, pp. 246-252, 1997.
- [45] MURTHY, J.Y., MATHUR, S.R., “Radiative Heat Transfer in Axisymmetric Geometries Using an Unstructured Finite-Volume Method”, *Numerical Heat Transfer: Part B*, v. 33, pp. 397-416, 1998.
- [46] CUI, X., LI, BEN Q., “A discontinuous finite-element formulation for radiative transfer in axisymmetric finite cylindrical enclosures and coupling with other mode heat transfer”, *Numerical Heat Transfer: Part B*, v. 48, pp. 317-344, 2005.
- [47] BEN SALAH, M., ASKRI, F., BEN NASRALLAH, S., “Unstructured control-volume finite-element method for radiative heat transfer in a complex 2D geometry”, *Numerical Heat Transfer: Part B*, v. 48, pp. 477-497, 2005.

- [48] CHUI, E.H., RAITHBY, G.D., “Implicit Solution Scheme to improve Convergence Rate in Radiative Transfer Problems”, *Numerical Heat Transfer: Part B*, v. 22, pp. 251-272, 1992.
- [49] RAITHBY, G.D., “Discussion of the Finite-Volume Method for Radiation, and its Application Using 3D Unstructured Meshes”, *Numerical Heat Transfer: Part B*, v. 35, pp. 389-405, 1999.
- [50] BRUN, J.F., *Mesure et analyse de l'émittance spectrale d'oxydes diélectriques à haute température. Une approche des phénomènes préfusionnels*, Thèse de Doctorat, Université d'Orléans, Orléans, 2003.
- [51] TOULOUKIAN, Y.S., DEWITT, D.P., HERNICZ, R.S., “Thermal Radiative Properties – Nonmetallic Solids”, *Thermophysical Properties of Matter*, v. 8, New York, IFI/PLENUM, 1972.
- [52] BREWSTER, M.Q., *Thermal Radiative Transfer and Properties*, New York, John Wiley & Sons, 1992.
- [53] BORN, M., WOLF, E., *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of Light*, 6 ed., Oxford, Pergamon Press, 1980.
- [54] VAN DE HULST, H.C., *Light Scattering by Small Particles*, New York, Dover Publication, 1981.
- [55] BOHREN, C.F., HUFFMAN, D.R., *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, New York, John Wiley & Sons, 1983.
- [56] HARPOLE, G.M., “Radiative Absorption by Evaporating Droplets”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 23, pp. 17-26, 1980.
- [57] LIU, L.H., TAN, H.P., TONG, T.W., “Internal Distribution of Radiation Absorption in a Semitransparent Spherical Particle”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 72, pp. 747-756, 2002.
- [58] DEIRMENDJIAN, D., *Electromagnetic Scattering on Spherical Polydispersions*, New York, Elsevier, 1969.

- [59] DROLEN, B.L., TIEN, C.L., “Independent and Dependent Scattering in Packed-Sphere Systems”, *AIAA J. Thermophysics and Heat Transfer*, v. 1, n. 1, pp 63-68, 1987.
- [60] SINGH, B.P., KAVIANY, M., “Modeling Radiative Heat Transfer in Packed Beds”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 35, n. 6, pp. 1397-1405, 1992.
- [61] BAILLIS, D., SACADURA, J.F., “Thermal Radiation Properties of Dispersed Media: Theoretical Prediction and Experimental Characterization”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 67, pp. 327-363, 2000.
- [62] LEVENBERG, K., “A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares”, *Quart. Appl. Math.*, v. 2, pp. 164-168, 1944.
- [63] MARQUARDT, D.W., “An Algorithm for Least Squares Estimation on Non-Linear Parameters”, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, v. 11, pp. 431-441, 1963.
- [64] BARD, Y.B., *Nonlinear Parameter Estimation*, New York, Acad. Press, 1974.
- [65] FLETCHER, R., POWELL, M.J.D., “A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization”, *Computer J.*, v. 6, pp. 163-168, 1963.
- [66] BROYDEN, C.G., “A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations”, *Math. Comp.*, v. 19, pp. 577-593, 1965.
- [67] BROYDEN, C.G., “Quasi-Newton Methods and Their Applications to Function Minimization”, *Math. Comp.*, v. 21, pp. 368-380, 1967.
- [68] PRESS, W. H., FLANNERY, B. F., TEUKOLSKY, S. A. *et al.*, *Numerical Recipes*, New York, Cambridge University Press, 1989.
- [69] ÖZISIK, M.N., ORLANDE, H.R.B., *Inverse Heat Transfer – Fundamentals and Applications*, New York, Taylor & Francis, 2000.
- [70] BECK, J.V., ARNOLD, K.J., *Parameter Estimation in Engineering and Science*, New York, John Wiley & Sons, 1977.
- [71] BECK, J.V., “Sequential Methods in Parameter Estimation”, In: *Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice. 3<sup>rd</sup> Int. Conference on Inverse Problems in Engineering*, Port Ludlow, WA, USA. Tutorial Session, June 1999.

- [72] DEB, K., *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*, New York, John Wiley & Sons, 2002.
- [73] STORN, R., PRICE, K.V., “Minimizing the Real Function of the ICEC’96 Contest by Differential Evolution”, *IEEE Conf. on Evolutionary Computation*, pp. 842-844, 1996.
- [74] KENNEDY, J., EBERHART, R.C., “Particle Swarm Optimization”, In: *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks*, v. 4, pp. 1942-1948, Perth, Australia, 1995.
- [75] KENNEDY, J., “Small Worlds and Mega-Minds: Effects of Neighborhood Topology on Particle Swarm Performance”, In: *Proceedings of the 1999 Congress of Evolutionary Computation, IEEE Press*, v. 3, pp. 1931-1938, 1999.
- [76] EBERHART, R., SHI, Y., KENNEDY, J., *Swarm Intelligence*, Morgan Kaufmann, 2001.
- [77] NAKA, S., GENJI, T., YURA, T. *et al.*, “Practical Distribution State Estimation Using Hybrid Particle Swarm Optimization”, In: *Proceedings of IEEE Power Engineering Society Winter Meeting*, Columbus, Ohio, USA, January 28 – February 1<sup>st</sup>, 2001.
- [78] COLAÇO, M.J., DULIKRAVITCH, G.S., MARTIN, T.J., “Optimization of Wall Electrodes for Electro-Hydrodynamic Control of Natural Convection Effects During Solidification”, *Materials and Manufacturing Processes*, v. 19, n. 4, pp. 719-736, 2004.
- [79] DULIKRAVITCH, G.S., COLAÇO, M.J., MARTIN, T.J. *et al.*, “An inverse Method Allowing User-Specified Layout of Magnetized Micro-Fibers in Solidifying Composites”, *Journal of Composite Materials*, v. 37, n. 15, pp. 1351-1365, 2003.
- [80] DULIKRAVITCH, G.S., COLAÇO, M.J., DENNIS, B.H. *et al.*, “Optimization of Intensities, and Orientations of Magnets Controlling Melt Flow During Solidification”, *Materials and Manufacturing Processes*, v. 19, n. 4, pp. 695-718, 2004.

- [81] COLAÇO, M.J., ORLANDE, H.R.B., DULIKRAVICH, G.S., “Inverse and Optimization Problems in Heat Transfer”, *J. of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 28, n. 1, pp. 1-24, 2006.
- [82] BECK, J.V., “Transient Sensitivity Coefficients for the Thermal Contact Conductance”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 10, pp. 1615-1617, 1967.
- [83] BECK, J.V., “Determination of Optimum, Transient Experiments for Thermal Contact Conductance”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 12, pp. 621-633, 1969.
- [84] ARTYUKHIN, E.A., “Experimental Design of Measurement of the Solution of Coefficient-Type Inverse Heat Conduction Problem”, *J. Eng. Phys.*, v. 48, n. 3, pp. 372-376, 1985.
- [85] ARTYUKHIN, E.A., NENAROKOMOV, A.V., “Optimal Experimental Design for Determining the Total Emissivity of Materials”, *High Temperatures*, v. 26, n. 5, pp. 761-767, 1988.
- [86] ARTYUKHIN, E.A., GUSEVA, L.I., TRYANIN, A.P. *et al.*, “Influence of Uncertainty in the Initial Data on the Results of Planning Temperature Measurements”, Plenum, Translated from *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*, v. 58, n.5, pp. 848-853, 1990.
- [87] TAKTAK, R., *Design and Validation of Optimal Experiments for Estimating Thermal Properties of Composite Materials*, Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Michigan State University, 1992.
- [88] TAKTAK, R., BECK, J. V., SCOTT, E. P., “Optimal Experimental Design for Estimating Thermal Properties of Composite Materials”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 36, n. 12, pp. 2977-2986, 1993.
- [89] FADALE, T.D., NENAROKOMOV, A.V., EMERY, A.F., “Two Approaches to Optimal Sensor Locations”, *ASME J. Heat Transfer*, v. 117, pp. 373-379, 1995.
- [90] EMERY, A.F., FADALE, T.D., “Design of Experiments Using Uncertainty Information”, *ASME J. Heat Transfer*, v. 118, pp. 532-538, 1996.
- [91] EMERY, A.F., FADALE, T.D., “The Effect of Imprecisions in Thermal Sensor Location and Boundary Conditions on Optimal Sensor Location and Experimental Accuracy”, *ASME J. Heat Transfer*, v. 119, pp. 661-665, 1997.

- [92] EMERY, A.F., NENAROKOMOV, A.V., “Optimal Experiment Design”, *Meas. Sci. Technol.*, v. 9, pp. 864-876, 1998.
- [93] MATTHEW, L.K., VISKANTA, R., INCROPERA, F.P., “Development of Inverse Methods for Determining Thermophysical and Radiative Properties of High-Temperature Fibrous Materials”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 27, n. 4, pp. 487-495, 1984.
- [94] NENAROKOMOV, A.V., ALIFANOV, O.M., “Estimation of Insulating Material’s Thermophysical and Radiation Properties”, *4<sup>th</sup> International Conference on Inverse Problems in Engineering*, Rio de Janeiro, Brazil, 2002.
- [95] PARKER, W.J., JENKINS, W.J., BUTLER, C.P. *et al.*, “Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity and Thermal Conductivity”, *J. of App. Physics*, v. 32, n. 9, pp. 1679-1684, 1961.
- [96] COWAN, R.D., “Proposed Method of Measuring Thermal Diffusivity at High Temperatures”, *J. of App. Physics*, v. 32, n. 7, pp. 1363-1370, 1961.
- [97] COWAN, R.D., “Pulse Method of Measuring Thermal Diffusivity at High Temperatures”, *J. of App. Physics*, v. 34, n. 4, pp. 926-927, 1963.
- [98] CAPE, J., LEHMAN, G., “Temperature and Finite Pulse-Time Effects in the Flash Method for Measuring Thermal Diffusivity”, *J. of App. Physics*, v. 34, n. 7, pp. 1909-1913, 1963.
- [99] CLARK, L.M., TAYLOR, R.E., “Radiation Loss in the Flash Method for Thermal Diffusivity”, *J. of App. Physics*, v. 46, n. 2, pp. 714-719, 1975.
- [100] PINTO, C.S.C., MASSARD, H., COUTO, P. *et al.*, “Measurement of Thermophysical Properties of Ceramics by the Flash Method”, *METROSUL IV – IV Congresso Latino-Americano de Metrologia*, Foz de Iguaçu, BRAZIL, 09-12 de Novembro, 2004.
- [101] MEHLING, H., HAUTZINGER, G., NILSSON, O. *et al.*, “Thermal Diffusivity of Semitransparent Materials Determined by the Laser-Flash Method Applying a New Analytical Model”, *Int. J. Thermophysics*, v. 19, n. 3, pp. 941-949, 1998.

- [102] LAZARD, M., ANDRÉ, S., MAILLET, D., “Diffusivity Measurement of Semi-transparent Media: Model of the Coupled Transient Heat Transfer and Experiments on Glass, Silica Glass and Zinc Selenide”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 47, pp. 477-487, 2004.
- [103] DEGIOVANNI, A., LAURENT, M., “Une nouvelle technique d’identification de la diffusivité thermique pour la méthode Flash”, *Rev. Phys. Appl.*, v. 21, pp. 229-237, 1986.
- [104] ANDRÉ, S., DEGIOVANNI, A., “Experimental Measurements of the Phonic Diffusivity of Semi-Transparent Materials Up to 800 K”, *Glas. Ber.*, v. 66, pp. 1-8, 1993.
- [105] LAZARD, M., ANDRÉ, S., MAILLET, D. *et al.*, “Radiative and Conductive Heat Transfer: a Coupled Model for Parameter Estimation”, *High Temperatures.-High Pressures*, v. 32, pp. 9-17, 2000.
- [106] LAZARD, M., ANDRÉ, S., MAILLET, D. *et al.*, “Flash Experiment on a Semi-Transparent Material: Interest of a Reduced Model”, *Inverse Problems in Engineering*, v. 9, n. 4, pp. 413-429, 2001.
- [107] DOWDING, K.J., BECK, J.V., BLACKWELL, B.F., “Estimation of Directional-Dependent Thermal Properties in a Carbon-Carbon Composite”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 39, n. 15, pp. 3157-3164, 1996.
- [108] GRUSS, C., BALAGEAS, D., “Theoretical and experimental applications of the flying spot camera”, *Quantitative Infrared Thermography (QIRT 92)*, ED D. Balageas, G. Busse, GM Carlomagno, ed. Europ Thermique et Industrie, Paris, pp. 19-24, 1992.
- [109] LEPOUTRE, F., LEFEBVRE, J., LHERMITTE, T. *et al.*, “Mesures thermiques microscopiques”, *Rev. Gén. Thermique*, v. 35, pp. 344-354, 1996.
- [110] GRIESINGER, A., HURLER, W., PIETRALLA, M., “A Photothermal Method with Step Heating for Measuring the Thermal Diffusivity of Anisotropic Solids”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 40, n. 13, pp. 3049-3058, 1997.

- [111] SAWAF, B., OZISIK, M.N., JARNY, Y., “An Inverse Analysis to Estimate Linearly Temperature Dependent Thermal Conductivity Components and Heat Capacity of an Orthotropic Medium”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 38, n. 16, pp. 3005-3010, 1995.
- [112] SAWAF, B., OZISIK, M.N., “Determining the Constant Thermal Conductivity of Orthotropic Materials”, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v. 22, pp. 201-211, 1995.
- [113] MEJIAS, M.M., ORLANDE, H.R.B., OZISIK, M.N., “Effects of the Heating Process and Body Dimensions on the Estimation of the Thermal Conductivity Components of Orthotropic Solids”, *Inverse Problems in Engineering*, v. 11, n. 1, pp. 75-89, 2003.
- [114] RODRIGUES, F.A., ORLANDE, H.R.B., MEJIAS, M.M., “Use of a Single Heated Surface for the Estimation of Thermal Conductivity Components of Orthotropic 3D Solids”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 12, n. 5, pp. 501-517, 2004.
- [115] SILVA NETO A.J., OZISIK, M.N., “An inverse problem of simultaneous estimation of radiation phase function, albedo and optical thickness”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 53, n. 4, pp. 397-409, 1995.
- [116] MOURA, L.M., BAILLIS, D., SACADURA J.F., “Identification of Thermal Radiation Properties of Dispersed Media: Comparison of Different Strategies”, In: *Heat Transfer 1998, Proceedings of 11<sup>th</sup> IHTC*, v. 7, Kyongju, Korea, August 23-28, 1998.
- [117] NICOLAU, V.P., *Identification des propriétés radiatives des matériaux semi-transparents diffusants*, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 1994.
- [118] NICOLAU, V.P., RAYNAUD, M., SACADURA, J.F., “Spectral Radiative Properties Identification of Fiber Insulating Materials”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 37, pp. 311-324, 1994.
- [119] MOURA, L.M., *Identification des propriétés radiatives des matériaux semi-transparents diffusants en situation de non-symétrie azimutal du champ radiatif*, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 1998.

- [120] CUNNINGTON, G.R., LEE, S.C., “Radiative Properties of Fibrous Insulations: Theory Versus Experiment”, *AIAA J. Thermophysics and Heat Transfer*, v. 10, n. 3, pp. 460-465, 1996.
- [121] DOERMANN, D., *Modélisation des transferts thermiques dans des matériaux semi-transparents de type mousse à pores ouverts et prédiction des propriétés radiatives*, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 1995.
- [122] BAILLIS, D., RAYNAUD, M., SACADURA, J.F., “Spectral Radiative Properties of Open-Cell Insulation”, *AIAA J. Thermophysics and Heat Transfer*, v. 13, n. 3, pp. 292-298, 1999.
- [123] BAILLIS, D., ARDUINI-SCHUSTER, M., SACADURA, J.F., “Identification of Spectral Radiative Properties of Polyurethane Foam from Hemispherical and Bi-Directional Transmittance and Reflectance Measurements”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 73, pp. 297-306, 2001.
- [124] BAILLIS, D., SACADURA, J.F., “Identification of Polyurethane Foam Radiative Properties – Influence of Transmittance Measurements Number”, *AIAA J. Thermophysics and Heat Transfer*, v. 16, n. 2, pp. 200-206, 2002.
- [125] HENDRICKS, T.J., HOWELL, J.R., “Absorption/Scattering Coefficients and Scattering Phase Functions in Reticulated Porous Ceramics”, *ASME J. Heat Transfer*, v. 118, pp. 79-87, 1996.
- [126] OU, N.R., WU, C.Y., “Simultaneous Estimation of Extinction Coefficient Distribution, Scattering Albedo and Phase Function of a Two-Dimensional Medium”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 45, n. 23, pp. 4663-4674, 2002.
- [127] LOPES, R., *Mesure et prédiction du facteur d’émission de matériaux semi-transparents à haute température*, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 1998.
- [128] MODEST, M.F., *Radiative Heat Transfer*, New York, Mc Graw-Hill, 1993.
- [129] WELLELE, O., *Détermination du facteur d’émission spectral et directionnel de matériaux semi-transparents à haute température*, Thèse de DEA, INSA de Lyon, Lyon, 2002.

- [130] COUTOULY, J.F., *Contribution au contrôle en temps réel des procédés métallurgiques par faisceau laser de puissance, en vue du durcissement superficiel en phase solide*, Thèse de Doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 1994.
- [131] LI, J.C., MERLIN, J., PEREZ, J., “Etude comparative de différents dispositifs permettant de transformer un faisceau laser de puissance avec une répartition énergétique gaussienne en une répartition uniforme”, *Revue Phys. Appl.*, Physics Abstracts 71.60-71.78, v. 21, pp. 425-433, 1986.
- [132] LI, J.C., MERLIN, J., “Effets thermiques induits par des dispositifs optiques d’uniformisation de faisceau laser”, *Journal de Physique III*, Physics Abstracts, v. 1, pp. 331-348, 1991.
- [133] LI, J.C., RENARD, C., MERLIN, J., “Calcul des effets thermiques induits par un dispositif optique permettant de condenser un faisceau laser de puissance en une tache rectangulaire”, *Journal de Physique III*, Physics Abstracts, v. 3, pp. 1497-1508, 1993.
- [134] MERLIN, J., LI, J.C., OLIVEIRA, C., MANDERSCHIED, T. *et al.*, “Modification par recombinaison de faisceau de l’éclairement délivré par une source laser de puissance: étude théorique et expérimentale”, *J. Optics*, Paris, v. 21, pp. 51-61, 1990.
- [135] ROZENBAUM, O., *Etude de l’influence de la texture sur l’émissivité spectrale de matériaux poreux semi-transparents à haute température*, Thèse de Doctorat, Université d’Orléans, Orléans, 1999.
- [136] CHANG, S.L., RHEE, R.T., “Blackbody Radiation Functions”, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v. 11, n. 5, pp. 451-455, 1984.
- [137] ÖZISIK, M.N., *Heat Conduction*, New York, John Wiley & Sons, 1993.
- [138] YAN, B., STAMNES, K., “Fast yet Accurate Computation of the Complete Radiance Distribution in the Coupled Atmosphere-Ocean System”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 76, pp. 207-223, 2003.
- [139] SIEGEL, R., HOWELL, J.R., *Thermal Radiation Heat Transfer*, New York, Mc Graw-Hill, 1972.

- [140] KHOUKHI, M., MARUYAMA, S., SAKAI, S. *et al.*, “Combined non-gray radiative and conductive heat transfer in solar collector glass cover”, *Solar Energy*, v. 75, pp.285-293, 2003.
- [141] BREWSTER, M.Q., TIEN, C.L., “Radiative Transfer in Packed Fluidized Beds: Dependent Versus Independent Scattering”, *ASME J. Heat Transfer*, v. 104, pp. 573-579, 1982.
- [142] CARTIGNY, J.D., YAMADA, Y., TIEN, C.L., “Radiative Transfer With Dependent Scattering by Particles: Part 1 – Theoretical Investigation”, *ASME J. Heat Transfer*, v. 108, pp. 608-613, 1986.
- [143] YAMADA, Y., CARTIGNY, J.D., TIEN, C.L., “Radiative Transfer With Dependent Scattering by Particles: Part 2 – Experimental Investigation”, *ASME J. Heat Transfer*, v. 108, pp. 614-618, 1986.
- [144] SINGH, B.P., KAVIANY, M., “Independent theory versus direct simulation of radiation heat transfer in packed beds”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 34, n. 11, pp. 2869-2882, 1991.
- [145] BARKSTROM, B.R., “A Finite Difference Method of Solving Anisotropic Scattering Problems”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 16, n. 9, pp. 725-739, 1976.
- [146] ALTIMIR, I., *Contribution à l'étude de transfert radiatif au milieu diffusant*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1981.
- [147] CHAI, J.C., LEE, H.S., PATANKAR, S.V., “Improved Treatment of Scattering Using the Discrete Ordinates Method”, *ASME J. Heat Transfer*, v. 116, pp. 260-263, 1994.
- [148] KIM, S.H., HUH, K.Y., “A New Angular Discretization Scheme of the Finite Volume Method for 3-D Radiative Heat Transfer in Absorbing, Emitting and Anisotropically Scattering Media”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 43, n. 7, pp. 1233-1242, 2000.
- [149] CARLSON, B.G., LATHROP, K.D., “Transport Theory – The Method of Discrete Ordinates”, In: *Computing Methods in Reactor Physics*, New York, Gordon & Breach, 1968.

- [150] LATHROP, K.D., “Spatial Differencing of the Transport Equation: Positivity vs. Accuracy”, *J. Comput. Phys.*, v. 4, pp. 475-498, 1969.
- [151] EL WAKIL, N., *Etude de transferts de chaleurs par conduction, convection et rayonnement couplés dans des milieux semi-transparentes fluides ou poreux. Elaboration de modèles de simulation en géométrie bidimensionnelle*, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, Lyon, 1991.
- [152] GU, Y., LIAO, W., ZHU, J., “An Efficient High-Order Algorithm for Solving Systems of 3-D Reaction-Diffusion Equations”, *J. Comput. Appl. Math.*, v. 155, pp. 1-17, 2003.
- [153] RAMOS, J.I., “Implicit, Compact, Linearized  $\theta$ -Methods with Factorization for Multidimensional Reaction-Diffusion Equations”, *Appl. Math. Comput.*, v. 94, pp. 17-43, 1998.
- [154] GAO, C., WANG, Y., “A General Formulation of Peaceman and Rachford ADI Method for N-Dimensional Heat Diffusion Equation”, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v. 23, n. 6, pp. 845-854, 1996.
- [155] DOUGLAS JR., J., RACHFORD JR., H.H., *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, v. 82, p. 421, 1956.
- [156] BRIAN, P.L.T., “A Finite-Difference Method of High-Order Accuracy for the Solution of Three-Dimensional Transient Heat Conduction Problems”, *A.I.Ch.E. Journal*, v. 7, pp. 367-370, 1961.
- [157] DOUGLAS JR., J., “Alternating Direction Methods for Three Space Variables”, *Numerische Mathematik*, v. 4, pp. 41-63, 1962.
- [158] DOUGLAS JR., J., GUNN, J.E., “A General Formulation of Alternating Direction Methods, Part 1, Parabolic and Hyperbolic Problems”, *Numerische Mathematik*, v. 6, pp. 428-453, 1964.
- [159] FERREIRA, M.S., YANAGIHARA, J.I., “Unsteady Heat Conduction in 3D Elliptical Cylinders”, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, v. 28, n. 7, pp. 963-972, 2001.
- [160] DENNIS, J. E. JR., SCHNABEL, R. B., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1983.

- [161] MORÉ, J. J., In: *Numerical Analysis, Lecture Notes in Mathematics*, v. 630, pp. 105-116, Berlin, G. A. Watson, Springer-Verlag, 1977.
- [162] IMSL Library, ed. 10, Houston, Texas, USA, 1987.
- [163] KAIPIO, J., SOMERSALO, E., *Statistical and Computational Inverse Problems*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, 2004.
- [164] L'ECUYER, P., "Tables of maximally equidistributed combined LSFR generators", *Mathematics of Computation*, v. 68, n. 225, pp. 261-269, 1999.
- [165] MARSAGLIA, G., NARASIMHAN, B., ZAMAN, A., "A random number generator for PCs", *Computer Physics Communications*, v. 60, pp. 345-349, 1990.
- [166] LUSCHER, M., "A portable high-quality random number generator for lattice field theory simulations", *Computer Physics Communications*, v. 79, n. 1, pp. 100-110, 1994.
- [167] JAMES, F., "RANLUX: A Fortran implementation of the high-quality pseudorandom number generator of Lüscher", *Computer Physics Communications*, v. 79, n. 1, pp. 111-114, 1994.
- [168] MATSUMOTO, M., NISHIMURA, T., "Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator", *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, v. 8, n. 1, pp. 3-30, 1998.
- [169] BALABANOV, V.O., VENTER, G.V., "Multi-Fidelity Optimization with High-Fidelity Analysis and Low-Fidelity Gradients", In: AIAA 2004-4459, *10<sup>th</sup> AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, Albany, New York, 30 August – 1 September 2004.
- [170] WELLELE, O., ORLANDE, H.R.B., COLAÇO, M.J. *et al.*, "Reduced model for parameter estimation in coupled conduction-radiation", *6<sup>th</sup> World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimisation*, Rio de Janeiro, Brazil, 30 May – 03 June 2005.
- [171] KIM, T.K., LEE, H., "Effect of anisotropic scattering on radiative heat transfer in two-dimensional rectangular enclosures", *Int. J. Heat Mass Transfer*, v. 31, n. 8, pp. 1711-1721, 1988.

- [172] WELLELE, O., ORLANDE, H.R.B., RUPERTI JR., N. *et al.*, “Coupled conduction-radiation in semi-transparent materials at high temperatures”, *J. of Physics and Chemistry of Solids*, v. 67, pp. 2230-2240, 2006.
- [173] WELLELE, O., ORLANDE, H.R.B., RUPERTI JR., N. *et al.*, “Identification of the Thermophysical Properties of Semi-Transparent Materials”, *13<sup>th</sup> International Heat Transfer Conference (IHTC-13)*, Sydney, Australia, 13-18 August, 2006.
- [174] OU, S.-C. S., LIOU, K.N., “Generalization of the Spherical Harmonic Method to Radiative Transfer in Multi-Dimensional Space”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, v. 28, n. 4, pp. 271-288, 1982.
- [175] KARP, A.H., “Recent advances in the spherical harmonics method”, *Int. J. Engineering Science*, v. 36, pp. 1551-1568, 1998.
- [176] ORLANDE, H.R.B., COLAÇO, M.J., DULIKRAVICH, G.S., “Approximation of the likelihood function in the Bayesian technique for the solution of inverse problems”, In: *Inverse Problems, Design and Optimization Symposium*, Miami, Florida, U.S.A., 16-18 April, 2007.

# Apêndice A

## Solução Analítica do Problema Direto de Condução

### A.1 Formulação Adimensional e Solução Analítica do Problema Direto

Para reduzir o número de parâmetros do problema direto de condução sugerido na seção 3.3.a, e para obter-se uma solução analítica usando a Técnica de Transformadas Integrais [137], utilizam-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$x = \frac{x^*}{d_{ref}^*} \sqrt{\frac{k_{ref}^*}{k_x^*}} \quad ; \quad y = \frac{y^*}{d_{ref}^*} \sqrt{\frac{k_{ref}^*}{k_y^*}} \quad ; \quad z = \frac{z^*}{d_{ref}^*} \sqrt{\frac{k_{ref}^*}{k_z^*}} \quad (\text{A.1.1.a-c})$$

$$a = \frac{a^*}{d_{ref}^*} \sqrt{\frac{k_{ref}^*}{k_x^*}} \quad ; \quad b = \frac{b^*}{d_{ref}^*} \sqrt{\frac{k_{ref}^*}{k_y^*}} \quad ; \quad c = \frac{c^*}{d_{ref}^*} \sqrt{\frac{k_{ref}^*}{k_z^*}} \quad (\text{A.1.1.d-f})$$

$$t = \frac{k_{ref}^* t^*}{C^* d_{ref}^{*2}} \quad ; \quad T(t) = \frac{T^*(t) - T_\infty^*}{\frac{q_{ref}^* d_{ref}^*}{k_{ref}^*}} \quad (\text{A.1.1.g,h})$$

$$\text{Bi}_x = \frac{h^{rad*} d_{ref}^*}{\sqrt{k_{ref}^* k_x^*}} \quad ; \quad \text{Bi}_y = \frac{h^{rad*} d_{ref}^*}{\sqrt{k_{ref}^* k_y^*}} \quad ; \quad \text{Bi}_z = \frac{h^{rad*} d_{ref}^*}{\sqrt{k_{ref}^* k_z^*}} \quad (\text{A.1.1.i-k})$$

$$q_l(x, y, t) = \frac{q_l^*(x, y, t)}{q_{ref}^*} \sqrt{\frac{k_{ref}^*}{k_z^*}} \quad (\text{A.1.1.l})$$

onde  $k_{ref}^* = \sqrt[3]{k_x^* k_y^* k_z^*}$ . O problema adimensional, que utiliza as variáveis adimensionais dadas pelas equações (A.1.1.a-l) se escreve:

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{A.1.2.a})$$

em  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ ,  $0 < z < c$  e para  $t > 0$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{em } x = 0, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c \quad \text{e para } t > 0 \quad (\text{A.1.2.b})$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \text{Bi}_x T = 0 \quad \text{em } x = a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c \quad \text{e para } t > 0 \quad (\text{A.1.2.c})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{em } 0 < x < a, \quad y = 0, \quad 0 < z < c \quad \text{e para } t > 0 \quad (\text{A.1.2.d})$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} + \text{Bi}_y T = 0 \quad \text{em } 0 < x < a, \quad y = b, \quad 0 < z < c \quad \text{e para } t > 0 \quad (\text{A.1.2.e})$$

$$-\frac{\partial T}{\partial z} + \text{Bi}_z T = 0 \quad \text{em } 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad z = 0 \quad \text{e para } t > 0 \quad (\text{A.1.2.f})$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} + \text{Bi}_z T = q_l(x, y, t) \quad \text{em } 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad z = c \quad \text{e para } t > 0 \quad (\text{A.1.2.g})$$

$$T = T_0(x, y, z) \quad \text{em } 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c \quad \text{e para } t = 0 \quad (\text{A.1.2.h})$$

Considerando a temperatura dimensional inicial da amostra próxima da temperatura envoltória, a condição inicial do problema adimensional, dada pela equação (A.1.2.h), se escreve:

$$T = 0 \quad \text{em } 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c \quad \text{e para } t = 0 \quad (\text{A.1.3})$$

Nota-se que o divergente do fluxo radiativo não foi incluído na equação de conservação da energia, inicialmente representada pela equação (3.3.5) da seção 3.3, no objetivo de definir o problema de condução sem acoplamento com a radiação.

Definindo a temperatura em termo de funções das variáveis independentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $t$ , e usando-se a técnica de transformada integral clássica [137], obtém-se a expressão analítica do campo de temperatura transiente na amostra:

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X(\beta_i, x)Y(\gamma_j, y)Z(\eta_k, z)}{N(\beta_i)N(\gamma_j)N(\eta_k)} \hat{T}(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t) \quad (\text{A.1.4.a})$$

$$\text{onde } \hat{T}(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t) = e^{-(\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2)t} \int_{t'=0}^t e^{(\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2)t'} A(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t') dt' \quad (\text{A.1.4.b})$$

$$\text{e } A(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t') = Z(\eta_k, c) \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b q_l(x, y, t') X(\beta_i, x) Y(\gamma_j, y) dy dx \quad (\text{A.1.4.c})$$

$X(\beta_i, x)$ ,  $Y(\gamma_j, y)$  e  $Z(\eta_k, z)$  são as autofunções ortogonais dos problemas de Sturm-Liouville obtidos após separação das variáveis.  $N(\beta_i)$ ,  $N(\gamma_j)$  e  $N(\eta_k)$  são as integrais de normalização e  $\beta_i$ ,  $\gamma_j$  e  $\eta_k$  os autovalores de funções transcendentais tabeladas [137]:

$$X(\beta_i, x) = \cos(\beta_i x) \quad ; \quad \frac{1}{N(\beta_i)} = 2 \frac{\beta_i^2 + \text{Bi}_x^2}{a(\beta_i^2 + \text{Bi}_x^2) + \text{Bi}_x} \quad (\text{A.1.5.a,b})$$

$$\beta_i \tan(\beta_i a) = \text{Bi}_x \rightarrow \beta_i \quad (\text{A.1.5.c})$$

$$Y(\gamma_j, y) = \cos(\gamma_j y) \quad ; \quad \frac{1}{N(\gamma_j)} = 2 \frac{\gamma_j^2 + \text{Bi}_y^2}{b(\gamma_j^2 + \text{Bi}_y^2) + \text{Bi}_y} \quad (\text{A.1.5.d,e})$$

$$\gamma_j \tan(\gamma_j b) = \text{Bi}_y \rightarrow \gamma_j \quad (\text{A.1.5.f})$$

$$Z(\eta_k, z) = \eta_k \cos(\eta_k z) + \text{Bi}_z \text{sen}(\eta_k z) \quad (\text{A.1.5.g})$$

$$\frac{1}{N(\eta_k)} = 2 \left[ (\eta_k^2 + \text{Bi}_z^2) \left( c + \frac{\text{Bi}_z}{\eta_k^2 + \text{Bi}_z^2} \right) + \text{Bi}_z \right]^{-1} \quad (\text{A.1.5.h})$$

$$\tan(\eta_k c) = \frac{2\eta_k \text{Bi}_z}{\eta_k^2 - \text{Bi}_z^2} \rightarrow \eta_k \quad (\text{A.1.5.i})$$

## A.2 Solução Analítica para Fluxo de Distribuição Uniforme

A função  $q_l(x, y, t)$ , sendo exclusivamente dependente do tempo pode ser definida como uma função degrau de duração  $\Delta t$  e de amplitude  $q_l$ . Neste caso, o termo  $A(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t)$  toma duas expressões dependendo de  $t$  pertencer aos intervalos  $[0, \Delta t]$  ou  $]\Delta t, t_f]$ :

$$A^-(\beta_i, \gamma_j, \eta_k) = \frac{q_l}{\beta_i \gamma_j} (\eta_k \cos(\eta_k c) + \text{Bi}_z \text{sen}(\eta_k c)) \text{sen}(\beta_i a) \text{sen}(\gamma_j b) \quad (\text{A.2.1.a})$$

para  $0 \leq t \leq \Delta t$

$$A^+(\beta_i, \gamma_j, \eta_k) = 0 \quad \text{para } t > \Delta t \quad (\text{A.2.1.b})$$

Portanto, as seguintes simplificações devem ser aplicadas para  $\hat{T}(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t)$ :

i). para  $0 \leq t \leq \Delta t$ :

$$\hat{T}(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t) = e^{-(\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2)t} \int_{t'=0}^t e^{(\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2)t'} A^-(\beta_i, \gamma_j, \eta_k) dt'$$

$$\Leftrightarrow \hat{T}(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t) = \frac{A^-(\beta_i, \gamma_j, \eta_k)}{\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2} \left[ 1 - e^{-(\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2)t} \right] \quad (\text{A.2.2.a})$$

ii). para  $t > \Delta t$ :

$$\begin{aligned} \hat{T}(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t) &= e^{-(\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2)t} \left[ \int_{t'=0}^{\Delta t} e^{(\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2)t'} A^-(\beta_i, \gamma_j, \eta_k) dt' \right. \\ &\quad \left. + \int_{t'=\Delta t}^t e^{(\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2)t'} A^+(\beta_i, \gamma_j, \eta_k) dt' \right]_{=0} \\ \Leftrightarrow \hat{T}(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t) &= \frac{A^-(\beta_i, \gamma_j, \eta_k)}{\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2} \left[ e^{-(\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2)(t-\Delta t)} - e^{-(\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2)t} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2.2.b})$$

### A.3 Solução Analítica para Fluxo de Distribuição Gaussiana

A função  $q_l(x, y, t)$ , definida pela equação (A.3.1), depende das variáveis espaciais  $x$  e  $y$ . A função degrau no tempo foi também introduzida na definição do fluxo laser, onde  $H(t)$  é a função Heaviside.

$$q_l(x, y, t) = \frac{q_l}{2\pi\sigma_l^2} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma_l^2}\right)} [1 - H(t - \Delta t)] \quad (\text{A.3.1})$$

onde  $\sigma_l = r_l/2.576$ .

O raio  $r_l$  delimita a zona circular da superfície  $z = c$  na qual 98 % do fluxo laser é contida.

Neste caso, o termo  $A(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t)$  toma duas expressões dependendo de  $t$  pertencer aos intervalos  $[0, \Delta t]$  ou  $[\Delta t, t_f]$ :

$$A^-(\beta_i, \gamma_j, \eta_k) = q_l \left[ B_1(\beta_i) B_2(\gamma_j) (\eta_k \cos(\eta_k c) + \text{Bi}_z \text{sen}(\eta_k c)) \right] \quad (\text{A.3.1.a})$$

para  $0 \leq t \leq \Delta t$

$$A^+(\beta_i, \gamma_j, \eta_k) = 0 \quad (\text{A.3.1.b})$$

para  $t > \Delta t$

onde

$$B_1(\beta_i) = \frac{1}{4} \left( \text{erf} \left( \frac{a + i\sigma_l^2 \beta_i}{\sigma_l \sqrt{2}} \right) - \text{erf} \left( \frac{-a + i\sigma_l^2 \beta_i}{\sigma_l \sqrt{2}} \right) \right) e^{-\left(\frac{\sigma_l \beta_i}{\sqrt{2}}\right)^2} \quad e$$

$$B_2(\gamma_j) = \frac{1}{4} \left( \text{erf} \left( \frac{b + i\sigma_l^2 \gamma_j}{\sigma_l \sqrt{2}} \right) - \text{erf} \left( \frac{-b + i\sigma_l^2 \gamma_j}{\sigma_l \sqrt{2}} \right) \right) e^{-\left(\frac{\sigma_l \gamma_j}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

De modo semelhante à seção A.2, as seguintes simplificações devem ser aplicadas para  $\hat{\hat{T}}(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t)$ :

i). para  $0 \leq t \leq \Delta t$ :

$$\hat{\hat{T}}(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t) = \frac{A^-(\beta_i, \gamma_j, \eta_k)}{\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2} \left[ 1 - e^{-(\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2)t} \right] \quad (\text{A.3.2.a})$$

ii). para  $t > \Delta t$ :

$$\hat{\hat{T}}(\beta_i, \gamma_j, \eta_k, t) = \frac{A^-(\beta_i, \gamma_j, \eta_k)}{\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2} \left[ e^{-(\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2)(t-\Delta t)} - e^{-(\beta_i^2 + \gamma_j^2 + \eta_k^2)t} \right] \quad (\text{A.3.2.b})$$

# Apêndice B

## Résumé

### B.1 Introduction

Le rayonnement et la conduction constituent les deux modes principaux de transfert thermique au sein d'un matériau semi-transparent (MST) homogène porté à haute température. Afin de modéliser correctement ces transferts lors de la simulation de problèmes physiques, il est nécessaire d'introduire des données concernant le matériau en jeu. Pour cette raison, l'identification des propriétés par les méthodes inverses joue un rôle incontournable puisqu'elle permet l'obtention des propriétés qui représentent le matériau. On distinguera parmi les propriétés thermophysiques étudiées les propriétés radiatives et celles liées à la diffusion thermique.

Dans un matériau anisotrope, la conduction dépend de la direction. Si l'on considère nuls tous les éléments extradiagonaux du tenseur de conductivité thermique, ce qui permet de simplifier de manière drastique le modèle anisotrope, le matériau devient orthotrope et la conduction devient dépendante des directions principales du système de directions orthogonales. Quatre propriétés principales rentrent alors en jeu : les trois composantes diagonales du tenseur de conductivité thermique et la capacité thermique volumique.

Lorsque le matériau est semi-transparent, il interagit directement avec le rayonnement. Ce dernier souffre trois types d'altérations : l'émission, l'absorption et la diffusion radiative. Deux paramètres, le coefficient d'absorption et le coefficient de diffusion radiative, quantifient ces trois phénomènes. La fonction de phase quant à elle définit la redistribution directionnelle de la luminance incidente en tout point du matériau. Cette fonction est liée à l'architecture microscopique du milieu.

L'obtention de l'ensemble des propriétés thermophysiques est un défi en matière d'estimation de paramètres dans le sens où les informations provenant d'une expérience sont rarement sensibles à tous les paramètres simultanément. Pour cette raison, il est envisagé de concevoir deux expériences différentes où il est question d'estimer

respectivement les propriétés liées à la diffusion thermique et les propriétés radiatives. Des mesures de facteur d'émission spectral directionnel seront utilisées dans l'objectif d'obtenir les propriétés radiatives de matériaux, tandis que des mesures de température en régime transitoire, obtenues par tomographie infrarouge, seront utilisées pour l'obtention des propriétés liées à la diffusion thermique. Ce projet espère contribuer à l'étude des propriétés de matériaux semi-transparent tels que les verres et les céramiques, aujourd'hui largement utilisés comme boucliers thermiques dans l'industrie aérospatiale ou comme réfractaires dans toutes autres applications haute température où les transferts radiatifs sont très sensibles.

## B.2 Brève Révision Bibliographique

### B.2.1 Technique d'estimation de paramètres liés à la diffusion thermique

De nombreuses références traitent de l'estimation de paramètres liés à la diffusion par la méthode "Flash" [95-101]. Celle-ci, qui prévoit initialement de mesurer la diffusivité thermique de matériaux opaque [95], a souffert quelques modifications afin de prendre en compte les pertes de chaleur et le rayonnement au sein du matériau [101-106] depuis son apparition. Cependant, la méthode Flash ne reste applicable qu'à des matériaux isotropes. Elle ne permet également pas d'estimer les propriétés radiatives avec précision. Sachant que la température en fonction du temps est mesurée sur une des frontières de l'échantillon de matériau généralement peinte d'une substance hautement absorbante, la mesure est peu sensible au rayonnement interne.

Afin d'identifier les différentes composantes de la conductivité thermique sans contact, car tout contact direct avec l'échantillon doit être évité lors de manipulations à haute température, Griesinger *et al.* [110] ont mis au point un dispositif expérimental basée sur la méthode « Flying spot » [108,109]. Cette méthode consiste à chauffer ponctuellement une fine couche de matériau, et à mesurer par pyrométrie infrarouge le champ de température en fonction du temps en divers point du film. Elle ne permet pas d'estimer avec exactitude les paramètres radiatifs, bien que ceux-ci soient important pour une détermination précise des paramètres liés à la diffusion de chaleur. Les paramètres radiatifs introduits dans le modèle direct sont évalués systématiquement en utilisant d'autres méthodes expérimentales.

## B.2.2 Technique d'estimation de paramètres radiatifs

Peu de références se rapportent à l'estimation des paramètres radiatifs de matériaux semi-transparent à haute température, du fait de l'importance de l'émission propre du matériau. Cependant, à basse température, l'estimation du coefficient d'extinction, de l'albédo et de certains paramètres de la fonction de phase est possible en mesurant le rayonnement réfléchi et transmis par un échantillon, illuminé par une source de rayonnement monochromatique [116-119]. Le dispositif permettant de réaliser ces mesures étant extrêmement encombrant, il ne peut actuellement pas être associé à un système de chauffage pour la réalisation de mesures à haute température.

Pour contourner cette difficulté, la solution la plus évidente serait d'estimer les paramètres radiatifs à partir de mesures d'émission propre du matériau chauffé préalablement. Cette mesure présente deux avantages du point de vue expérimental :

- a) Le flux radiatifs émis est dominant à haute température. Cela permet de réduire les erreurs liées à sa mesure,
- b) Le rayonnement est un phénomène instantané. Cela permet de réduire la sensibilité des mesures d'émission par rapport à d'autres phénomènes de transferts lents tels que la diffusion de chaleur.

La sensibilité des mesures d'émission du matériau par rapport aux paramètres radiatifs sera étudiée au cours de ce travail afin d'évaluer la possibilité d'estimer ces paramètres.

## B.2.3 Articulation du document

Deux modèles directs sont définis pour caractériser respectivement le problème d'estimation des paramètres liés à la diffusion thermique et celui relatif à l'estimation des paramètres radiatifs. Ces deux problèmes considèrent l'équation de conservation de l'énergie couplée à l'Equation du Transfert Radiatif (ETR) en trois dimensions. La méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement les deux problèmes ; une maille identique est utilisée pour le découpage du domaine physique représenté par l'échantillon.

Une fois les problèmes directs formulés et validés, l'étape suivante consiste à étudier et optimiser les projets d'expériences. Cette étape permet d'évaluer les

conditions expérimentales favorables à l'obtention de résultats avec une variance minimum. Lors de cette étude, les coefficients de sensibilité et le conditionnement de la matrice d'information sont analysés graphiquement. Cette analyse permet entre autre visualiser les paramètres qui pourront ou non être identifiés.

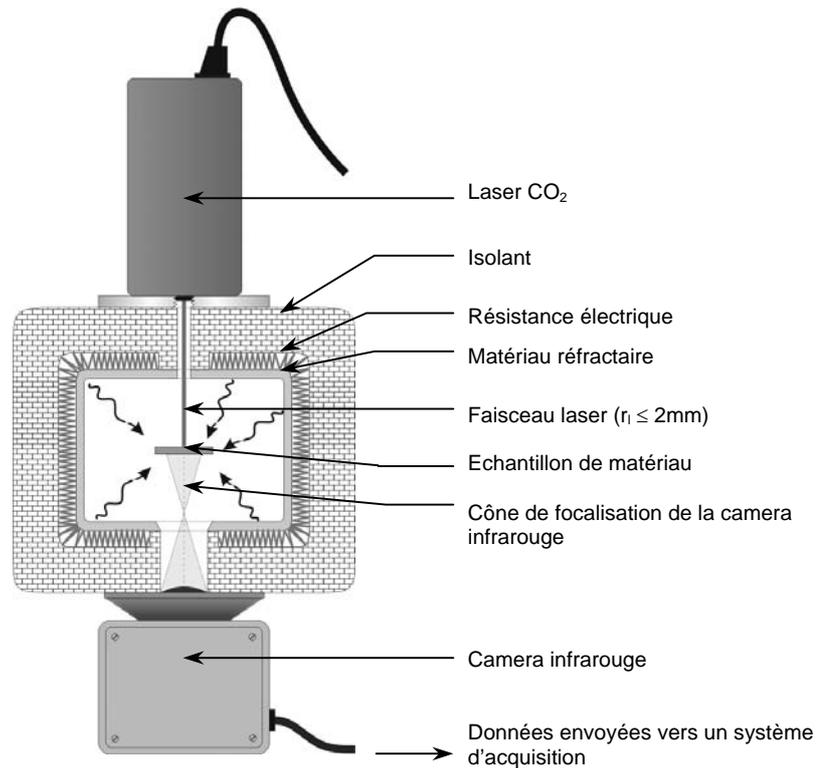
Pour la solution des problèmes inverses, une méthode d'estimation de paramètres très robuste est proposée. Cette méthode, composée de deux étapes, combine successivement une méthode hybride stochastique/déterministe associée à la minimisation de la norme des moindres carrés et la méthode de Gauss associée à la fonction objective maximum a posteriori. Cette structure est testée et comparée à d'autres techniques d'estimation classiques de manière à prouver son efficacité. Divers cas test sont présentés afin de valider la méthodologie avec des mesures simulées de température en surface et de facteur d'émission spectral directionnel. Les tests proposés montrent la possibilité d'estimer les paramètres diffusifs de matériaux semi-transparents à partir de mesures de température. En revanche, ils montrent l'impossibilité d'identifier des propriétés radiatives en utilisant des mesures de facteur d'émission spectral directionnel à haute température.

## B.3 Description des Projets Expérimentaux

Pour l'estimation des paramètres conductifs et radiatifs, deux problèmes appelés respectivement problème 1 et problème 2 sont proposés.

### B.3.1 Projet expérimental pour l'identification de propriétés liées à la diffusion thermique

Pour l'estimation des paramètres liés à la diffusion thermique, un dispositif est proposée, basé à la fois sur le principe de la méthode Flash et sur le principe de la méthode Flying spot [108-110]. Ce dispositif considère un échantillon de MST, recouvert d'une peinture hautement absorbante, d'émissivité connue, fixé à l'intérieur d'un four supposé porter l'échantillon à haute température. Deux ouvertures, disposées de part et d'autre du four, permettent respectivement le chauffage ponctuel de l'échantillon par laser et la mesure par camera infrarouge de la variation de température provoquée en face non chauffée. Le dispositif expérimental proposé est schématisé en figure B.3.1.

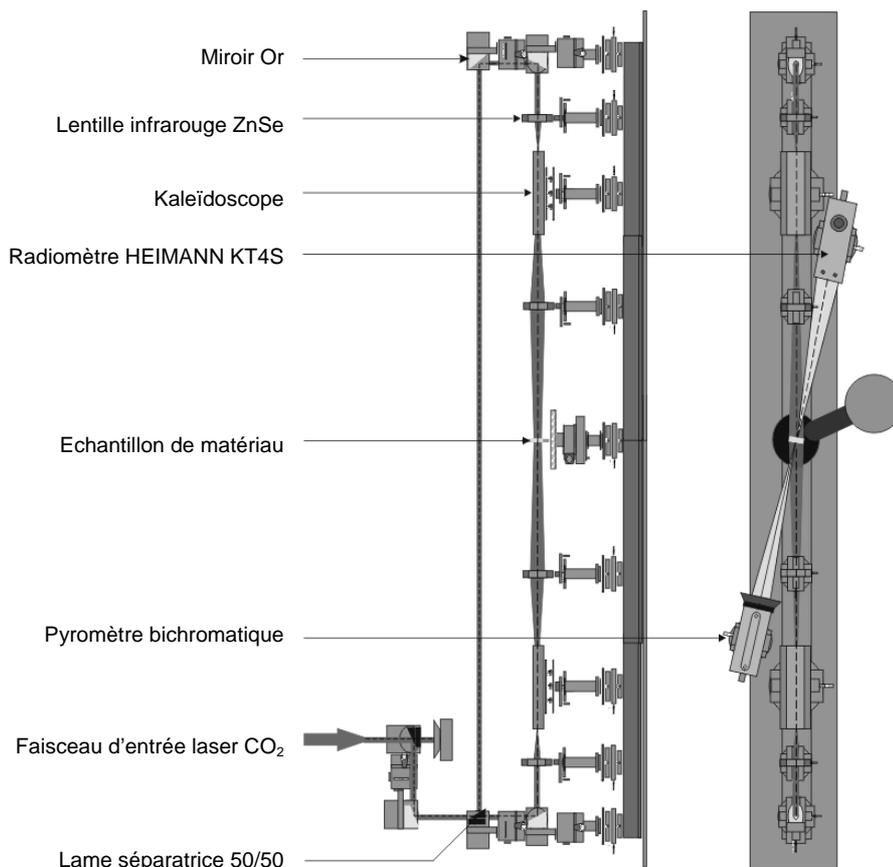


*Figure B.3.1 : Proposition de dispositif expérimental pour l'identification de propriétés relatives à la diffusion thermique en milieux semi-transparents orthotropes.*

Certains éléments du dispositifs sont recommandés, en accord avec les résultats de l'étude d'optimisation expérimentale, réalisée ultérieurement en section B.6.2, et des performances technologiques des composants disponibles sur le marché. Le chauffage ponctuel de l'échantillon doit être assuré par un laser de type CO<sub>2</sub> de puissance maximum en sortie de 10 W. La puissance administrée doit varier en fonction de paramètres tels que le temps de chauffe, l'émissivité de la surface absorbante, et les propriétés de l'échantillon. La température en face arrière de l'échantillon doit être mesurée par pyrométrie infrarouge dans la zone de longueur d'ondes allant de 1  $\mu\text{m}$  à 10  $\mu\text{m}$ . La camera doit posséder une matrice de détection de 128×128 pixels, ainsi qu'une fréquence d'acquisition d'images de 20 Hz au minimum. Pour rendre opérant ce dispositif, une étude de conception doit être préalablement menée. Cette étude ne fait pas l'objet de ce travail de Thèse.

### B.3.2 Dispositif expérimental pour l'identification de propriétés radiatives

Pour l'estimation des paramètres radiatifs de milieux semi-transparents, le problème 2 prévoit l'utilisation d'un dispositifs de mesure de luminance sortante d'échantillons de MST, conçu par Lopes [127] au laboratoire CETHIL de l'INSA-Lyon. Ce dispositif comprend un système de chauffage composé d'un laser CO<sub>2</sub> de puissance en sortie maximum de 300 W et d'un système d'homogénéisation de faisceau laser, fonctionnant sur le principe de "segmentation-recombinaison" [127,129-134]. Ce système est pourvu d'une lame séparatrice 50/50, 5 miroirs Or, 4 lentilles ZnSe, 2 kaleïdoscopes en cuivre poli et de systèmes de translation-rotation pour le réglage de chacun des éléments optiques. Il a pour principe de séparer le faisceau laser source en deux faisceaux, appelés canaux, de puissances identiques et de répartition énergétique homogène.



*Figure B.3.2 : Dispositif expérimental pour la mesure de la luminance spectrale directionnelle de MST à haute température.*

L'échantillon plan, situé au centre du dispositif, reçoit les flux homogènes en provenance des deux canaux disposés symétriquement. L'échantillon est alors porté à haute température avec un champ de température interne supposé uniforme. La luminance sortante et la température en surface de l'échantillon sont mesurées afin de déterminer indirectement le facteur d'émission. Le facteur d'émission est défini comme le rapport entre la luminance sortante de l'échantillon  $L_\lambda$  et la luminance émise par un corps noir porté à la même température que l'échantillon semi-transparent  $L_\lambda^0$ ,

$$\tilde{\varepsilon}_\lambda(\tau_0, \psi, \theta, T) = \frac{L_\lambda(\tau_0, \psi, \theta, T)}{L_\lambda^0(T)} \quad (\text{B.3.1})$$

L'obtention d'une température uniforme au sein de l'échantillon est primordiale pour valider la définition d'un facteur d'émission spectral directionnel. Si tel n'est pas le cas, la luminance sortante du matériau intègre le rayonnement émis par le matériau à différentes températures : la notion de facteur d'émission n'aurait alors aucun sens. En pratique, cette condition est difficile à obtenir en raison du fort couplage conduction-rayonnement et des phénomènes de réflexion aux frontières dues au changement d'indice optique de réfraction.

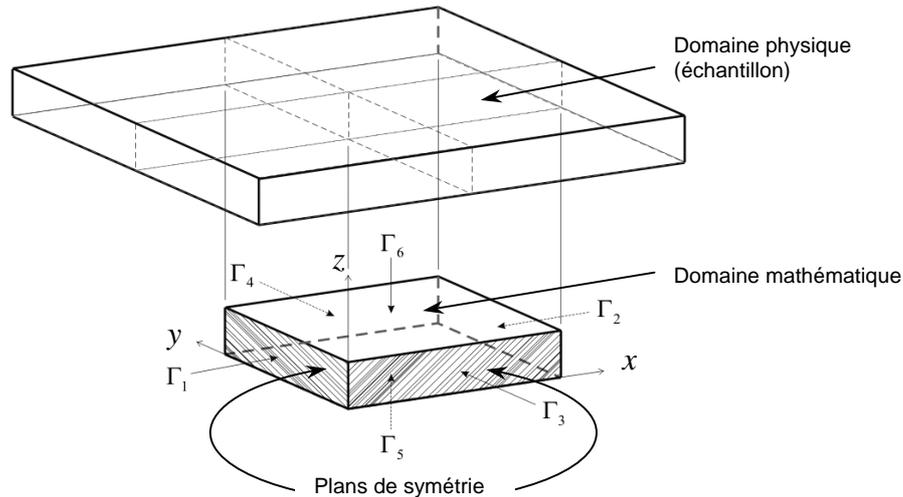
La luminance spectrale directionnelle  $L_\lambda$  sortante de l'échantillon est mesurée grâce à un radiomètre HEIMANN KT4S monté sur un bras goniométrique et équipé de filtres interférentiels de longueurs d'ondes 2, 3, 4, 5, 6 e 10  $\mu\text{m}$ . En raison de l'encombrement lié aux différents modules du dispositif, la mesure de luminance est assurée sur un secteur angulaire variant de  $15^\circ$  à  $85^\circ$ . La mesure de température de l'échantillon de MST est réalisée simultanément avec la mesure de luminance par pyrométrie bichromatique [129].

Dans un deuxième temps, la luminance émise par un corps noir porté à la même température que l'échantillon est mesurée avec le même radiomètre. Les données sont ensuite transmises à un système de traitement qui calcul le facteur d'émission pour les longueurs d'onde des filtres interférentiels disponibles et pour différents angles par rapport à la surface du matériau.

## B.4 Modèles Directes

Les modèles directs 1 e 2, utilisés pour la détermination du champ de température et du champ radiatif au sein de l'échantillon, considèrent le couplage de l'équation de

conservation de l'énergie et de l'équation du transfert radiatif en trois dimensions. Le système d'équations est en outre composé de conditions aux limites spécifiques à chaque surface de l'échantillon et d'une condition initiale. En raison de l'existence de plans de symétrie par rapport aux champs de température et de luminance, un domaine mathématique a été défini comme étant le quart du domaine physique (échantillon). La figure B.4.1 permet de se rendre compte du découpage effectué.

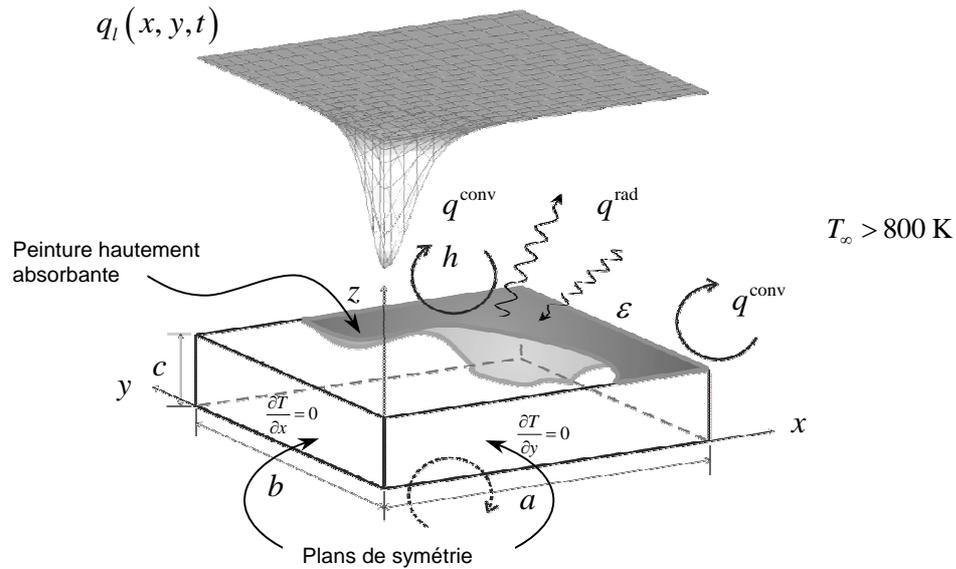


*Figure B.4.1 : Délimitation du domaine mathématique par rapport à l'échantillon.*

### B.4.1 Formulation du problème direct 1

Le problème direct 1 considère un parallélépipède de dimensions  $a \times b \times c$  portée à une température initiale élevée  $T_0^*$ . Les frontières mathématiques représentatives des frontières physiques sont opaques d'émissivité connue et échangent de la chaleur par convection et rayonnement avec le milieu ambiant. Les frontières représentant les plans de symétrie sont considérées comme étant des zones d'équilibre de flux radiatif et de flux conductif. En un temps  $t^* = 0$ , la face supérieure  $\Gamma_6$  du domaine mathématique reçoit un flux de répartition gaussienne provenant du laser. Le problème est transitoire du point de vue de la diffusion thermique.

Le problème 1 formulé à l'aide de variables dimensionnées est donné dans la section 3.3 par les équations (3.3.1-8). Afin de faciliter la solution du problème, des variables réduites, données par équations (3.3.9.a-u), sont introduites dans le problème dimensionnel afin de formuler un problème adimensionnel, défini par le système d'équations (3.3.10-17).



*Figure B.4.2 : Représentation graphique du problème direct 1.*

## B.4.2 Formulation du problème direct 2

Le problème direct 2 considère un même parallélépipède de dimensions  $a \times b \times c$  portée à une température initiale basse  $T_0^*$ . Les frontières mathématiques représentant les frontières physiques sont considérées cette fois semi-transparentes, avec changement d'indice optique de réfraction. En raison de l'absence de peinture aux frontières, une partie du rayonnement sortant est réfractée (équation 3.2.21), alors que l'autre partie est réfléchiée (équation 3.2.19) en raison de la différence d'indice de réfraction à l'interface. Les frontières représentant les plans de symétrie sont toujours considérées comme des zones d'équilibre de flux radiatif et de flux conductif. Les deux faces  $\Gamma_5$  et  $\Gamma_6$  reçoivent respectivement deux flux continus de puissance identique et de répartition énergétique homogène.

Le problème direct 2 est décrit sous forme dimensionnelle par les équations (3.4.1-5), et sous forme adimensionnelle par les équations (3.4.7-10). Les variables adimensionnelles pour le problème 2 sont spécifiées en équations (3.4.6.a-e).

Les propriétés radiatives, qui varient sur l'ensemble du spectre, apparaissent dans la formulation des problèmes 1 et 2. Pour cette raison, un modèle de prédiction basé sur la théorie de Mie [52] à été conçu afin d'approcher ces propriétés avec fidélité sur l'ensemble du spectre étudié. Cette théorie permet de calculer les propriétés radiatives d'après une représentation de la structure microscopique du matériau et d'après la

connaissance de sa fonction diélectrique (indice de réfraction). En parallèle, d'autres modèles de prédiction [50] basés sur le modèle de l'oscillateur de Lorentz, permettent de calculer la fonction diélectrique de divers matériaux semi-transparents à des températures variant de 1500 K à 2300 K. Une définition succincte de la théorie de Mie est donnée en section 3.2.5.

### B.4.3 Solution des problèmes directs 1 et 2

La Méthode des Volumes Finis est employée pour résoudre le problème de couplage conduction-rayonnement tri-dimensionnel. Cette méthode suppose le découpage du domaine mathématique en volumes élémentaires, ce découpage pouvant être utilisé indépendamment pour résoudre le problème de diffusion thermique et pour résoudre le problème radiatif. Les variables sont supposées constantes sur chaque volume élémentaire. Ainsi, l'équation de conservation de l'énergie et l'équation du transfert radiatif sont intégrées sur chacun des volumes élémentaires afin de pouvoir y appliquer le principe de conservation de l'énergie. Cette méthode possède l'avantage majeur de pouvoir travailler sur un maillage aléatoire du domaine.

La Méthode des Volumes Finis a été créée dans l'objectif de résoudre des problèmes de diffusion de chaleur en milieux solides ou fluides [37]. L'établissement des équations discrètes pour le problème 3D est donné en section 4.2 pour un maillage orthogonal. Le schéma implicite, formulé selon la méthode de Douglas-Gunn [158] et permettant d'obtenir le champ de température au sein de l'échantillon est donné par le système d'équations (4.2.9,10). Ce schéma se base sur la solution alternée de systèmes tridiagonaux, très avantageux en terme de performances numériques. Une excellente convergence de la solution est obtenue lorsque le nombre de volumes excède 20 volumes par direction principale. Une erreur inférieure à 2 % de la solution avec une solution analytique [137] est obtenue. La validation complète du problème de conduction est donnée en section 6.1.2.

La Méthode des Volumes Finis appliquée aux problèmes de rayonnement en milieux semi-transparents a été introduite seulement à partir de 1990 [38,39]. L'établissement des équations discrètes pour le problème de rayonnement 3D est donné en section 4.1 pour un maillage orthogonal. Enfin, un schéma explicite pour l'obtention du champ de luminance spectrale au sein de l'échantillon est donné par le système d'équations (4.1.16) et (4.1.18-21). Une excellente convergence de la solution est

obtenue lorsque le nombre de volumes excède 30 volumes par direction principale, levant à un écart de résultats de 2 % avec une solution référencée [148]. Les résultats de la validation complète du problème de rayonnement sont donnés en section 6.1.1.

Les résultats de la validation du problème de couplage conduction-rayonnement sont présentés en section 6.1.3. Durant cette phase de la validation du problème direct, le problème “flash” est simulé dans le cas d’un échantillon de matériau semi-transparent.

## B.5 Problème Inverse et Techniques de Minimisation

Les paramètres méconnus, faisant respectivement l’objet du problème 1 et du problème 2, peuvent être arrangé dans deux vecteurs indépendants donnés par les équations (B.5.1) et (B.5.2) :

$$\mathbf{P}^T = [C, k_x, k_y, k_z, \text{Bi}^{rad}] \quad (\text{B.5.1})$$

$$\mathbf{P}^T = [\tau_{0\lambda_1}, \omega_{\lambda_1}, g_{\lambda_1}, \tau_{0\lambda_2}, \omega_{\lambda_2}, g_{\lambda_2}, \dots, \dots, \tau_{0\lambda_{N_f}}, \omega_{\lambda_{N_f}}, g_{\lambda_{N_f}}] \quad (\text{B.5.2})$$

Pour estimer séparément ces deux vecteurs, deux lots de mesures sont utilisés : le premier lot contient des mesures de température, pour le problème 1, et le second lot contient des mesures de facteur d’émission spectral directionnel, pour le problème 2.

$$\mathbf{Y}^T = [T_{t=0}^{m=1}, \dots, T_{t=0}^{m=M}, T_{t=dt}^{m=1}, \dots, T_{t=dt}^{m=M}, T_{t=t_f}^{m=1}, \dots, T_{t=t_f}^{m=M}] \quad (\text{B.5.3})$$

$m = 1, \dots, M$  est l’indice relatif à un pixel de la camera infrarouge focalisé sur la surface  $\Gamma_5$  ;

$$\mathbf{Y}^T = [\tilde{\epsilon}_{m=1}^{\theta=0^\circ}, \dots, \tilde{\epsilon}_{m=1}^{\theta=85^\circ}, \tilde{\epsilon}_{m=2}^{\theta=0^\circ}, \dots, \tilde{\epsilon}_{m=2}^{\theta=85^\circ}, \tilde{\epsilon}_{m=N_f}^{\theta=0^\circ}, \dots, \tilde{\epsilon}_{m=N_f}^{\theta=85^\circ}] \quad (\text{B.5.4})$$

$\theta = 0^\circ, 5^\circ, \dots, 85^\circ$  représente l’angle avec lequel le facteur d’émission spectral directionnel est mesuré par rapport à la surface  $\Gamma_6$  et pour différentes valeurs de la longueur d’onde  $\lambda$ .

### B.5.1 Techniques de minimisation

Plusieurs techniques de minimisation sont utilisées pour la solution des problèmes inverses. Plusieurs fonctions objectives, faisant intervenir la différence entre les grandeurs mesurées et les grandeurs simulées à l’aide des problèmes directes, sont également utilisées.

Le choix de la fonction objective appropriée pour le problème inverse dépend du type d'erreurs de mesures et des informations à priori sur les paramètres recherchés. Pour simplifier le problème, une série d'hypothèses statistiques est considérée [70] : les erreurs de mesures sont additives, non corrélées et suivent une distribution normale de moyenne nulle avec un écart type constant et connu. Dans ce cas, deux cas de figures sont envisageables :

- ◇ Il n'existe aucune information a priori sur la valeur et l'incertitude des paramètres à estimer. Seules les mesures qui apparaissent dans la fonction objective contiennent des erreurs. Dans ce cas, le critère à minimiser est celui des moindres carrés [70]. La norme des *moindres carrés* peut-être définie de la manière suivante :

$$S_{MC}(\mathbf{P}) = [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P})]^T [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P})] \quad (\text{B.5.5})$$

$$\text{où } (\mathbf{Y} - \mathbf{X})^T = (\bar{Y}_1 - \bar{X}_1, \bar{Y}_2 - \bar{X}_2, \dots, \bar{Y}_L - \bar{X}_L). \quad (\text{B.5.6})$$

Le vecteur ligne  $(\bar{Y}_i - \bar{X}_i) = (Y_{i1} - X_{i1}, Y_{i2} - X_{i2}, \dots, Y_{iM} - X_{iM})$ , quel que soit  $i = 1, \dots, L$ , contient les différences entre les variables mesurées et estimées pour chacun des  $M$  détecteurs, lorsqu'ils sont plusieurs.  $L$  peut-être assimilé au nombre de mesures réalisées à l'occasion de différentes répétitions (différents temps où angles d'observation).

La méthode de *Levenberg-Marquardt* [62,63,69] est particulièrement recommandée pour minimiser ce type de norme. Son expression est donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + (\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda^k \mathbf{\Omega}^k)^{-1} \mathbf{J}^T [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^k)] \quad (\text{B.5.7})$$

$k$  est l'indice caractéristique du processus itératif,  $\mathbf{J}$  est la matrice de sensibilité,  $\mathbf{\Omega}$  est une matrice diagonal de régularisation et  $\lambda$  est un nombre scalaire jouant le rôle de paramètre de relaxation [69,70]. Selon les hypothèses statistiques citées, le critère des moindres carrés et celui du maximum de vraisemblance sont équivalents.

- ◇ La valeur et la variance des paramètres à estimer sont à priori connus. Les mesures et les paramètres à estimer contiennent des erreurs indépendantes. Ces erreurs suivent une distribution statistique gaussienne, de moyenne nulle et d'écart type connu et constant. Dans ce cas, le critère de minimisation peut être obtenu à partir de la maximisation de la fonction de distribution de probabilité à posteriori

[70,163]. En considérant  $\boldsymbol{\mu}$  et  $\mathbf{V}$  comme étant respectivement le vecteur de paramètres a priori et la matrice de covariance du vecteur de paramètre  $\mathbf{P}$ , et en supposant que  $\mathbf{Y}$  ait une moyenne nulle et une matrice de covariance  $\mathbf{W}$ , la fonction à minimiser capable de maximiser la fonction de distribution de probabilité a posteriori [70] est appelée fonction objective *maximum a posteriori* :

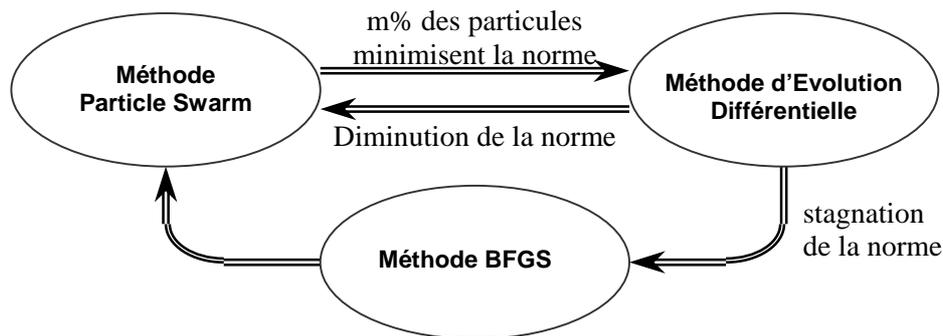
$$S_{MAP}(\mathbf{P}) = [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P})]^T \mathbf{W} [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P})] + (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{P})^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{P}) \quad (\text{B.5.8})$$

La méthode de *Gauss* est particulièrement adaptée pour minimiser la fonction objective maximum a posteriori. Lorsque la méthode de Gauss est résolue de manière successive avec ajout de nouvelles mesures à chaque étape, la méthode tend vers une approche dite « séquentielle » [70]. La procédure liée à l'application de la méthode de Gauss pour des problème non-linéaires suit le processus itératif suivant :

$$\mathbf{P}^{k+1} = \mathbf{P}^k + [\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J} + \mathbf{V}^{-1}]^{-1} \{ \mathbf{J}^T \mathbf{W} [\mathbf{Y} - \mathbf{X}(\mathbf{P}^k)] + \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{P}^k) \} \quad (\text{B.5.9})$$

La comparaison des équations (B.5.7) et (B.5.9) montrent que les termes matriciels  $\lambda^k \boldsymbol{\Omega}^k$  dans l'équation (B.5.7) et  $\mathbf{V}^{-1}$  dans l'équation (B.5.9) jouent respectivement le même rôle dans la méthode de Levenberg-Marquardt avec la norme des moindres carrés et dans la méthode de Gauss avec la fonction objective maximum a posteriori. Ce rôle est d'améliorer le conditionnement du produit matriciel  $\mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{J}$  ( $\mathbf{W} = \mathbf{I}$  pour la norme des moindres carrés), souvent mal conditionné dans les problèmes de transferts thermiques. Ces termes matriciels peuvent être associés à des termes de régularisation.

La méthode Hybride [78-81] est également utilisée pour l'estimation des paramètres inconnus. Elle s'utilise associée à la norme des moindres carrés. Elle est dite « hybride » pour combiner plusieurs méthodes déterministes et stochastiques. Cette tactique permet d'exploiter les avantages liés à chaque méthode afin d'améliorer le processus de convergence. Les méthode hybrides utilisent souvent des méthodes stochastiques pour localiser la région du minimum global de la fonction objective, et des méthodes déterministes de type gradient pour converger vers le minimum global avec un nombre réduit d'itérations. La méthode hybride utilisée lors de la conception de ce travail suit un concept assez simple, décrit en figure B.5.1 :



*Figure B.5.1: Principe et fonctionnement de la Méthode Hybride.*

La méthode Particle Swarm [74-76] constitue le module principal de la méthode. Lorsqu'un certain pourcentage de particules (vecteurs de paramètres inconnus) minimisent la fonction objective, la méthode d'Evolution Différentielle [72-73] est automatiquement activée. Si la norme est réduite, la méthode hybride enclenche à nouveau la méthode Particle Swarm de manière à rechercher éventuellement d'autres localités pour le minimum global. Si la norme n'est pas réduite après utilisation de la méthode d'évolution différentielle, le minimum global se situe probablement autour de la région actuellement testée. A ce moment là, la méthode BFGS [65-67] de type déterministe est automatiquement activée de manière à localiser rapidement et précisément le minimum global. Ce processus est répété jusqu'à atteindre la convergence totale de la méthode. Si aucune réduction de la norme n'est observée au cours de 30 itérations successives, le minimum global de la fonction objective est alors considéré atteint.

## B.5.2 Modèles directs approchés : utilisation d'une méthode inverse en deux étapes

Le problème direct doit être résolu plusieurs fois, indépendamment de la technique utilisée pour minimiser de la fonction objective. Par exemple, le problème direct est évalué  $N + 1$  fois à chaque itération de la méthode de Levenberg-Marquardt ou de la méthode de Gauss lorsque la matrice de sensibilité  $\mathbf{J}$  est calculée par schéma de différences finies avancées ( $N$  représente le nombre de paramètres à estimer). Si la méthode Hybride est utilisée, en raison de la génération d'une population importante de

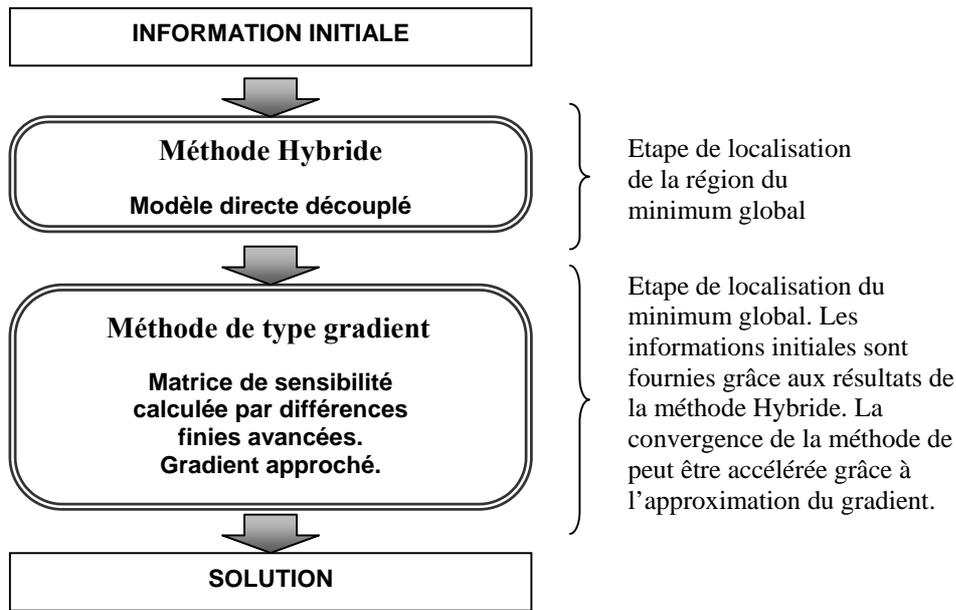
particules réparties de manière aléatoire à chaque itération, le nombre d'évaluations successives du problème direct peut se révéler conséquent.

Dans le cas spécial où la solution du problème direct nécessite un temps de calcul et des recours numériques importants, comme c'est le cas pour un problème de couplage conduction-rayonnement en 3D, le modèle direct ou la matrice de sensibilité doivent être l'un ou l'autre approché. Ces approximations sont introduites à certaines étapes du processus de minimisation du problème inverse [169].

Lorsque la matrice de sensibilité est approchée, le divergent du flux radiatif qui rentre comme terme source dans l'équation de conservation de l'énergie n'est calculé qu'une seule fois. Ce divergent, calculé à l'itération  $k$  en utilisant les paramètres  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  e  $Bi^{rad}$  estimés, se trouve réutilisé lors de l'évaluation des coefficients de sensibilité. Lorsque la solution du modèle direct est approchée, les transferts thermiques au sein du matériau sont supposés être gouvernés seulement par les phénomènes de diffusion. Bien que cette approximation ne fournisse de résultats précis que lorsque le matériau est optiquement épais, elle résulte en un gain temps supérieur à 40 fois la solution du problème couplé. Lorsque le modèle direct est approché, seules les équations (3.3.13-17) sont résolus.

L'utilisation d'un modèle approché pour la solution d'un problème direct peut aboutir à une estimation erronée des paramètres du matériau. Pour cette raison, un tel modèle ne peut être appliqué en phase finale de la minimisation de la fonction objective. Il peut cependant être associé à la méthode Hybride dans l'objectif d'éviter l'éventuelle convergence de la méthode vers un minimum local et générer une estimation des paramètres proche des paramètres exactes. Cette estimation servirait ultérieurement d'information initiale pour une méthode de type gradient qui convergerait, associée à l'utilisation d'un modèle direct précis, vers le minimum global de la fonction objective. Cette stratégie, résumée en figure B.5.2, est appelée « stratégie en deux étapes ».

Durant la première étape de minimisation de la norme des moindres carrés, le modèle direct est approché, découplé au rayonnement, afin d'accélérer l'exécution de la méthode Hybride. Cette décision amène à pouvoir estimer rapidement la région du minimum global de la norme. Durant la seconde étape, le modèle direct complet est utilisé afin de garantir une bonne fidélité des résultats.



*Figure B.5.2: Schéma inverse en deux étapes.*

En revanche, le gradient de la fonction objective peut être ou non approché. Diverses méthodes de type gradient permettent d’accomplir cette deuxième étape, comme par exemple la méthode de Levenberg-Marquardt, associée à la minimisation de la norme des moindres carré, et la méthode de Gauss associée à la minimisation de la fonction objective maximum a posteriori. Il est intéressant de noter que la deuxième méthode est statistiquement justifiée du fait de prendre en compte des informations a priori obtenues de l’estimation réalisée en première étape.

## B.6 Résultats et Interprétations

La simulation de l’estimation des paramètres donnés en équation (B.5.1) est présentée dans cette section. Pour réaliser l’estimation des paramètres thermophysiques d’une alumine fictive, des mesures de température en face  $\Gamma_5$  (problème 1) et de facteur d’émission spectral directionnel (problème 2) ont été simulées. Les propriétés thermophysiques suivantes ont été adoptées pour représenter l’alumine fictive dans le contexte du problème 1 :  $C^* = 2.5 \times 10^6$  J/m<sup>3</sup>.K,  $k_x^* = 5$  W/m.K,  $k_y^* = 5$  W/m.K,  $k_z^* = 5$  W/m.K,  $\kappa_a^* = 10$  m<sup>-1</sup>,  $\sigma_s^* = 10^4$  m<sup>-1</sup> et  $g = 0.7$ .  $g$  représente le facteur d’asymétrie de la fonction de phase attribuée à l’alumine, jugée proche d’une fonction de type Henyey-Greenstein. Cette fonction prend bien en compte l’important pic de

diffraction qui intervient dans les matériaux composés de petites particules sphériques. L'échantillon, recouvert d'une peinture hautement absorbante ( $\varepsilon_w = 1$ ), est taillé en forme de parallélepède de dimensions  $2a^* = 2b^* = 0.01$  m et  $c^* = 0.001$  m. Cet échantillon est soumis à un flux laser de puissance 0.25 W. Ce flux possède une distribution énergétique gaussienne, et 99 % du flux reçu est concentré dans un cercle de rayon 2 mm à partir de l'axe central de l'échantillon. L'échantillon se trouve à une température initiale élevée  $T_0^* = 1800$  K, identique à la température du milieu environnant  $T_\infty^* = 1800$  K. Les échanges de chaleur entre le milieu environnant et l'échantillon se réalisent par convection naturelle ( $h^* = 50$  W/m<sup>2</sup>.K) et par rayonnement, donnant lieu à l'introduction d'un coefficient total d'échanges  $h^{rad*} = 1372$  W/m<sup>2</sup>.K dans le problème. Il est important de mentionner que, malgré l'épaisseur optique élevée ( $\tau_0 \approx 10$ ) du matériau considéré, les transferts radiatifs entre les surfaces de l'échantillon ne sont pas négligeables [34]. Ce problème ne peut donc pas être réduit à un simple modèle de conduction.

Pour le problème 2 dédié spécialement à l'identification des propriétés radiatives, les mêmes valeurs ont été conservées pour les paramètres  $C^*$ ,  $k_x^*$ ,  $k_y^*$  et  $k_z^*$ . Comme le rayonnement mesuré est monochromatique, les propriétés radiatives de l'alumine ont été calculées en utilisant la fonction diélectrique d'un monocristal de saphir simulé à 2007 K [50] et en appliquant la théorie de diffraction de Mie pour un matériau de fraction volumique  $f_v = 0.7$  composé de particules sphériques de rayon 20  $\mu$ m. Les propriétés prédites sont données dans le tableau B.6.1 suivant pour 8 bandes spectrales :

*Tableau B.6.1: Propriétés radiatives de l'alumine prédites par la théorie de Mie.*

$m$	Bande de longueur d'onde ( $\mu$ m)	Coefficient d'absorption $\kappa_{am}$ moyen ( $m^{-1}$ )	Coefficient de diffusion moyen $\sigma_{sm}$ ( $m^{-1}$ )	Facteur d'asymétrie $g_m$ (Fonction de phase Henyey-Greenstein)	Partie réelle de l'indice de réfraction $n_r$ calculé	Partie complexe de l'indice de réfraction $k_r$ calculé
1	$0.5 \leq \lambda < 2.7$	0.2	54 595	0.736	1.656	$7.282 \times 10^{-9}$
2	$2.7 \leq \lambda < 3.7$	8	56 607	0.700	1.633	$1.435 \times 10^{-6}$
3	$3.7 \leq \lambda < 4.7$	145	55 782	0.724	1.600	$4.387 \times 10^{-5}$
4	$4.7 \leq \lambda < 5.7$	1 237	54 241	0.708	1.555	$4.449 \times 10^{-4}$
5	$5.7 \leq \lambda < 6.7$	5 151	48 416	0.688	1.494	$2.319 \times 10^{-3}$
6	$6.7 \leq \lambda < 9.3$	12 671	52 890	0.710	1.307	$7.745 \times 10^{-3}$
7	$9.3 \leq \lambda < 11.5$	19 686	15 089	0.813	0.949	$5.251 \times 10^{-2}$
8	$11.5 \leq \lambda < 50.0$	16 514	55 348	0.561	0.413	1.590

Les surfaces de l'échantillon, taillé en forme de parallélépipède de dimensions  $2a^* = 2b^* = 0.01 \text{ m}$  et  $c^* = 0.001 \text{ m}$ , sont supposées lisses. L'échantillon, de température initiale  $T_0^* = 300 \text{ K}$ , est soumis à un flux laser de puissance  $60 \text{ W}$  de distribution énergétique homogène. L'échantillon, alors porté à haute température, atteint la température permanente de  $2190 \text{ K}$  au bout de  $50 \text{ s}$ . Les surfaces de cet échantillon échangent de la chaleur par convection ( $h^* = 50 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ ), la température du milieu ambiant étant considérée de  $T_\infty^* = 300 \text{ K}$ .

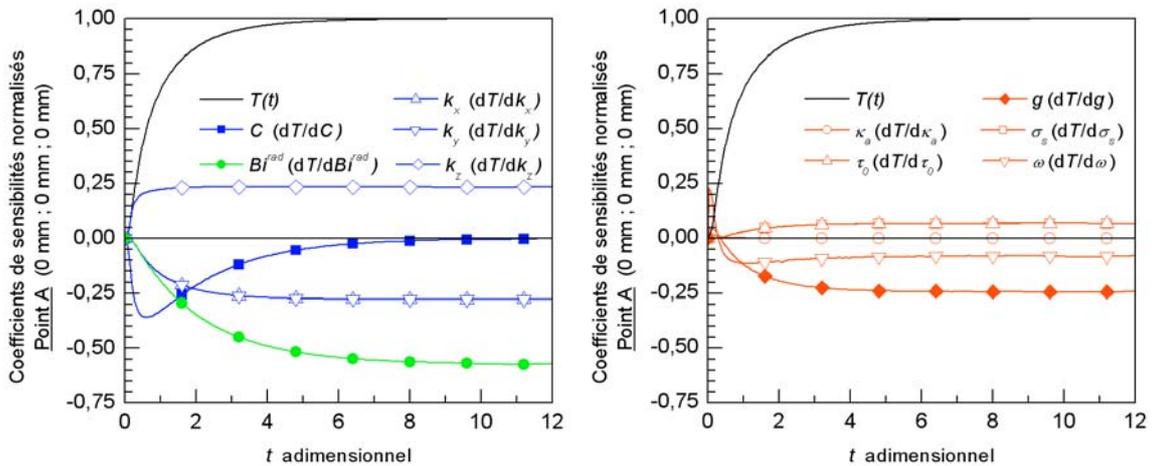
### B.6.1 Analyse des coefficients de sensibilité

L'analyse des coefficients de sensibilité est une étape nécessaire à la conception d'un problème inverse. Elle permet, grâce à l'observation graphique des courbes qui caractérisent la sensibilité des mesures par rapport aux paramètres à estimer, de détecter quels sont les paramètres qui peuvent être identifiés de ceux qui ne peuvent pas l'être. Les paramètres dont les coefficients de sensibilité sont nuls ou linéairement dépendants avec d'autres ne peuvent faire l'objet d'une estimation ; les coefficients engendrent le mauvais conditionnement du produit matriciel  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$  qui doit être inversé afin de permettre l'application des méthodes d'estimation proposées en équations (B.5.5) et (B.5.7).

Les figures B.6.1-3 montrent les coefficients de sensibilité normalisés relatifs aux paramètres méconnus du problème 1, pour des mesures de températures situées aux points A, B et C de la face  $\Gamma_5$ , de coordonnées respectives  $(0, 0, 0) \text{ m}$ ,  $(0.002, 0, 0) \text{ m}$  et  $(0, 0.002, 0) \text{ m}$ . Les coefficients de sensibilité normalisés sont obtenus en multipliant les coefficients de sensibilités originaux par les paramètres auxquels ils se réfèrent. Ainsi, les coefficients de sensibilité normalisés sont du même ordre de grandeur que la température mesurée. D'après l'observation de ces figures, les paramètres méconnus sont dans l'ensemble sensibles aux mesures de température, en dehors des coefficients gris d'absorption et de diffusion radiative  $\kappa_a$  et  $\sigma_s$  adimensionnels.

En figure B.6.1, correspondante aux mesures réalisées au centre de la face  $\Gamma_5$  (point A) opposée au chauffage par laser, les coefficients de sensibilité relatifs aux composantes transversales de la conductivité thermique ( $k_x$  et  $k_y$ ) sont identiques. En cette position, les coefficients de sensibilité par rapport au coefficient d'échange ( $\text{Bi}^{rad}$ ), par rapport à l'épaisseur optique ( $\tau_0$ ) et ceux par rapport au facteur d'asymétrie ( $g$ ) sont linéairement dépendants avec les coefficients relatifs aux

composantes transversales de la conductivité thermique. Cependant, les coefficients de sensibilité par rapport à la capacité thermique volumique ( $C$ ), ceux par rapport à la composante longitudinale de la conductivité thermique ( $k_z$ ) et ceux relatifs à l'albédo ( $\omega$ ) sont indépendants les uns par rapport aux autres. L'amplitude maximum observée pour les coefficients de sensibilité est obtenue au point A.



*Figure B.6.1 : Variation de la température adimensionnelle et des coefficients de sensibilité normalisés en fonction du temps au point A (0, 0, 0) m.*

Les figures B.6.2 et B.6.3 montrent que les coefficients de sensibilité par rapport aux paramètres  $k_x$  et  $k_y$  au niveau du point B sont respectivement identiques à ceux obtenus par rapport aux paramètres  $k_y$  et  $k_x$  au niveau du point C. Ce phénomène est dû essentiellement au décalage des points B et C de 2 mm dans les directions  $x$  et  $y$ , et à la valeur identique de la conductivité dans ces directions. Les coefficients de sensibilité par rapport aux paramètres adimensionnels se montrent tous linéairement indépendants. Les coefficients de sensibilité par rapport à l'épaisseur optique  $\tau_0$  sont de faible amplitude, ce qui peut occasionner une estimation de ce paramètre avec une incertitude élevée. Cependant, le fait que certains coefficients de sensibilité soient linéairement dépendants en un point ne signifie pas qu'ils soient dépendants en d'autres points de mesures. Pour cette raison, plusieurs points de mesures sont utilisés dans le problème inverse. Cela permet de conserver les colonnes de la matrice de sensibilité  $\mathbf{J}$  indépendantes les unes par rapport aux autres et de pouvoir estimer tous les paramètres simultanément.

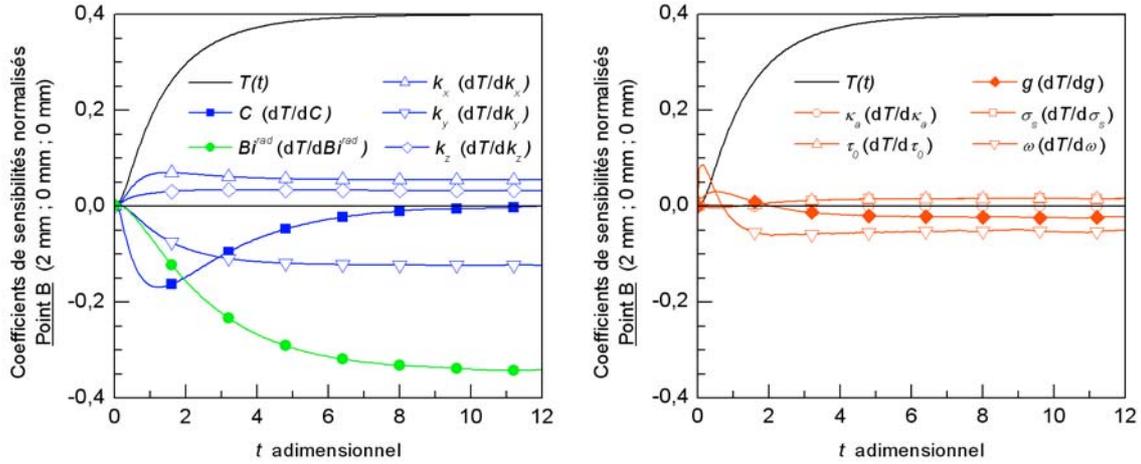


Figure B.6.2 : Variation de la température adimensionnelle et des coefficients de sensibilité normalisés en fonction du temps au point B (0.002, 0, 0) m.

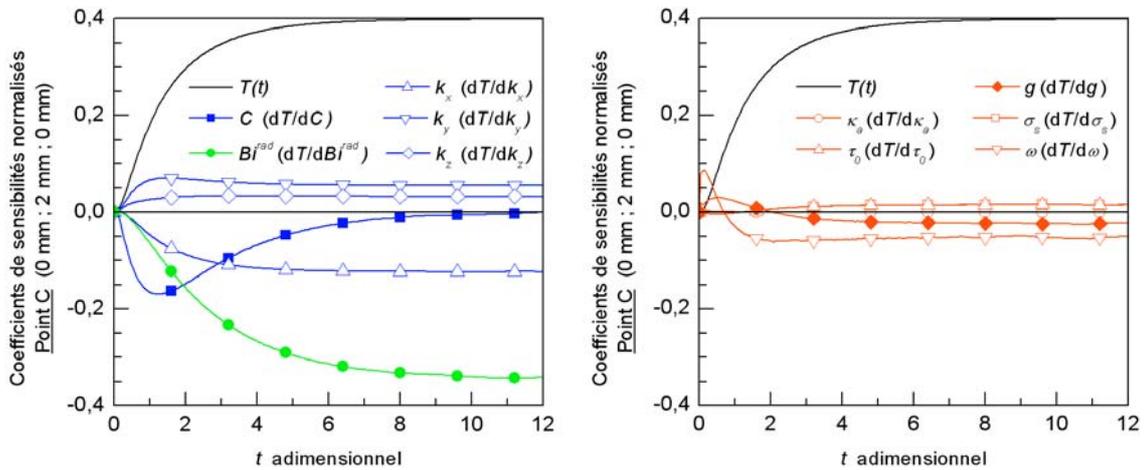
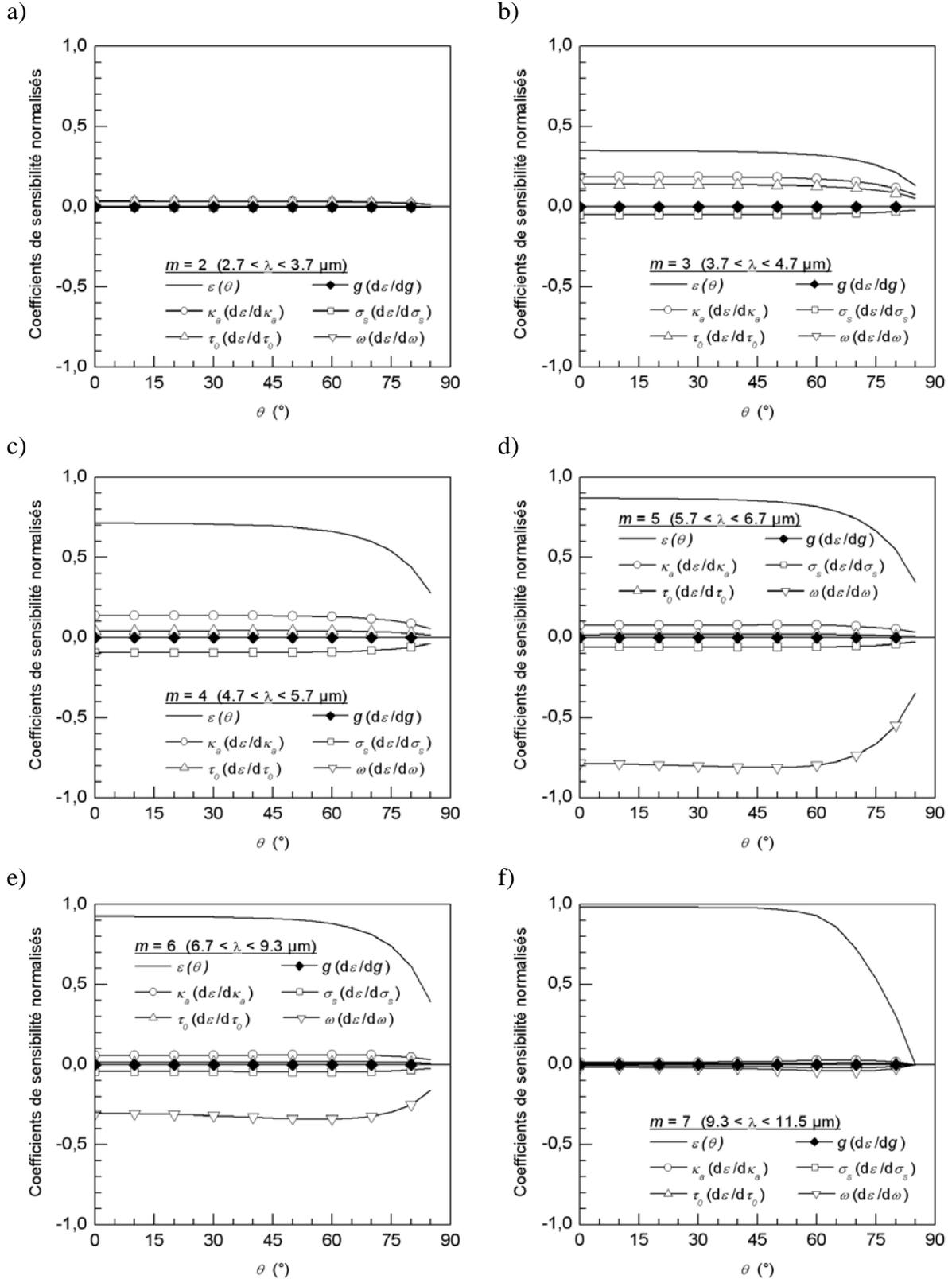


Figure B.6.3 : Variation de la température adimensionnelle et des coefficients de sensibilité normalisés en fonction du temps au point C (0, 0.002, 0) m.

La figures B.6.4 montrent les coefficients de sensibilité normalisés de mesures de facteur d'émission spectral directionnel par rapport aux paramètres radiatifs spectraux qui doivent être identifiés lors de la 2<sup>ème</sup> étape du problème inverse. Les mesures sont réalisées au centre de la face  $\Gamma_6$ , de coordonnées (0, 0, 0.001) m. Les coefficients de sensibilité normalisés pour les bandes spectrales  $m = 2, 3, 4, 5, 6$  et 7 (voir tableau B.6.1) sont respectivement représentés en figures B.6.4.a-f. En abscisse,  $\theta$  représente l'angle que définit l'axe du radiomètre par rapport à la surface  $\Gamma_6$  de l'échantillon. Les coefficients relatifs aux paramètres  $C, k_x, k_y, k_z$  e  $Bi^{rad}$  ont été exclus de la figure B.6.4 en raison de leur très faible amplitude. En ce qui concerne les paramètres radiatifs, l'amplitude des coefficients varie proportionnellement avec l'amplitude du facteur

d'émission, ce qui indique que l'estimation de ces paramètres dans les bandes de longueur d'onde  $m = 1$  et 2 est impossible, lorsque l'émission est faible.



*Figure B.6.4 : Variation du facteur d'émission et des coefficients de sensibilité normalisés en fonction de l'angle  $\theta$ .*

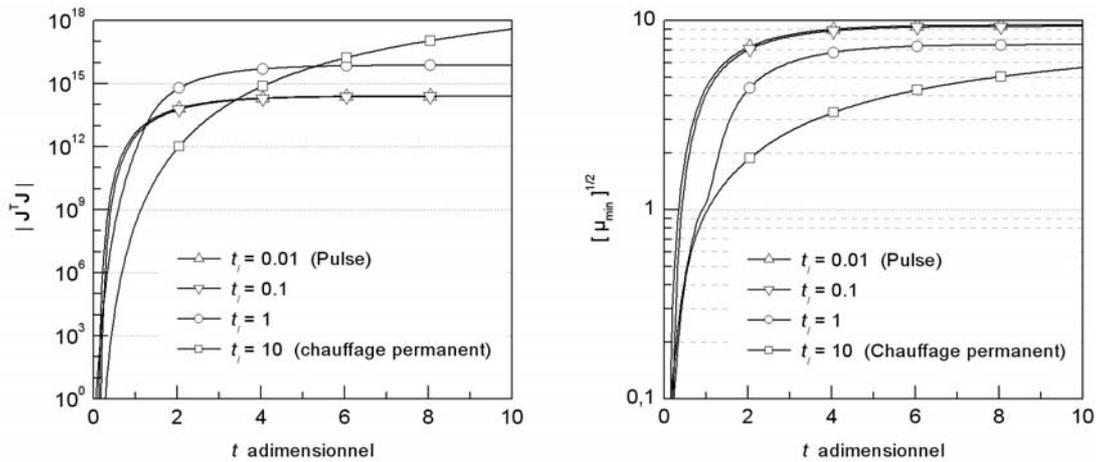
Lorsque le matériau n'est plus faiblement absorbant, les coefficients de sensibilité normalisés montrent un comportement linéairement dépendants. Aucune propriété radiative de l'alumine ne peut donc être identifiée en utilisant des mesures de facteur d'émission spectral et directionnel. Selon les résultats obtenus par [117,119], il est préférables d'estimer ces paramètres en utilisant des mesures de réflectance et de transmittance spectrales et hémisphériques. Cependant, cette expérimentation n'est actuellement pas réalisable à haute température.

## B.6.2 Optimisation du problème 1

L'optimisation du problème 1 s'effectue au travers de l'analyse du conditionnement de la matrice d'information [70,92]. En effet, la possibilité d'inverser cette matrice conditionne directement la vitesse convergence de la technique de minimisation vers le minimum global de la fonction objective ainsi que l'obtention de résultats précis. Pour cela, lors de l'optimisation du problème 1, divers paramètres connus tels que l'épaisseur de l'échantillon, le temps de chauffe, la durée de l'essai expérimental ou le nombre d'images prises par la caméra infrarouge sont ajustés en fonction de deux critères nommés respectivement de critère D-optimum et de critère E-optimum. Le critère D-optimum consiste à maximiser le déterminant de la matrice d'information, c'est à dire réduire la taille de l'hyperellipsoïde de confiance relatif aux paramètres à estimer. Le critère E-optimum quant à lui consiste à minimiser la plus petite auto-valeur de la matrice d'information, ce qui revient à déterminer les conditions favorables à une estimation la plus précise possible du paramètre inconnu qui possède la variance la plus importante.

Ainsi, la conception de l'expérience 1 prévoit l'enregistrement du champ de température en surface  $\Gamma_5$  de l'échantillon à l'aide d'une caméra infrarouge à intervalle de temps régulier. Chaque enregistrement est obtenu sous forme d'une image dont la qualité dépend de la résolution de la caméra. Les coefficients de sensibilité par rapport aux paramètres inconnus sont ensuite calculés en utilisant les enregistrements de température effectués à chaque pixel ; la matrice d'information de Fischer est évaluée à partir de la matrice de sensibilité. Finalement, les paramètres connus du problème sont ajustés en fonction de la valeur obtenue pour les deux critères D- et E-optimum.

La figure B.6.5 montre l'évolution transitoire des critères en fonction du temps de chauffe expérimental  $t_f$ . La durée totale adimensionnelle de l'expérience est de 10 (cette durée équivaut à un temps dimensionnel de 5 s pour l'alumine fictive de caractéristiques définies en section B.6.1). 4 valeurs sont choisies pour le temps de chauffage :  $t_f = 0.01$ , 0.1, 1 et 10. Durant l'expérience, un total de 250 images d'une résolution spatiale de  $64 \times 64$  pixels sont enregistrées à une fréquence de 50 Hz.



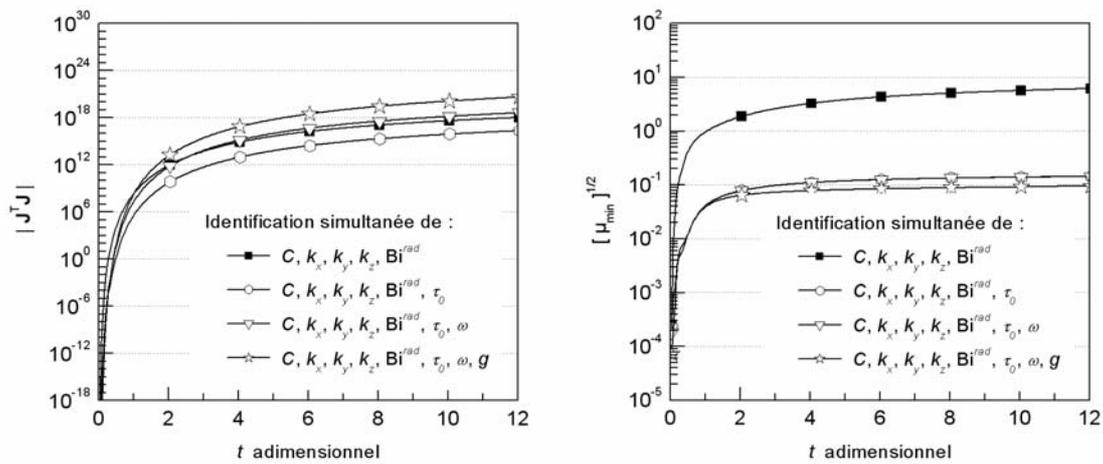
*Figure B.6.5 : Effets du temps de chauffe a) sur le critère D-optimum et b) sur le critère E-optimum.*

Deux comportements sont observés en figure B.6.5. Lorsque l'échantillon est chauffé par un pulse, les critères D- et E-optimum augmentent fortement puis cessent d'augmenter, jusqu'à atteindre une valeur stable. Au contraire, lorsque l'échantillon est chauffé de manière continue, les critères D- et E-optimum augmentent sans cesse. Seule la vitesse d'augmentation se stabilise après un temps adimensionnel d'environ 10. D'après l'observation de la figure B.6.5, la durée expérimentale doit être choisie la plus étendue possible afin d'augmenter la précision sur les résultats du problème inverse 1. Par ailleurs le chauffage doit être considéré continu.

Une augmentation des critères D- et E-optimum est systématiquement provoquée lorsque la définition de la caméra, la fréquence d'échantillonnage et l'amplitude des températures mesurées sont étendues. Il est cependant important de vérifier que les variations de température maximum au sein de l'échantillon n'excèdent pas 5 K de manière à considérer les propriétés thermophysiques du matériau constantes sur la gamme de température étudiée. La fréquence d'échantillonnage et la résolution de la caméra dépendent du modèle de la caméra et du prix investi. Les caractéristiques de la

caméra introduites correspondent à celles d'une caméra FLIR équipée d'un photodétecteur GaAs fonctionnant dans le moyen infrarouge (8-9  $\mu\text{m}$ ).

La figure B.6.6 montre l'évolution des critères en fonction du nombre de propriétés à identifier dans le problème 1 pour l'alumine. Les durées dimensionnelles de l'expérience et du temps de chauffe sont de 10 s, correspondant à un temps adimensionnel de 20. Au total, 500 images, définies avec une résolution de  $64 \times 64$  points, sont enregistrées au cours de l'expérience avec une fréquence de 50 Hz. La matrice d'information est évaluée lorsque 5 paramètres ( $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  et  $\text{Bi}^{\text{rad}}$ ) sont à estimer, puis lorsque 6, 7 et 8 paramètres sont à estimer, incluant alors les paramètres radiatifs gris  $\tau_0$ ,  $\omega$  et  $g$ .



*Figure B.6.6 : Effets du nombre de paramètres à estimer a) sur le critère D-optimum et b) sur le critère E-optimum.*

L'observation de la figure B.6.6.a) révèle la possibilité d'estimer simultanément la capacité calorifique volumique, les trois composantes de la conductivité thermique, le coefficient de transferts de chaleur, l'épaisseur optique, l'albédo et le facteur d'asymétrie d'une alumine grise à l'aide du problème 1. Cependant, l'analyse du critère E-optimum démontre une certaine difficulté lors de l'estimation de l'épaisseur optique du matériau. Effectivement, l'alumine étant un matériau optiquement épais, une certaine corrélation est engendrée entre les coefficients de sensibilité relatifs à l'épaisseur optique et la conductivité thermique. Pour cette raison, la validation du problème inverse ainsi que le choix de la technique adaptée pour l'identification des paramètres se fera d'abord au travers de l'estimation de 5 paramètres, avant de tenter l'estimation d'un nombre supérieur de paramètres.

### B.6.3 Choix de la technique de minimisation

La détermination de la technique de minimisation la plus efficace pour résoudre le problème inverse 1 se base sur l'estimation préalable de 5 paramètres :  $C$ ,  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  et  $Bi^{rad}$ . La durée de l'expérience est choisie de 20 s, correspondant à un temps adimensionnel de 40. 1000 images sont enregistrées durant la simulation d'expérience, avec une résolution spatiale de 64×64 pixels. Chaque enregistrement est susceptible de contenir des erreurs non-corrélées et distribuées de manière aléatoire avec une distribution de probabilité gaussienne ; les erreurs sont additives, de moyenne nulle et d'écart-type 0.8 K (l'incertitude avec 99 % de niveau de confiance est choisi de  $\pm 2$  K, choix correspondant à l'incertitude de lecture donnée par le constructeur de la caméra pour des mesures réalisées à haute température).

Le tableau B.6.2 présente 8 des techniques de minimisation utilisées durant le développement de ce travail. Ces techniques, comparées les unes par rapport aux autres, emploient les méthodes présentées en section B.5. Suivant les techniques utilisées, le modèle direct peut être approché, soit pour accélérer le calcul de la solution du problème direct soit pour accélérer le calcul du gradient de la fonction objective. Les techniques 1-4 utilisent une unique méthode de type gradient alors que les méthodes 5-8 utilisent une composition de deux méthodes fonctionnant en deux étapes successives.

Basées sur la méthode de Levenberg-Marquardt associé à la minimisation de la norme des moindres carrés, les techniques 1 et 2 diffèrent par rapport à l'utilisation d'un modèle réduit pour l'évaluation approximative du gradient. De la même manière, les techniques 3 et 4 basées sur la méthode de Gauss diffèrent par rapport à l'emploi d'un modèle approché pour l'évaluation du gradient. Les techniques 3 et 4 utilisent comme fonction objective la fonction maximum a posteriori. Les techniques 5-8, quant à elles, utilisent la méthode Hybride comme première étape de minimisation de la norme des moindres carrés ; le modèle direct associé à l'utilisation de la méthode Hybride est découplé au rayonnement. Parmi elles, les techniques 5 et 6 emploient la méthode de Levenberg-Marquardt en seconde étape. Elles se distinguent, comme pour les techniques 1 et 2, par l'emploi d'un modèle approché pour l'évaluation du gradient en seconde étape. Les techniques 7 et 8 utilisent la méthode de Gauss en seconde étape et se distinguent également par l'introduction d'un modèle approché pour le calcul du gradient. La matrice de covariance des paramètres a priori, nécessaire à l'évaluation de

la fonction objective maximum à posteriori, est choisie diagonale pour ne considérer a priori aucune corrélation entre les paramètres. Plus spécifiquement, la variance a priori de chaque paramètre est calculée de manière à ce que l'incertitude avec 99 % de niveau de confiance aie une amplitude identique à la valeur initiale du paramètre considéré. Les informations a priori et initiales sont choisies identiques.

*Tableau B.6.2 : Techniques de minimisation.*

Technique	Fonction objective	Méthode	Modèle pour la solution du problème direct	Modèle pour le calcul du gradient
1	Moindres carrés	Levenberg-Marquardt	Complet	Approché
2	Moindres carrés	Levenberg-Marquardt	Complet	Complet
3	Maximum a Posteriori	Gauss	Complet	Approché
4	Maximum a Posteriori	Gauss	Complet	Complet
5	Moindres carrés	<u>1<sup>ère</sup> étape : Hybride</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : Levenberg-Marquardt</u>	<u>1<sup>ère</sup> étape : Découplé</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : Complet</u>	<u>1<sup>ère</sup> étape : Découplé</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : Approché</u>
6	Moindres carrés	<u>1<sup>ère</sup> étape : Hybride</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : Levenberg-Marquardt</u>	<u>1<sup>ère</sup> étape : Découplé</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : Complet</u>	<u>1<sup>ère</sup> étape : Découplé</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : Complet</u>
7	<u>1<sup>ère</sup> étape : Moindres carrés</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : MAP</u>	<u>1<sup>ère</sup> étape : Hybride</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : Gauss</u>	<u>1<sup>ère</sup> étape : Découplé</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : Complet</u>	<u>1<sup>ère</sup> étape : Découplé</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : Approché</u>
8	<u>1<sup>ère</sup> étape : Moindres carrés</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : MAP</u>	<u>1<sup>ère</sup> étape : Hybride</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : Gauss</u>	<u>1<sup>ère</sup> étape : Découplé</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : Complet</u>	<u>1<sup>ère</sup> étape : Découplé</u> <u>2<sup>ème</sup> étape : Complet</u>

Le tableau B.6.3. montre une comparaison faite sur les résultats obtenus après utilisation des techniques 1-8 pour l'estimation des paramètres  $C^*$ ,  $k_x^*$ ,  $k_y^*$ ,  $k_z^*$  et  $h^{rad*}$  sous forme dimensionnelle. Sont également présentés dans ce tableau le nombre d'itérations requis pour obtenir la convergence de la méthode ainsi que le temps CPU. Les codes numériques ont tous été résolu sur des stations équipés de processeurs Pentium IV HT de 2.8 GHz. Les résultats référents aux techniques 5-8 sont présentés en deux lignes correspondantes respectivement aux résultats de la première étape (méthode Hybride) et aux résultats de la seconde étape (méthode de Levenberg-Marquardt ou de Gauss). Pour tous les cas examinés ici, les valeurs initiales choisies pour les paramètres inconnus sont :  $C_0^* = 2.8 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$ ,  $k_{x0}^* = k_{y0}^* = k_{z0}^* = 8 \text{ W/m} \cdot \text{K}$  et  $h_0^{rad*} = 800 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ .

*Tableau B.6.3: Résultats obtenus pour des valeurs initiales proches des valeurs exactes.*

Technique	Nombre d'itérations	Temps CPU	Résultats				
			$C^* \times 10^6$ J/m <sup>3</sup> .K	$k_x^*$ W/m.K	$k_y^*$ W/m.K	$k_z^*$ W/m.K	$h^{rad*}$ W/m <sup>2</sup> .K
1	16	78h 77'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
2	16	87h 05'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
3	13	63h 59'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
4	6	32h 49'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
5	50	1h 29'	2.97 ± 0.02	8.73 ± 0.02	8.74 ± 0.02	15.0 ± 0.1	1208 ± 1
	15	73h 29'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
6	50	1h 29'	2.97 ± 0.02	8.73 ± 0.02	8.74 ± 0.02	15.0 ± 0.1	1208 ± 1
	16	86h 22'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
7	50	1h 29'	2.97 ± 0.02	8.73 ± 0.02	8.74 ± 0.02	15.0 ± 0.1	1208 ± 1
	11	54h 09'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3
8	50	1h 29'	2.97 ± 0.02	8.73 ± 0.02	8.74 ± 0.02	15.0 ± 0.1	1208 ± 1
	5	27h 21'	2.49 ± 0.02	5.00 ± 0.06	5.00 ± 0.06	5.0 ± 0.2	1373 ± 3

D'excellents résultats ont été obtenus pour les paramètres inconnus quelle que soit la technique utilisée. Par ailleurs, la comparaison des techniques 1 et 2 puis des techniques 5 et 6 révèle qu'une diminution du temps de calcul a été obtenue en approchant le gradient de la fonction objective pour la méthode de Levenberg-Marquardt. Cette modification n'entraîne de changement ni sur la précision des résultats ni sur la vitesse de convergence. Cependant, la même comparaison faite sur les techniques 3 et 4 puis sur les techniques 7 et 8 montre que l'approximation du gradient lors de l'exécution de la méthode de Gauss provoque une augmentation drastique du nombre d'itérations pour atteindre la région du minimum global, résultant ainsi en une forte augmentation du temps de calcul. L'approximation du gradient ne constitue par conséquent pas une solution pour optimiser la vitesse de convergence du problème inverse : l'utilisation d'un gradient de mauvaise qualité n'améliore pas la précision des résultats mais peut provoquer une augmentation du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le minimum global du à une mauvaise définition du gradient.

Les résultats obtenus pour les techniques 5-8 montrent que l'emploi de la méthode Hybride en 1<sup>ère</sup> étape rallonge le temps de calcul d'environ 1h 30' sans pour autant améliorer la précision des résultats finaux. Une telle constatation n'est cependant vérifiée que lorsque les valeurs initiales des paramètres à identifier sont proches des

valeurs exactes. En effet, si l'on choisit des valeurs initiales pour les paramètres inconnus suffisamment loin des valeurs exactes, il est possible d'observer que les techniques 1-4 ne sont plus capables de converger vers le minimum globale de la fonction objective ; seules les techniques 5-8 y parviennent. Pour illustrer ce phénomène, le tableau B.6.4 montre les résultats d'identification des paramètres par les techniques 1-8, pour les valeurs initiales des paramètres inconnus suivantes :  $C_0^* = 0.5 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$ ,  $k_{x0}^* = k_{y0}^* = k_{z0}^* = 50 \text{ W/m.K}$  et  $h_0^{rad*} = 5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ .

*Tableau B.6.4: Résultats obtenus pour des valeurs initiales loins des valeurs exactes.*

Technique	Nombre d'itérations	Temps CPU	Résultats				
			$C^* \times 10^6$ J/m <sup>3</sup> .K	$k_x^*$ W/m.K	$k_y^*$ W/m.K	$k_z^*$ W/m.K	$h^{rad*}$ W/m <sup>2</sup> .K
1	<i>convergence non obtenue</i>		-	-	-	-	-
2	<i>convergence non obtenue</i>		-	-	-	-	-
3	<i>convergence non obtenue</i>		-	-	-	-	-
4	<i>convergence non obtenue</i>		-	-	-	-	-
5	50	1h 48'	$3.00 \pm 0.02$	$8.77 \pm 0.02$	$8.79 \pm 0.02$	$14.9 \pm 0.1$	$1196 \pm 1$
	21	114h18'	$2.49 \pm 0.02$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.0 \pm 0.2$	$1373 \pm 3$
6	50	1h 48'	$3.00 \pm 0.02$	$8.77 \pm 0.02$	$8.79 \pm 0.02$	$14.9 \pm 0.1$	$1196 \pm 1$
	16	86h 54'	$2.49 \pm 0.02$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.0 \pm 0.2$	$1373 \pm 3$
7	50	1h 48'	$3.00 \pm 0.02$	$8.77 \pm 0.02$	$8.79 \pm 0.02$	$14.9 \pm 0.1$	$1196 \pm 1$
	10	54h 42'	$2.49 \pm 0.02$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.0 \pm 0.2$	$1373 \pm 3$
8	50	1h 48'	$3.00 \pm 0.02$	$8.77 \pm 0.02$	$8.79 \pm 0.02$	$14.9 \pm 0.1$	$1196 \pm 1$
	5	27h 13'	$2.49 \pm 0.02$	$5.00 \pm 0.06$	$5.00 \pm 0.06$	$5.0 \pm 0.2$	$1373 \pm 3$

Malgré l'utilisation d'un problème direct découplé au rayonnement, la méthode Hybride est capable de gérer des résultats relativement proches des valeurs exactes pour les paramètres inconnus. Pour cette raison, les méthodes de type gradient utilisées en 2<sup>ème</sup> étape convergent efficacement. En ce qui concerne l'utilisation d'un gradient approché pour les méthodes de Levenberg-Marquardt et de Gauss en techniques 5-8, les mêmes phénomènes sont observés tant pour le tableau B.6.3 que pour le tableau B.6.4. L'approximation du gradient n'améliore pas la précision des résultats mais provoque, principalement pour la méthode de Gauss, une augmentation du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre le minimum global.

En règle générale, les techniques qui font appel à la fonction objective maximum a posteriori convergent plus rapidement vers le minimum global que celles qui font appel

à la norme des moindres carrés. La technique 8 à donc été retenue pour estimer les propriétés thermophysiques de l'alumine.

#### B.6.4 Résultats du problème inverse

L'estimation simultanée de 8 paramètres ( $C^*$ ,  $k_x^*$ ,  $k_y^*$ ,  $k_z^*$ ,  $h^{rad*}$ ,  $\beta^*$ ,  $\omega$  et  $g$ ) à l'aide de la technique 8 ayant systématiquement échoué vers des minima locaux de la fonction objective, les résultats présentés ici se concentrent plutôt sur l'estimation des 7 paramètres suivants :  $C^*$ ,  $k_x^*$ ,  $k_y^*$ ,  $k_z^*$ ,  $h^{rad*}$ ,  $\beta^*$  et  $\omega$ . Pour d'entamer la première étape du problème inverse, des valeurs initiales pour les paramètres  $C^*$ ,  $k_x^*$ ,  $k_y^*$ ,  $k_z^*$  et  $h^{rad*}$  sont préalablement définies. Comme cette étape considère un problème découplé au rayonnement comme approximation du problème physique, une estimation approchée des paramètres  $C^*$ ,  $k_x^*$ ,  $k_y^*$ ,  $k_z^*$  et  $h^{rad*}$  est obtenue. Ces résultats servent à la fois d'information initiale et d'information a priori pour la 2<sup>ème</sup> étape du problème inverse.

Des informations initiales et a priori sont nécessaires pour le déroulement de la seconde étape. Les valeurs espérées pour le coefficient d'extinction et pour l'albédo sont respectivement de  $\mu_{\beta^*} = 50000 \text{ m}^{-1}$  et  $\mu_{\omega} = 0.999$ , sachant que l'incertitude sur ces valeurs sont supposées être respectivement de  $\Delta\beta^* : \pm 50000 \text{ m}^{-1}$  et  $\Delta\omega : \pm 0.100$ . Les valeurs exactes pour ces deux paramètres sont  $\beta^* = 10010 \text{ m}^{-1}$  et  $\omega = 0.999001$ . Afin de vérifier la stabilité de la méthode, 8 tests sont réalisés avec différentes valeurs initiales pour le coefficient d'extinction et pour l'albédo, comme le montre le tableau B.6.5. Les valeurs initiales choisies pour la réalisation du problème inverse sont mentionnées en première ligne de chaque test. Comme la méthode hybride fournit systématiquement des résultats proches des valeurs exactes pour les paramètres  $C^*$ ,  $k_x^*$ ,  $k_y^*$ ,  $k_z^*$  et  $h^{rad*}$ , quelles que soit les valeurs initiales choisies, des valeurs initiales identiques ont été définis pour les paramètres conductifs pour les 8 tests. Les résultats de l'identification de 7 paramètres de l'alumine à haute température sont résumés dans le tableau B.6.5.

Les paramètres obtenus à l'issue des tests 1-5 et du test 8 sont proches des valeurs exactes et possède une faible incertitude (moins de 5 % de la valeur du paramètre). Pour les tests 6-8, la technique 8 n'a pu converger vers le minimum global. Cela montre une certaine fragilité de la méthode par rapport à l'information initiale en 2<sup>ème</sup> étape.

Tableau B.6.5: Résultats de l'estimation de 7 paramètres.

Test	$C^*$ [J/m <sup>3</sup> .K]	$k_x^*$ [W/m.K]	$k_y^*$ [W/m.K]	$k_z^*$ [W/m.K]	$h^{rad*}$ [W/m <sup>2</sup> .K]	$\beta^*$ [m <sup>-1</sup> ]	$\omega$
<b>1</b>	$0.1 \times 10^6$	50	50	50	5	2000	0.99
	$2.49 \times 10^6$ $\pm 0.03 \times 10^6$	4.98 $\pm 0.08$	4.97 $\pm 0.08$	4.90 $\pm 0.23$	1365 $\pm 13$	9688 $\pm 657$	0.9996 $\pm 0.0103$
<b>2</b>	$0.1 \times 10^6$	50	50	50	5	50000	0.99
	$2.49 \times 10^6$ $\pm 0.03 \times 10^6$	4.98 $\pm 0.08$	4.97 $\pm 0.08$	4.90 $\pm 0.23$	1365 $\pm 13$	9688 $\pm 657$	0.9996 $\pm 0.0103$
<b>3</b>	$0.1 \times 10^6$	50	50	50	5	2000	0.9999
	$2.49 \times 10^6$ $\pm 0.03 \times 10^6$	4.98 $\pm 0.08$	4.97 $\pm 0.08$	4.90 $\pm 0.23$	1365 $\pm 13$	9688 $\pm 657$	0.9996 $\pm 0.0103$
<b>4</b>	$0.1 \times 10^6$	50	50	50	5	50000	0.9999
	$2.49 \times 10^6$ $\pm 0.03 \times 10^6$	4.98 $\pm 0.08$	4.97 $\pm 0.08$	4.90 $\pm 0.23$	1365 $\pm 13$	9688 $\pm 657$	0.9996 $\pm 0.0103$
<b>5</b>	$0.1 \times 10^6$	50	50	50	5	10	0
	<i>convergence non obtenue</i>						
<b>6</b>	$0.1 \times 10^6$	50	50	50	5	100000	0
	<i>convergence non obtenue</i>						
<b>7</b>	$0.1 \times 10^6$	50	50	50	5	10	0.9999
	<i>convergence non obtenue</i>						
<b>8</b>	$0.1 \times 10^6$	50	50	50	5	100000	0.9999
	$2.49 \times 10^6$ $\pm 0.03 \times 10^6$	4.98 $\pm 0.08$	4.97 $\pm 0.08$	4.90 $\pm 0.23$	1365 $\pm 13$	9688 $\pm 657$	0.9996 $\pm 0.0103$

Cette information doit en effet être choisie en accord avec les caractéristiques radiatives du matériau. L'alumine étant un matériau optiquement épais avec une forte dominance des phénomènes de diffusion radiative par rapport aux phénomènes d'absorption et d'émission, des valeurs élevées pour les coefficients d'extinction et pour l'albédo doivent être choisies même si ces valeurs sont différentes des valeurs exactes. Avec une information a priori réaliste, la technique 8 se montre capable de fournir des résultats fiables.

## B.7 Conclusions et Perspectives

L'objectif initial de ce travail était de projeter deux méthodologies expérimentales pour identifier les propriétés thermophysiques de milieux semi-transparents à haute

température à l'aide de mesures de température en fonction du temps et de mesures de facteur d'émission spectral directionnel. En raison d'une forte dépendance de sensibilité des mesures d'émission par rapport aux divers paramètres radiatifs spectraux, l'identification de propriétés radiatives n'a pas pu être acheminée. En revanche, à partir de l'enregistrement du champ de température mesuré en surface d'un échantillon ponctuellement chauffé, il a été montré la possibilité d'identifier les propriétés thermophysiques de milieux semi-transparents gris et diffusants à haute température. Sont alors incluses dans les propriétés thermophysiques estimables a) les propriétés liées à la diffusion thermiques tels que la capacité calorifique volumique et les composantes de la diagonale principale du tenseur de conductivité thermique, et b) l'épaisseur optique et l'albédo gris. L'incertitude qui accompagne les résultats a été obtenue faible pour l'ensemble des propriétés.

Comme perspectives de recherches par rapport à ce travail, il est proposé d'approfondir des travaux introduits par O. Rozenbaum [135] et J. F. Brun [50]. Ces travaux consistaient à ajuster des paramètres entrant dans la définition d'un modèle pour la caractérisation de la fonction diélectriques de matériau, et, a posteriori, de prédire la luminance sortante de matériaux semi-transparents à haute température. La perspective de développement intervient au niveau de la mise au point de méthodes inverses fiables pour habilitier et généraliser l'identification de paramètres intervenant dans la formulation de la fonction diélectrique grâce à la mesure de facteur d'émission spectral directionnel à haute température. Une fois la fonction diélectrique déduite, des méthodes de prédiction telles que la théorie de Mie ou la méthode de Monte-Carlo permettent la prédiction des propriétés radiatives spectrales recherchées.

# Apêndice C

## Simulation du Facteur d'Emission et du Champ de Température

### C.1 Prédiction du Facteur d'Emission Spectral Directionnel

La simulation du facteur d'émission est réalisée à partir de la solution d'un problème couplé de conduction-rayonnement 3D utilisant la méthode des volumes finis. Le problème est considéré transitoire, et lorsque le domaine représenté par l'échantillon de céramique rentre en régime permanent, la luminance sortante de la position  $(0, 0, c^*)$  est comparée à la luminance sortante d'un corps noir porté à la même température que celle du point  $(0, 0, c^*)$  pour les directions de discrétisation adoptées. La figure C.1.1 représente l'échantillon, ainsi que les dimensions utilisées et les conditions aux limites représentatives des conditions expérimentales du banc du CETHIL.

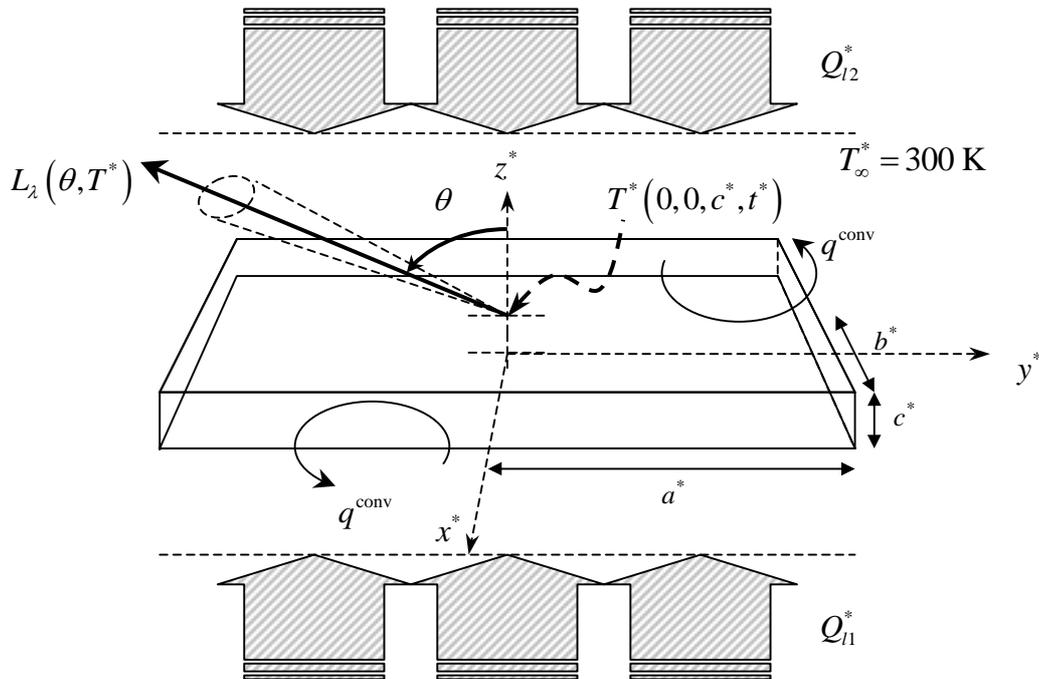


Figure C.1.1: Echantillon de céramique.

Une maille MVF de précision  $(N_x \times N_y \times N_z) \times N_l = (25 \times 25 \times 25) \times 160$  a été utilisée pour résoudre le système d'équations.  $N_x$ ,  $N_y$  et  $N_z$  représentent les nombres de volumes nécessaires à la discrétisation de l'échantillon suivant les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ .  $N_l$  représente le nombre d'angles solides choisis dans la discrétisation directionnelle.

La matériau fictif dont on souhaite prédire le facteur d'émission s'apparente à une céramique d'alumine Al23 à 2000 K, considérant une taille unique de particules sphériques de 20  $\mu\text{m}$  de rayon, et une fraction volumique  $f_v = 0.7$ . La capacité calorifique est fixée à  $C^* = 2.5 \times 10^6 \text{ J/m}^3 \cdot \text{K}$  et la conductivité phonique, considérée isotrope, de valeur  $k^* = 5 \text{ W/m.K}$  (données constructeur S.T.O.P. [129]).

Le spectre d'émission de l'alumine est découpé en 8 bandes, numéro considéré suffisant pour permettre de prendre en compte toutes les irrégularités et grandes variations de l'émission du matériau dans le spectre infrarouge. Dans chacune des 8 bandes, les propriétés optiques et radiatives sont supposées constantes. La largeur des bandes est fixée en fonction de la variation plus ou moins grandes de ces propriétés. Pour chacune des bandes, les propriétés radiatives moyennes sont calculées selon le modèle du coefficient d'absorption moyen de Rosseland [32,128], donné par l'équation (C.1.1) où  $\alpha$  est une propriété radiative au choix comme par exemple le coefficient d'absorption, le coefficient de diffusion radiative, le facteur d'asymétrie ou bien l'indice de réfraction.

$$\frac{1}{\alpha_m} = \frac{\int_{\lambda=\lambda_m^-}^{\lambda_m^+} \frac{1}{\alpha_\lambda} \frac{dI_{b\lambda}(T)}{dT} d\lambda}{\int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{dI_{b\lambda}(T)}{dT} d\lambda} \quad (\text{C.1.1})$$

Les limites  $\lambda_m^-$  et  $\lambda_m^+$  de chaque bande spectrale  $m$  sont choisies de manière à ce que les propriétés radiatives moyennes puissent correspondre approximativement aux propriétés radiatives obtenues pour une longueur d'onde entière, contenue dans la bande, correspondante à la longueur d'onde d'interférence d'un filtre du radiomètre. Par exemple, pour une bande  $m$  centrée autour de 3  $\mu\text{m}$ , les limites inférieures et supérieures peuvent être fixées à  $\lambda_m^- = 2.7 \mu\text{m}$  et  $\lambda_m^+ = 3.7 \mu\text{m}$  car la valeur du coefficient moyen d'absorption calculé par le modèle de Rosseland correspond à la valeur du coefficient d'absorption spectral mesurée à la fréquence  $\lambda = 3 \mu\text{m}$ . Pour réaliser ce découpage, le spectre des propriétés radiatives doit être préalablement simulé

par la théorie de Mie. Hors, cette solution dépend totalement du comportement de l'indice de réfraction qui y est introduit au départ.

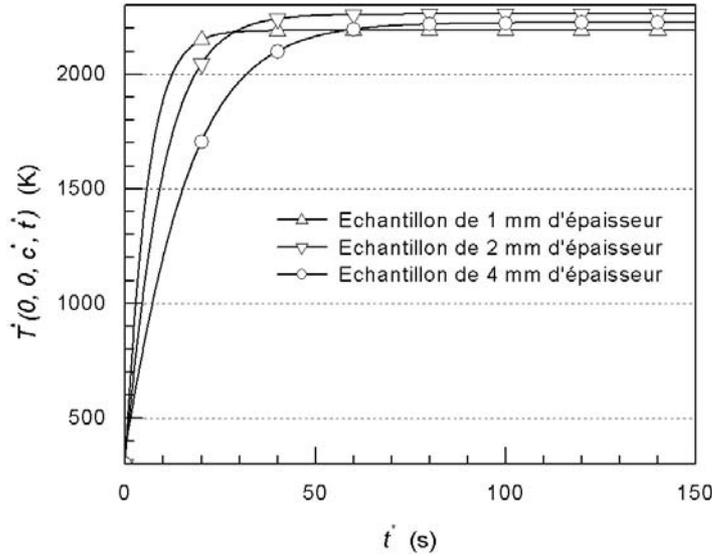
Pour simuler l'émission d'alumines à haute température, un modèle de prédiction de la fonction diélectrique (indice de réfraction) est introduit [50], basé sur le modèle d'oscillateur de Lorentz corrigé d'un terme de relaxation. Le modèle dépend de paramètres bien précis qui varient en fonction de la composition chimique du matériau et de la température. Pour simuler la fonction diélectrique de l'alumine, les paramètres de l'oscillateur ont été relevés pour un monocristal de saphir à 2007 K. Une fois connue, la fonction diélectrique est introduite dans la théorie de Mie avec les renseignements concernant la structure microscopique de l'alumine, comme par exemple le rayon moyen des particules sphériques et la fraction volumique  $f_v$ , pour le calcul des propriétés radiatives. L'indice de réfraction moyen calculé sur chaque bande ainsi que les propriétés radiatives moyennes figurent dans le tableaux B.6.1 défini en Appendice B.

Avant d'être porté à haute température, l'échantillon se trouve à température ambiante  $T_0^* = T_\infty^* = 300$  K. La céramique est ensuite portée à haute température grâce à deux faisceaux laser de puissances  $Q_{l1}^*$  et  $Q_{l2}^*$ , de répartition énergétique supposée homogène, chargés de chauffer respectivement les faces  $z^* = 0$  et  $z^* = c^*$ . En situation idéale,  $Q_{l1}^*$  et  $Q_{l2}^*$  sont identiques. A haute température, l'échantillon échange de la chaleur avec le milieu ambiant par convection naturelle ( $h^* = 50$  W/m<sup>2</sup>.K) et par rayonnement (émission et réflexion au niveau des deux faces de l'échantillon). Trois épaisseurs d'échantillon sont étudiées : 1 mm, 2 mm et 4 mm. Les trois échantillons ont la même longueur  $2a^* = 1$  cm et la même largeur  $2b^* = 1$  cm.

Le volume des échantillons étant différent, le flux laser nécessaire pour porter chacun d'eux à une température d'environ 2200 K varie. Par exemple, la puissance totale nécessaire pour porter un échantillon d'1 mm d'épaisseur à ce niveau de température est de  $(Q_{l1}^* + Q_{l2}^*) = 70$  W, alors qu'elle est de 85 W pour l'échantillon de 2 mm d'épaisseur, et de 100 W pour l'échantillon de 4 mm d'épaisseur. Ces puissances ont été obtenues par simulations successives du code numérique jusqu'à obtention de la température finale souhaitée. Il a été cependant noté que la puissance administrée à chaque échantillon variait beaucoup en fonction du découpage spectral choisi. Cela montre l'importance d'une définition correcte du spectre d'absorption du matériau dans

la zone du proche infrarouge qui conditionne les pertes surfacique ou volumique de flux radiatif.

Le temps nécessaire pour que ces échantillons atteignent 2200 K et atteignent le régime permanent varie, comme le montre la figure C.1.2.



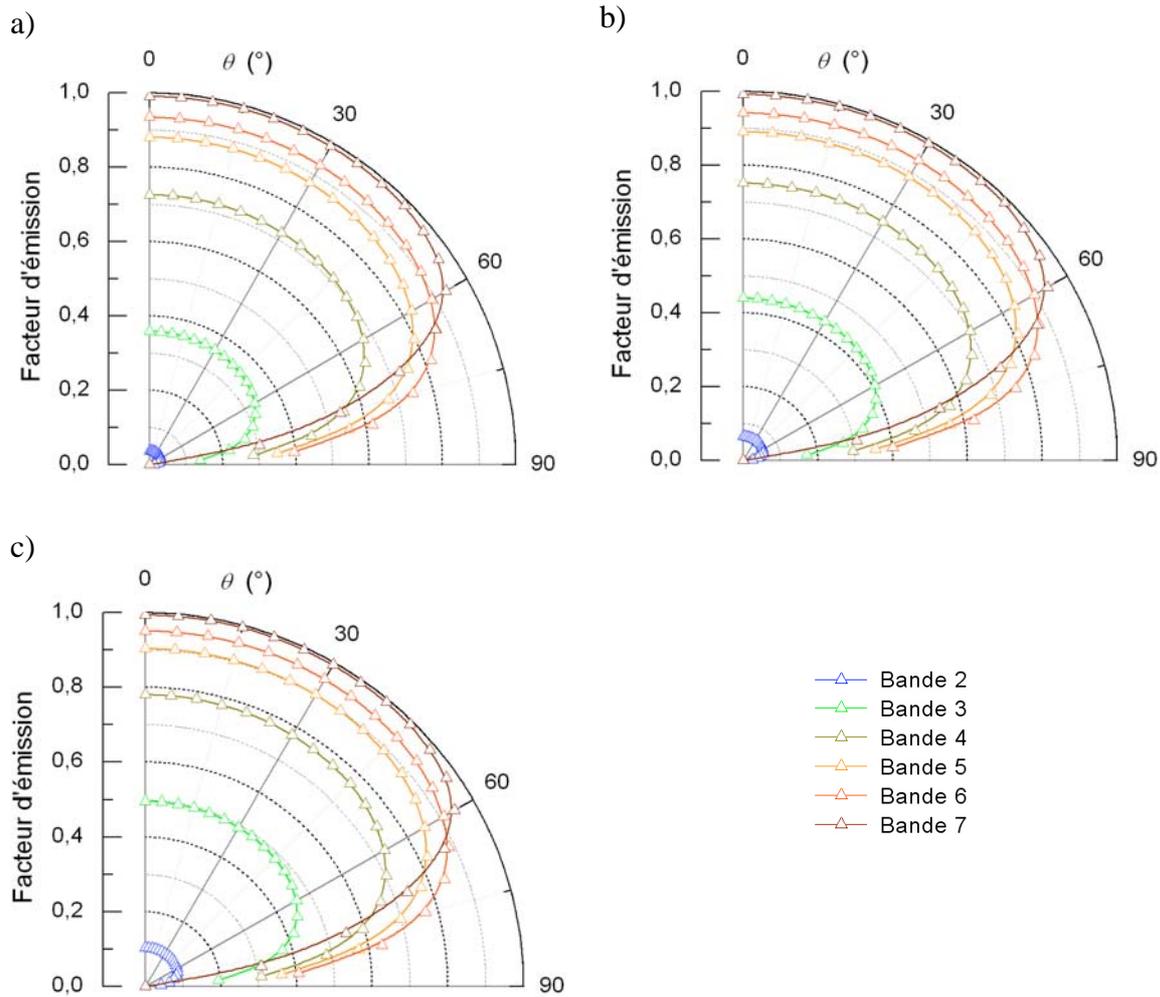
*Figure C.1.2 : Evolution de la température des échantillons en fonction du temps.*

D'après la figure C.1.2, le temps de chauffe pour les échantillons de 1 mm, 2 mm et 4 mm est respectivement de 50 s, 100 s et 150 s. Il est utile de déterminer à priori par le calcul le temps nécessaire pour atteindre le régime permanent avant de faire une mesure d'émission.

Dans la partie expérimentale, la luminance sortante de l'échantillon est mesurée. La même mesure est répétée sur un corps noir porté à la même température. Des deux mesures, en faisant leur rapport, s'obtient le facteur d'émission qui dépend de la température du milieu, de l'angle d'observation, de l'épaisseur géométrique du milieu car le rayonnement est volumique, et de la longueur d'onde. Nous pouvons donc numériquement prédire ce facteur d'émission en le calculant de la façon suivante :

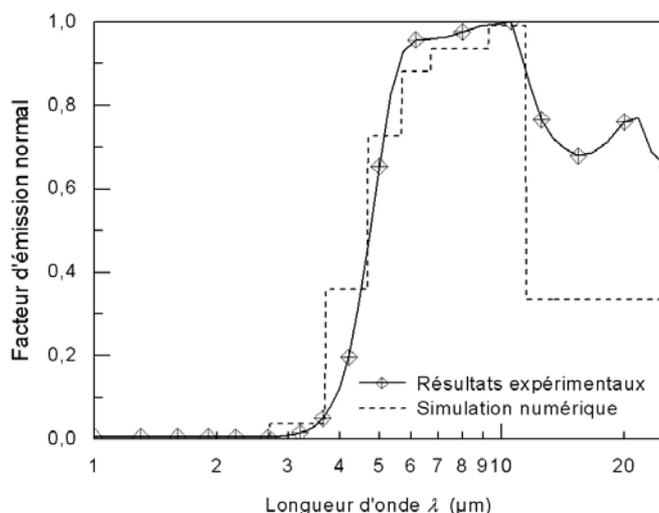
$$\tilde{\epsilon}_\lambda(\tau_0, \theta, T) = \frac{L_\lambda(\tau_0, \theta, T)}{L_\lambda^0(T)} \quad (C.1.2)$$

La figure C.1.3 montre un exemple du facteur d'émission spectral directionnel simulé numériquement sur les trois échantillons:



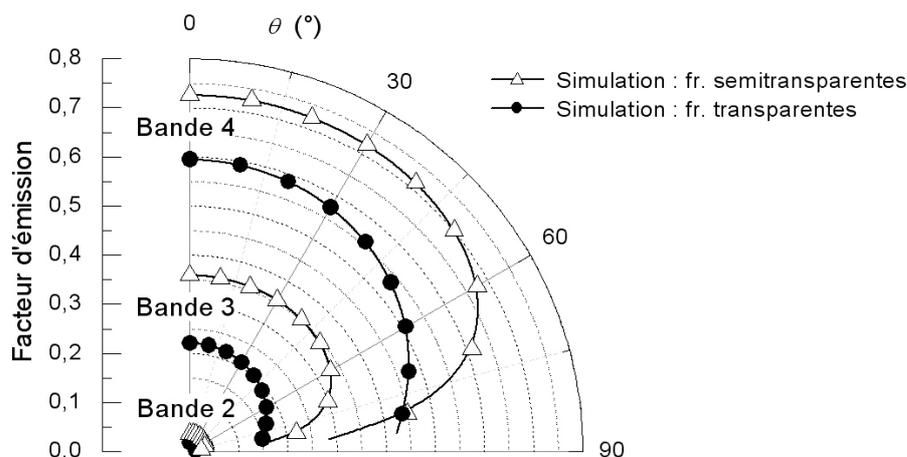
*Figure C.1.3: Facteur d'émission spectral et directionnel d'échantillons d'alumine d'épaisseur a)  $c^* = 1 \text{ mm}$ , b)  $c^* = 2 \text{ mm}$  et c)  $c^* = 4 \text{ mm}$ .*

La figure C.1.3 montre que l'amplitude du facteur d'émission varie peu en fonction de l'épaisseur de l'échantillon pour les épaisseurs testées de 1 à 4 mm, à l'exception du cas où la longueur d'onde varie entre les bandes 2, 3 et 4 ( $\bar{\lambda} = 3, 4 \text{ et } 5 \mu\text{m}$ ). Cette zone correspond à l'augmentation drastique du coefficient d'absorption (voir tableau B.6.1, Appendice B). Par exemple, le facteur d'émission normal dans la bande 3 augmente de 0.36 à 0.49 lorsque l'épaisseur augmente de 1 mm à 4 mm. D'un autre côté, le facteur d'émission dépend beaucoup de la longueur d'onde. Lorsque  $\lambda = 3 \mu\text{m}$ , le matériau n'émet et n'absorbe quasiment pas, alors que vers les longueurs d'onde comprises entre 6  $\mu\text{m}$  et 11  $\mu\text{m}$ , le matériau se trouve extrêmement absorbant. D'un point de vue général, le comportement en émission des alumines est irréguliers comme le montre la figure C.1.4 [50].



*Figure C.1.4 : Facteur d'émission spectral et normal d'un échantillon d'alumine Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> d'épaisseur  $c^* = 1 \text{ mm}$  à 2000 K [50].*

Par rapport à la distribution directionnelle de l'émission, un comportement relativement isotrope représentatif de ce que l'on peut attendre d'un diélectrique a été obtenu. Quelle que soit la bande de longueur d'onde de 2 à 6, l'émission adopte un comportement isotrope dans des angles d'observation allant de 0° jusqu'à 70°, suivie d'une diminution drastique dans les directions rasantes due à l'augmentation de la réflectivité spéculaire de la frontière  $\rho'_\lambda(\theta_r)$ . Dans la zone de longueurs d'onde allant de 3 à 8  $\mu\text{m}$ , la partie réelle de l'indice de réfraction est supérieure à l'unité. Pour cette raison, l'adoption de frontières semi-transparentes pour simuler les frontières de l'échantillon modifie de manière drastique la solution obtenue en terme de facteur d'émission, comme le montre la figure C.1.5.



*Figure C.1.5: Facteur d'émission spectral et directionnel pour un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 1 \text{ mm}$  considérant a) des frontières transparentes et b) des frontières semi-transparentes.*

La courbe relative à la bande 7 ( $\bar{\lambda} = 10 \mu\text{m}$ ) se distingue des autres dans la zone où l'angle d'observation est supérieur à  $60^\circ$ . En effet, pour  $10 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 16 \mu\text{m}$ , tout le rayonnement émis à l'intérieur du milieu et parvenant à la surface est réfracté, l'air se trouvant plus réfringent que l'alumine. Il ne se produit donc aucun phénomène de réflexion totale quel que soit l'angle d'incidence. De ce fait, l'indicatrice à  $10 \mu\text{m}$  se situe au dessus de toutes les autres dans cette zone.

La comparaison entre les résultats expérimentaux obtenus sur une alumine Al25 chauffée à 2150 K [129] et les résultats de facteur d'émission simulé pour des frontières semi-transparentes permet de mettre en évidence le phénomène de forte atténuation de l'émission dans les directions rasantes dû à la prise en compte de frontières semi-transparentes. Pour simuler le comportement en émission de l'Al25, les propriétés optiques et radiatives suivantes ont été introduites :

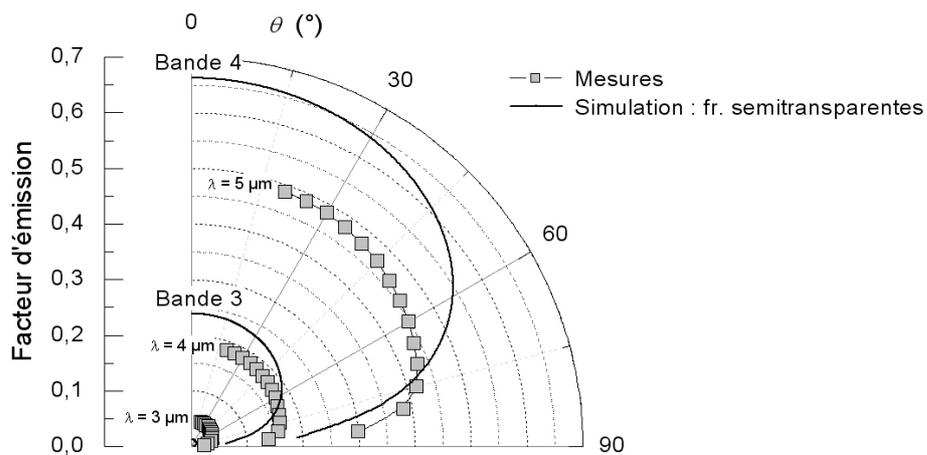
*Tableau C.1.1: Propriétés radiatives de la céramique Al25 prédites par la théorie de Mie.*

$m$	Bande de longueur d'onde ( $\mu\text{m}$ )	Coefficient d'absorption $\kappa_{am}$ moyen ( $\text{m}^{-1}$ )	Coefficient de diffusion $\sigma_{sm}$ moyen ( $\text{m}^{-1}$ )	Facteur d'asymétrie $g_m$ (Fonction de phase Henyey-Greenstein)	Partie réelle de l'indice de réfraction $n_r$ calculé	Partie complexe de l'indice de réfraction $k_r$ calculé
1	$0.5 \leq \lambda < 2.7$	0.4	22 324	0.759	1.656	$7.282 \times 10^{-9}$
2	$2.7 \leq \lambda < 3.7$	7	21 629	0.763	1.633	$1.435 \times 10^{-6}$
3	$3.7 \leq \lambda < 4.7$	152	22 027	0.756	1.600	$4.387 \times 10^{-5}$
4	$4.7 \leq \lambda < 5.7$	1 103	20 635	0.776	1.555	$4.449 \times 10^{-4}$
5	$5.7 \leq \lambda < 6.7$	3 934	17 553	0.813	1.494	$2.319 \times 10^{-3}$
6	$6.7 \leq \lambda < 9.3$	7 288	16 530	0.879	1.307	$7.745 \times 10^{-3}$
7	$9.3 \leq \lambda < 11.5$	9 522	10 564	0.926	0.949	$5.251 \times 10^{-2}$
8	$11.5 \leq \lambda < 50.0$	4 617	20 061	0.605	0.413	1.590

D'après les résultats de la simulation en figure C.1.6, l'atténuation de l'émission intervient un peu trop tôt par rapport à ce qui a été mesuré [129]. Bien que la prise en compte de frontières semi-transparentes soit correcte, ces frontières ont été supposées parfaitement planes, non représentatives de la réalité à l'échelle microscopique. Pourtant, en tenant compte de la diffusion provoquée par la surface rugueuse, une distribution un peu plus homogénéisée de l'intensité directionnelle serait obtenue. Pour

rendre bien compte du phénomène, des lois de Fresnel appliquées aux surfaces non-lisses auraient du être employées.

Une différence d'amplitude est observée entre le facteur d'émission spectral directionnel mesuré et celui simulé, due essentiellement à deux phénomènes. Le premier a déjà été cité et correspond aux différences existantes entre les coefficients d'absorption aux longueurs d'ondes précises de 3, 4 e 5  $\mu\text{m}$  par rapport aux coefficients d'absorption moyens évalués sur les bandes 2, 3 et 4, où le matériau se met à absorber soudainement. Le second phénomène concerne le manque de connaissance de la fonction diélectrique de l'alumine pour les hautes températures situées autour de 2200 K. A cet ordre de température, il apparaît des phénomènes dit « préfusionnels » au sein du matériau qui ont pour effet d'augmenter l'absorption du matériau dans les courtes longueurs d'onde, principalement pour  $\lambda < 5 \mu\text{m}$  [50]. Pour cette raison, l'augmentation du facteur d'émission causée par les phénomènes préfusionnels n'apparaissent pas dans la simulation.



*Figure C.1.6 : Facteur d'émission spectral directionnel mesuré sur un échantillon d'alumine Al25 d'épaisseur  $c^* = 1 \text{ mm}$  à 2150 K et simulé pour des frontières semi-transparentes.*

Après cette étude préliminaire, il reste à vérifier si le champ de température obtenu par simulation des conditions expérimentales conduit à un champ de température uniforme à l'intérieur de l'échantillon. En effet, la définition d'un facteur d'émission sur un matériau semi transparent nécessite pour être valide que l'échantillon soit isotherme, ou bien que le gradient de température interne s'il existe n'ait qu'une influence négligeable sur la luminance sortante, donc sur l'émission. Dans le montage

expérimental actuel, deux faisceaux supposés identiques dont la distribution énergétique est homogénéisée, parviennent sur chaque face de l'échantillon. On suppose alors que sur des épaisseur de l'ordre du millimètre, un échantillon d'alumine est quasi isotherme. Nous cherchons à vérifier ce résultat par la simulation.

L'objet de la suite de cette étude va être de prédire le champ de température interne des échantillons de céramique, quantifier un gradient de température s'il existe et étudier l'influence du gradient de température sur le facteur d'émission défini à partir d'une température de surface. Cette étude permettra de déterminer les conditions expérimentales acceptables pour mesurer le facteur d'émission.

## C.2 Influence d'un Champ de Température Interne Non-Uniforme sur le Facteur d'Emission

La présence d'un gradient de température interne peut provenir de deux causes que nous allons étudier plus précisément ici :

- a) bien que les faisceaux lasers incidents sur l'échantillon de part et d'autre soient homogènes d'un point de vue énergétique, et que le système soit supposé parfaitement symétrique par rapport au plan médian de l'échantillon, les conditions aux limites thermiques peuvent conduire à un gradient de température indésirable, interne au matériau.
- b) Les deux canaux peuvent être déséquilibrés conduisant à des puissances différentes de part et d'autre de l'échantillon.

Le flux total  $Q_l^*$  fourni par le laser étant séparé en deux canaux supposés identiques  $Q_{l1}^*$  et  $Q_{l2}^*$ , cette étude montre l'influence qu'aurait un déséquilibre de flux sur le facteur d'émission. Un tel déséquilibre peut survenir par exemple si les revêtements des miroirs ou la transmittance des lentilles ne sont pas identiques sur les deux voies, ou lorsque le nombre d'optiques pour canaliser le flux de part et d'autre de l'échantillon diffère. Pour simuler ce phénomène,  $Q_{l2}^*$  est supposé fixe et  $Q_{l1}^*$  varie graduellement de 100 % jusqu'à 75 % de la valeur de  $Q_{l2}^*$ , à pas de 5 %. La répartition spatiale pour les deux canaux est supposée homogène.

Le champ de température le long de l'axe central  $(0, 0, z^*)$  est systématiquement représenté de manière à quantifier le gradient de température à l'intérieur de l'échantillon. En suite, le facteur d'émission obtenu à partir du problème de couplage conduction-rayonnement est comparé avec celui obtenu pour un matériau de température homogène. La température choisie pour calculer le facteur d'émission du matériau isotherme est celle du point  $(0, 0, z^*)$  obtenue par le calcul couplé. Cette position (face avant) correspond à la position de mesure du facteur d'émission. L'écart entre les facteurs d'émission ainsi calculés est évalué en fonction du gradient interne de température. Ces résultats permettront d'identifier l'épaisseur limite acceptable pour l'échantillon ainsi que le déséquilibre de flux admissible entre les deux canaux.

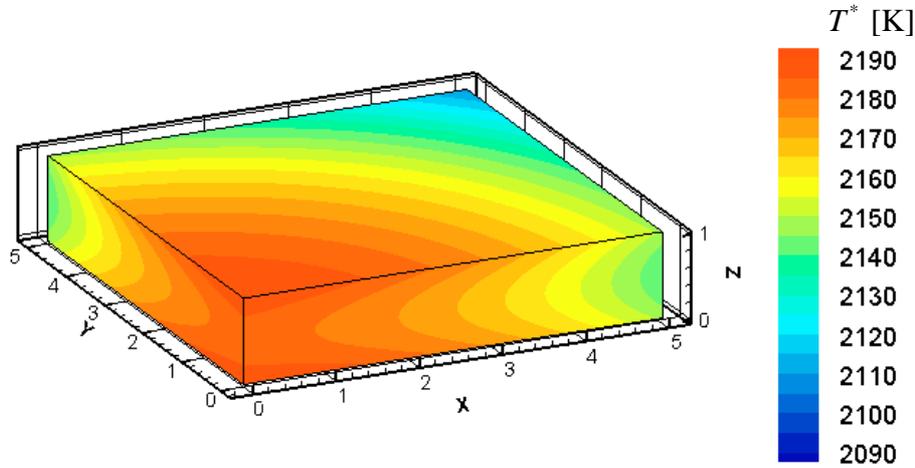
### C.2.1 Simulation du champ de température interne et du facteur d'émission d'un échantillon d'alumine Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> de 1 mm d'épaisseur

Dans cette section, l'étude de l'influence du champ de température sur le facteur d'émission est abordée dans le cas d'un échantillon de 1 mm d'épaisseur. Cette étude se base en premier lieu sur des conditions idéales d'expérimentation sans déséquilibre de flux entre les canaux, l'objectif étant de découvrir l'influence des conditions aux limites radiatives sur le champ interne. En seconde partie, l'effet du déséquilibre de flux entre les canaux sur le champ de température interne est introduit. Une analyse quantitative de l'écart obtenu sur le facteur d'émission est simulé dans les deux cas.

#### C.2.1.1 Influence du gradient interne de température

La figure C.2.1 montre le champ de température obtenu pour l'échantillon de 1 mm d'épaisseur, une vision plus détaillée de ce champ étant montrée à la suite, figure C.2.2.a), le long de l'axe centrale  $(0, 0, z^*)$ . Les deux canaux sont supposés symétriques. Le profil de température obtenu prend la forme d'une parabole : la solution du problème de couplage conduction-rayonnement ne fournit pas le champ de température uniforme espéré. En réalité, un gradient interne de température est engendré par l'existence d'un fort champ de flux radiatif non uniforme à l'intérieur de l'échantillon semi-transparent. Ce gradient de température n'est pas si important comparé à la température moyenne de l'échantillon : la différence de température au sein de l'échantillon de 1 mm d'épaisseur atteint 8 K, ce qui correspond à 0.37 % de la

valeur de la température au point de mesure (2190 K). Il est cependant nécessaire de vérifier l'impacte du gradient sur le facteur d'émission.



*Figure C.2.1: Champ de température dans un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 1$  mm.  $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .*

La figure C.2.2.b) montre l'écart exprimé en % commis sur le facteur d'émission. Pour l'obtenir, le facteur d'émission simulé à partir du problème couplé à été comparé à celui simulé pour un échantillon isotherme. Le champ de température de l'échantillon isotherme est représenté sur la figure C.2.2.a).

$$\text{Ecart (\%)} = \left| \frac{\tilde{\epsilon}_{C+R}(\lambda, \tau_0, \theta, T) - \tilde{\epsilon}_{\text{isotherme}}(\lambda, \tau_0, \theta, T)}{\tilde{\epsilon}_{\text{isotherme}}(\lambda, \tau_0, \theta, T)} \right| \times 100 \quad (\text{C.2.1})$$

D'après la figure C.2.2.b), l'écart est d'à peine 0.7 % pour la bande 2 et de 0.5 % pour la bande 3. Pour  $\lambda \geq 5 \mu\text{m}$  (bandes 4-8) l'écart est imperceptible. Cet écart, dépendant de la longueur d'onde, est reparti de manière isotrope. Son amplitude dépend directement du coefficient d'absorption du matériau, qui est de faible valeur lorsque  $\lambda \leq 3 \mu\text{m}$ , moyen lorsque  $3 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 7 \mu\text{m}$  et de valeur élevée lorsque  $\lambda \geq 7 \mu\text{m}$ . Effectivement, lorsque le coefficient d'absorption est de faible valeur, la luminance sortante de la frontière intègre toutes les luminances émises dans la même direction depuis l'intérieur du volume. Au contraire, lorsque le coefficient d'absorption est élevé, le rayonnement émis depuis le volume est immédiatement absorbé, y compris au niveau de la frontière. Dans ce cas, le détecteur reçoit un rayonnement tout simplement émis depuis la surface. Par conséquent, le gradient interne de température modifie le facteur d'émission, principalement dans les zones de longueurs d'onde où le matériau est transparent.

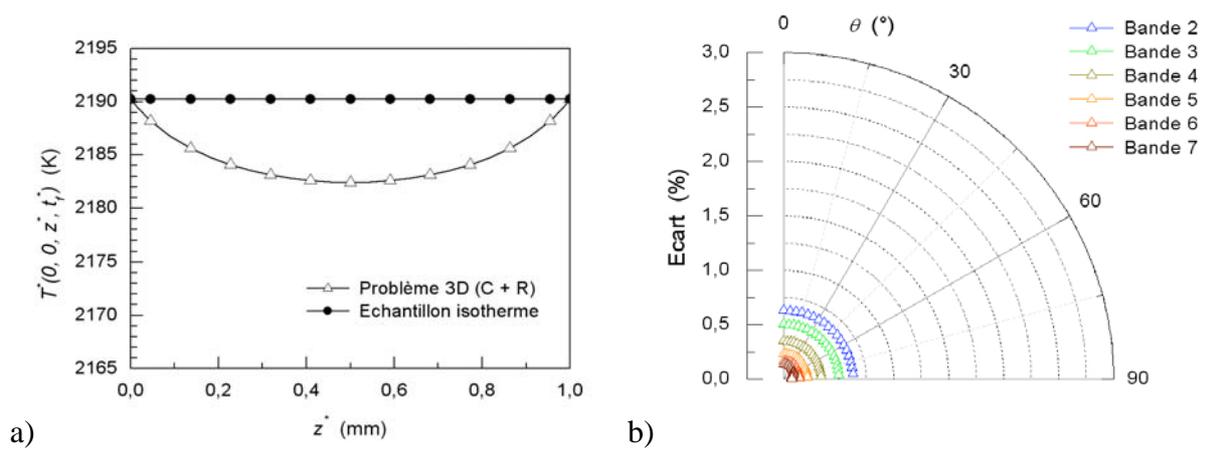
### C.2.1.2 Influence du déséquilibre de flux

Les figures C.2.3-7 montrent le champ de température au sein de l'échantillon ainsi que l'écart commis sur le facteur d'émission lorsque le flux  $Q_{l1}^*$  est régulé sur 95, 90, 85, 80 et 75 % de la valeur de  $Q_{l2}^*$ . La différence de température entre les deux faces augmente au fur et à mesure que  $Q_{l1}^*$  diminue. Cette différence est de 1.5 K lorsque  $Q_{l1}^* = 0.95 Q_{l2}^*$ , et de 8.5 K lorsque  $Q_{l1}^* = 0.75 Q_{l2}^*$ . Le gradient de température interne atteint 12 K lorsque  $Q_{l1}^* = 0.75 Q_{l2}^*$ . L'écart commis pour ce déséquilibre de flux augmente légèrement : la valeur maximum est de 1.1 % pour la bande 2, de 0.8 % pour la bande 3 et inférieur à 0.5 % lorsque  $\lambda \geq 5 \mu\text{m}$  (bandes 4-8). D'après les figures C.2.2-7, le déséquilibre de flux entre les deux canaux ne paraît pas influencer beaucoup le champ de température à l'intérieur de l'échantillon, ni l'écart sur le facteur d'émission. D'un autre côté, le déséquilibre de flux engendre une chute de température de l'échantillon significative. Par exemple, la température moyenne de l'échantillon passe de 2187 K à 2151 K lorsque  $Q_{l1}^* = 0.95 Q_{l2}^*$ , et passe de 2187 K à 2009 K lorsque  $Q_{l1}^* = 0.75 Q_{l2}^*$ , ce qui correspond à une chute de température de l'ordre de 180 K. Cette chute de température n'affecte pas le facteur d'émission qui est défini comme le rapport entre la luminance sortante de l'échantillon à haute température et la luminance sortante d'un corps noir porté à la même température.

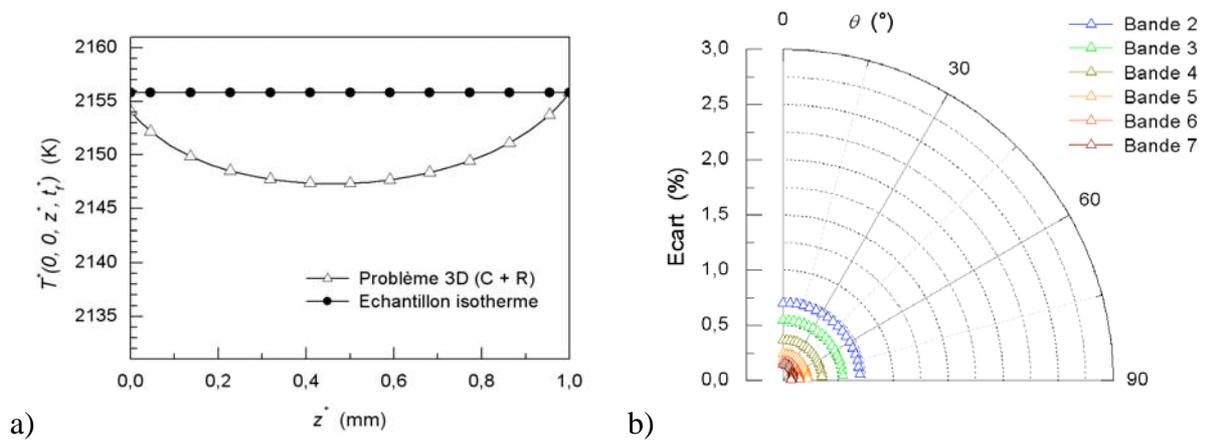
1.1 % étant l'écart maximum relevé pour le facteur d'émission en situation de déséquilibre important de flux entre les deux canaux, l'épaisseur de 1 mm se révèle être tout à fait approprié pour réaliser la mesure de facteur d'émission de matériaux semi-transparents. La simulation est reproduite pour des échantillons de 2 et de 4 mm d'épaisseur.

### C.2.2 Simulation du champ de température interne et du facteur d'émission d'un échantillon d'alumine Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> de 2mm d'épaisseur

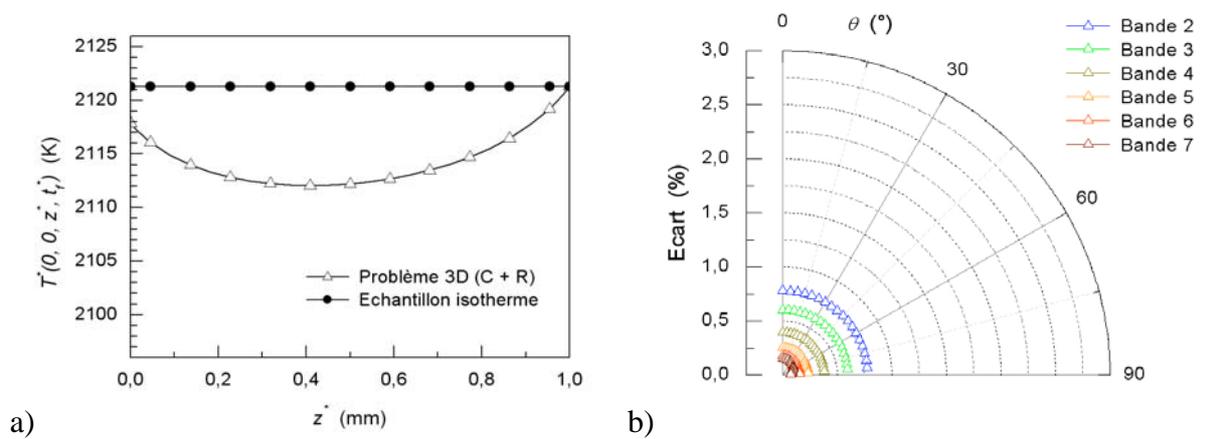
De la même manière que pour l'échantillon de 1 mm d'épaisseur, les influences de la distribution de flux radiatif interne et du déséquilibre de flux laser sur le facteur d'émission sont étudiées en deux parties distinctes. L'étude aboutit à l'évaluation d'un écart commis sur le facteur d'émission prédit. Cet écart varie en fonction des conditions expérimentales.



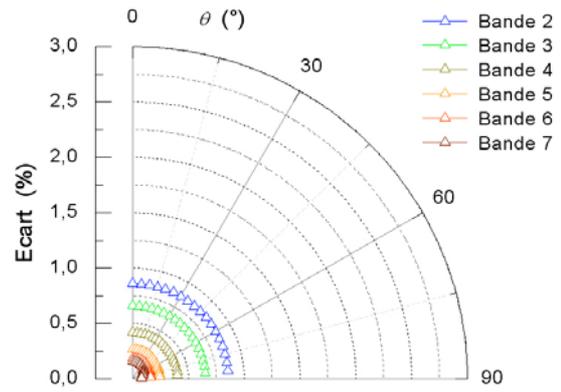
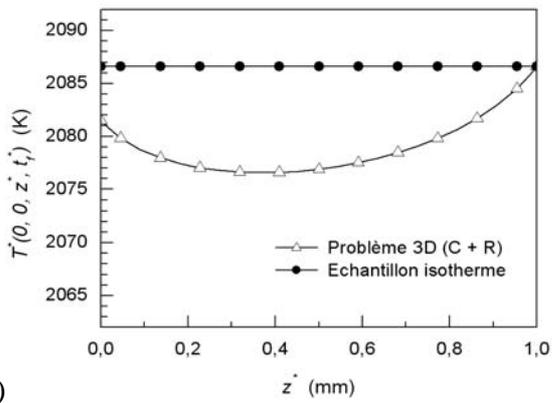
**Figure C.2.2:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 1$  mm.  $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .



**Figure C.2.3:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 1$  mm.  $Q_{11}^* = 0.95 Q_{12}^*$ .



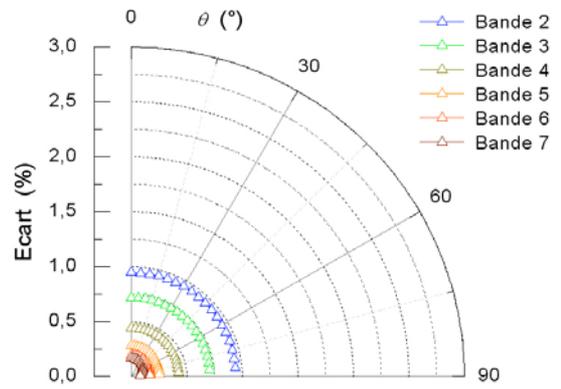
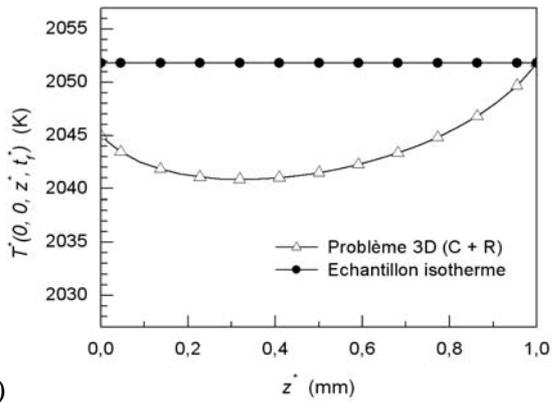
**Figure C.2.4:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 1$  mm.  $Q_{11}^* = 0.90 Q_{12}^*$ .



a)

b)

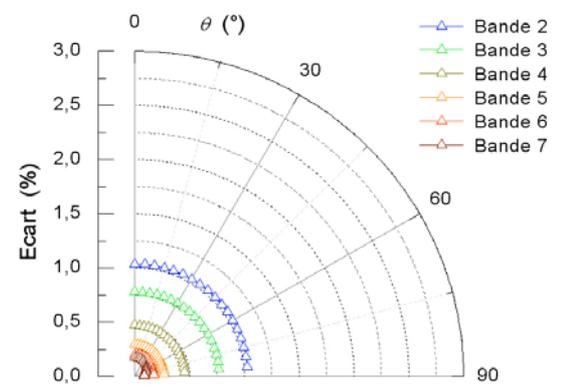
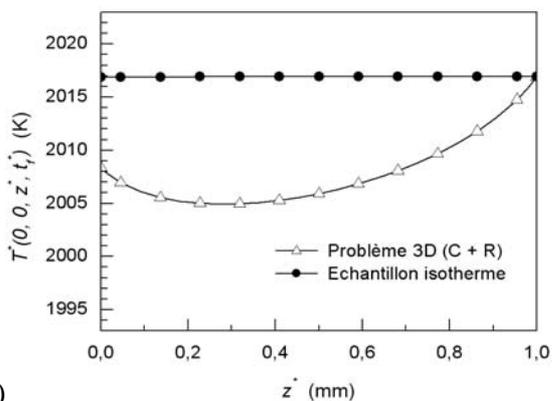
**Figure C.2.5:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et  
 b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine  
 d'épaisseur  $c^* = 1 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$ .



a)

b)

**Figure C.2.6:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et  
 b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine  
 d'épaisseur  $c^* = 1 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$ .



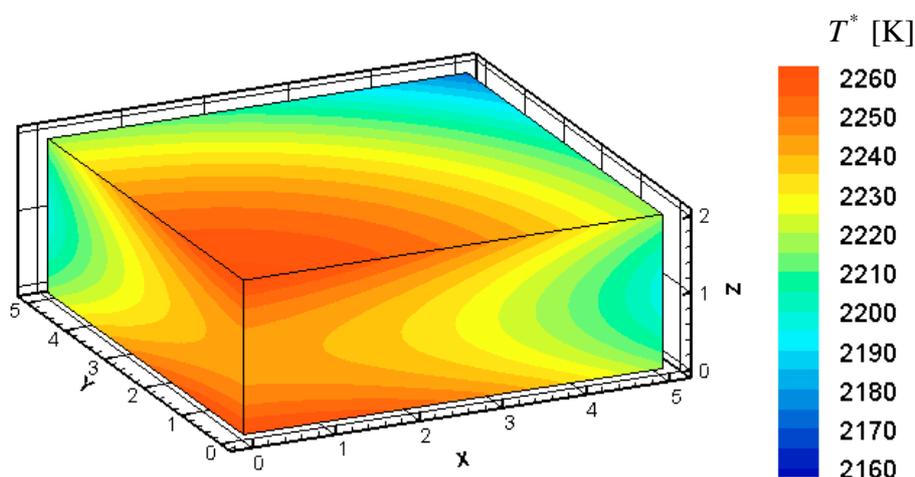
a)

b)

**Figure C.2.7:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et  
 b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine  
 d'épaisseur  $c^* = 1 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$ .

### C.2.2.1 Influence du gradient interne de température

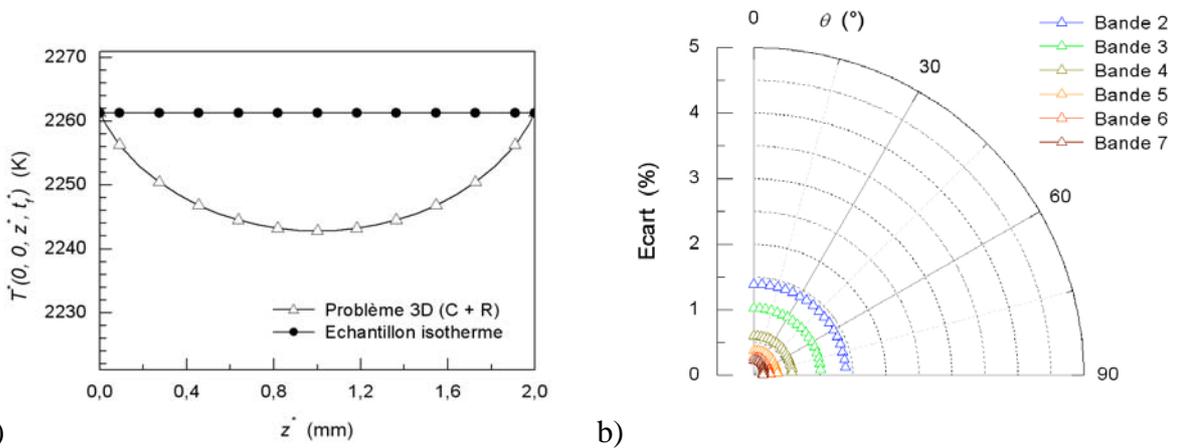
La figure C.2.8 montre le champ de température obtenu pour l'échantillon de 2 mm d'épaisseur, la figure C.2.9.a) montrant le même champ de température simulé le long de l'axe central  $(0, 0, z^*)$ . Le gradient de température interne est obtenu cette fois plus important que celui obtenu pour un échantillon de 1 mm d'épaisseur. Ce gradient est de l'ordre de 19 K et représente environ 0.84 % de la température absolue au point de mesure, qui est de 2261 K. L'écart commis sur le facteur d'émission, présenté en figure C.2.9.b), augmente. Cet écart paraît être proportionnel au gradient de température : sa valeur atteint 1.4 % pour la bande 2, 1 % pour la bande 3 et moins de 0.7 % pour  $\lambda \geq 5 \mu\text{m}$  (bandes 4-8). L'écart est à nouveau réparti de manière isotrope.



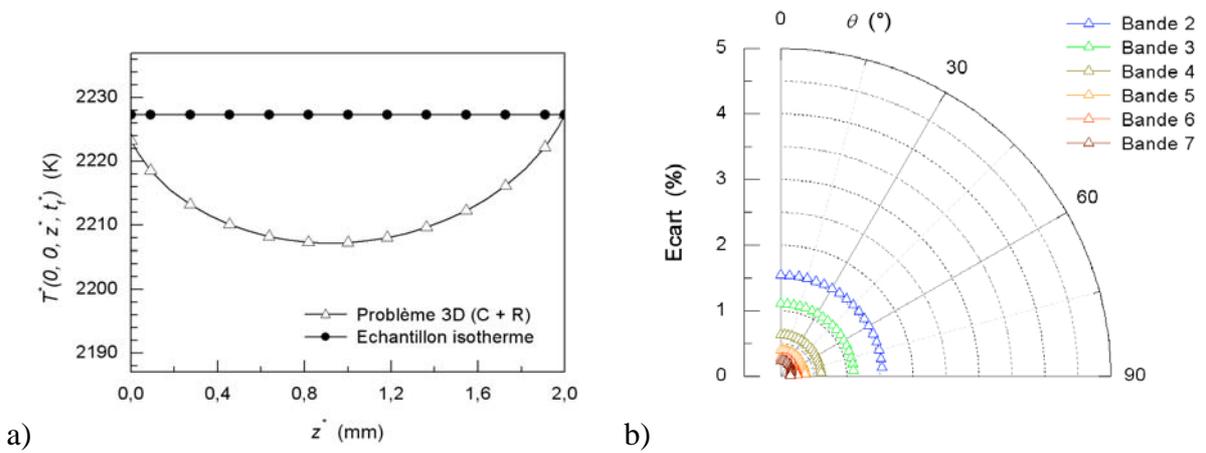
*Figure C.2.8: Champ de température dans un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 2 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .*

### C.2.2.2 Influence du déséquilibre de flux

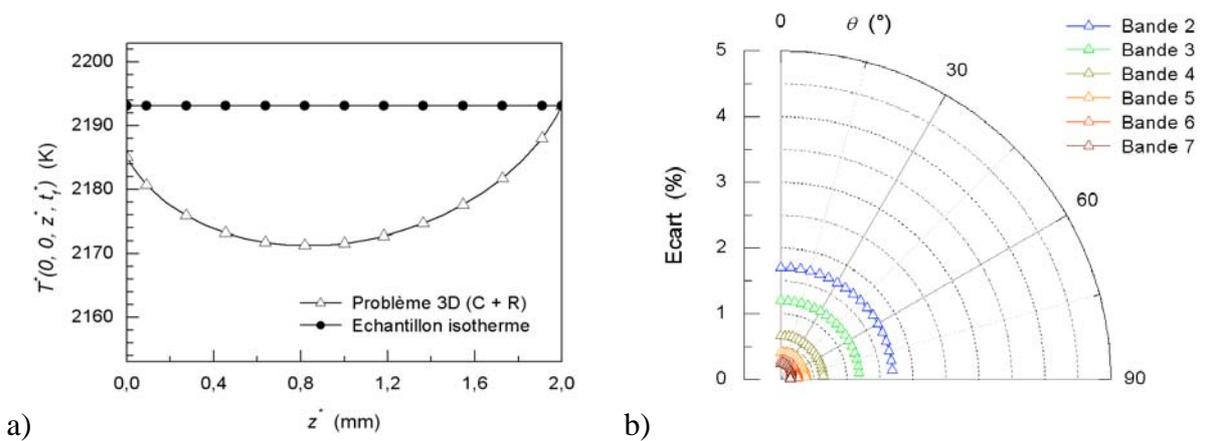
L'effet du déséquilibre de flux sur le facteur d'émission est présenté en figures C.2.10-14. Au fur et à mesure que  $Q_{11}^*$  diminue, le gradient de température interne augmente, élevant l'écart sur le facteur d'émission. Par exemple, la différence de température sur l'axe  $(0, 0, z^*)$  atteint 29 K lorsque  $Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$ , générant un écart de 2.2 % sur le facteur d'émission relatif à la bande 2. Un écart de plus de 2 % ne pouvant plus être négligé, un échantillon de 2 mm doit être utilisé seulement lorsque les flux sur les deux canaux sont parfaitement symétriques.



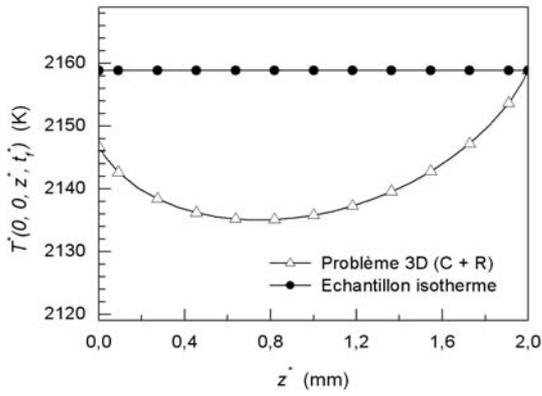
**Figure C.2.9:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 2$  mm.  $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .



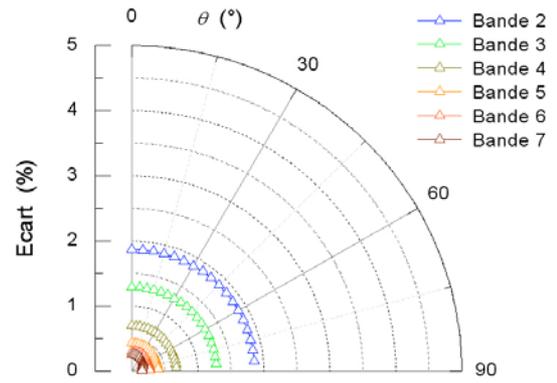
**Figure C.2.10:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 2$  mm.  $Q_{11}^* = 0.95 Q_{12}^*$ .



**Figure C.2.11:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 2$  mm.  $Q_{11}^* = 0.90 Q_{12}^*$ .

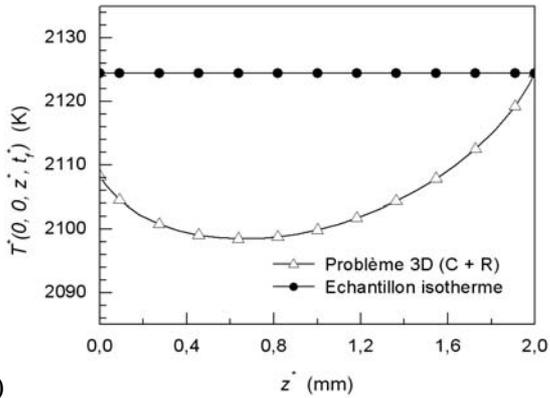


a)

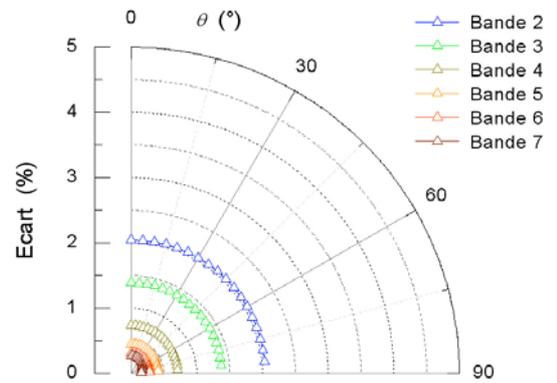


b)

**Figure C.2.12:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 2$  mm.  $Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$ .

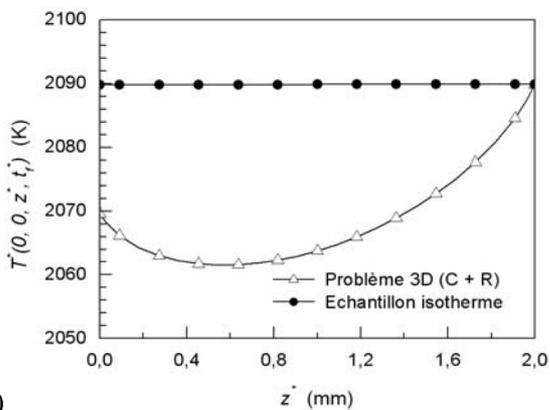


a)

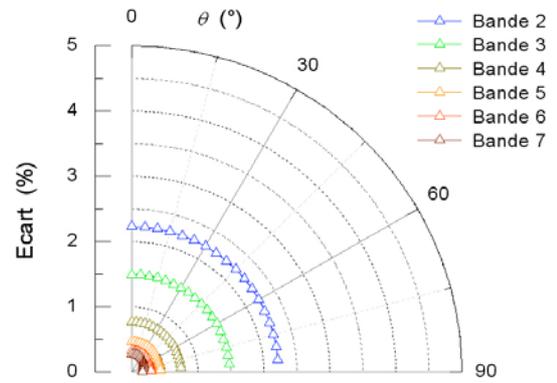


b)

**Figure C.2.13:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 2$  mm.  $Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$ .



a)



b)

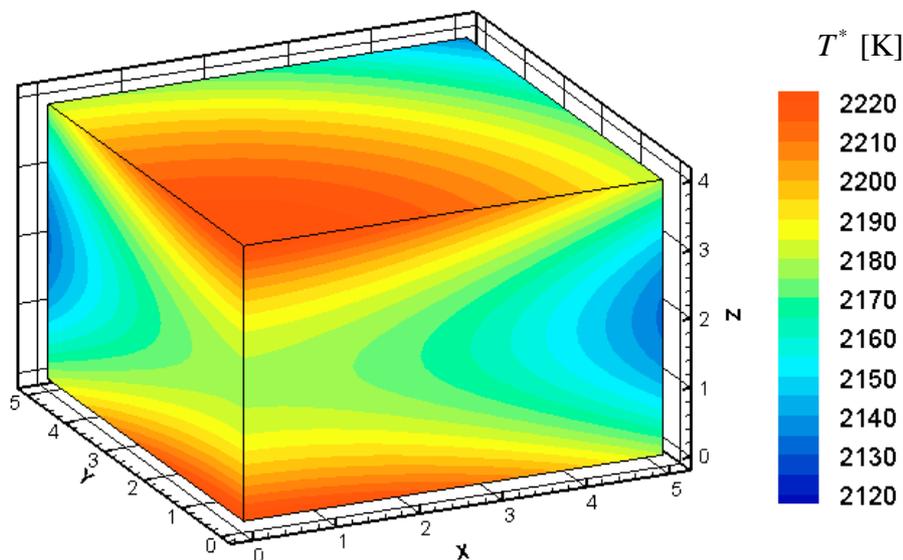
**Figure C.2.14:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 2$  mm.  $Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$ .

### C.2.3 Simulation du champ de température interne et du facteur d'émission d'un échantillon d'alumine Al23 de 4 mm d'épaisseur

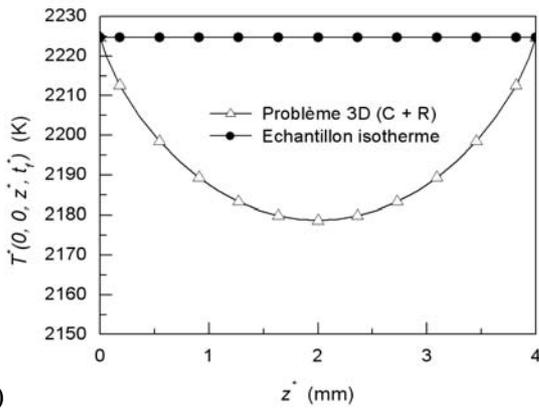
Les influences de la distribution de température interne et du déséquilibre de flux laser sur le facteur d'émission ont été étudiées. Des résultats obtenues et principalement en raison de son épaisseur, il est attendu un fort gradient de température au sein du nouvel échantillon de 4 mm d'épaisseur. Ceci est montré dans le paragraphe suivant.

#### C.2.3.1 Influence du gradient interne de température

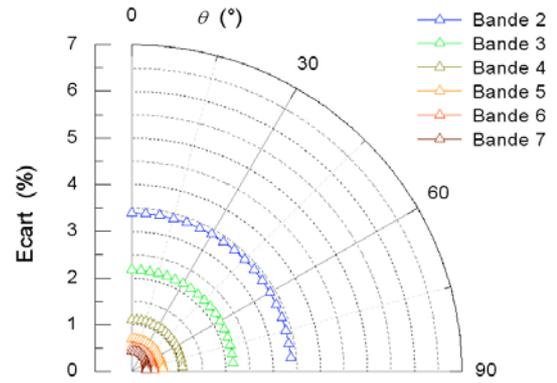
Le champ de température au sein de l'échantillon de 4 mm d'épaisseur est représenté en figure C.2.15 et celui le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$ , en figure C.2.16.a). La différence entre la température interne et la température au contour atteint 48 K, soit 2.1 % de la température absolue au niveau de la position de mesure. Ce gradient de température est capable d'engendrer à lui seul un écart de 3.4 % sur le facteur d'émission dans la bande 2. Dans la bande 3, l'écart obtenu est de 2.2 % et lorsque la longueur d'onde est supérieur à 5  $\mu\text{m}$  (bandes 4-8), cet écart se situe en dessous de 1.2 %.



*Figure C.2.15: Champ de température dans un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 4 \text{ mm}$ .  $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .*

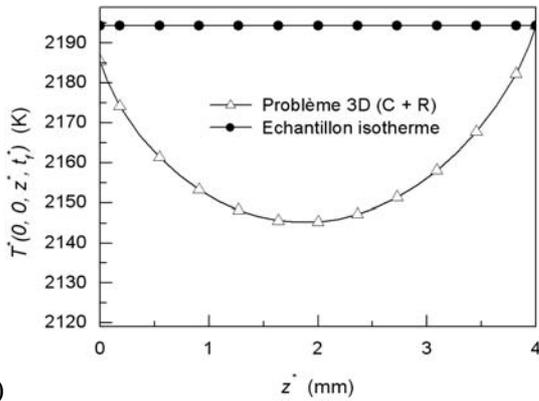


a)

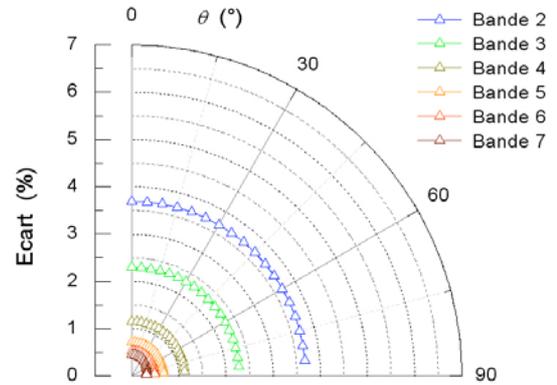


b)

**Figure C.2.16:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 4$  mm.  $Q_{11}^* = Q_{12}^*$ .

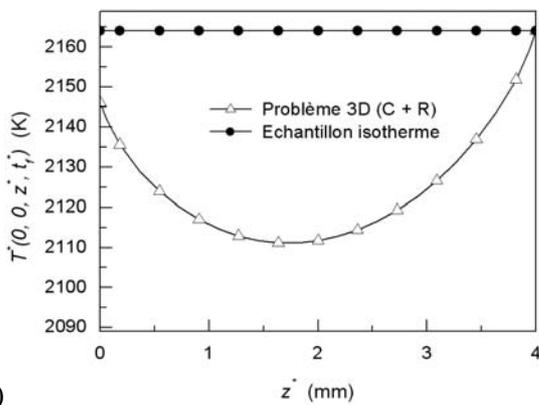


a)

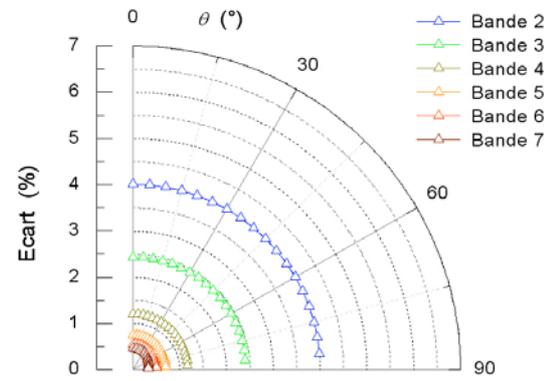


b)

**Figure C.2.17:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 4$  mm.  $Q_{11}^* = 0.95 Q_{12}^*$ .

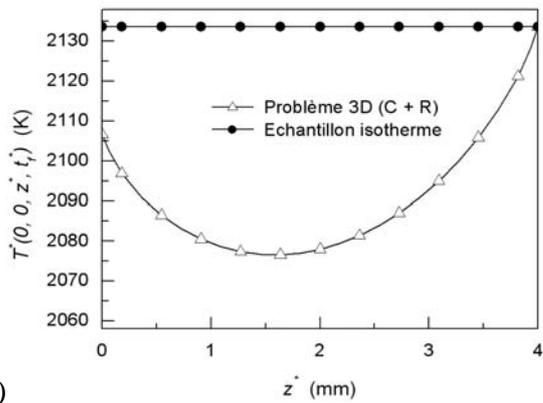


a)

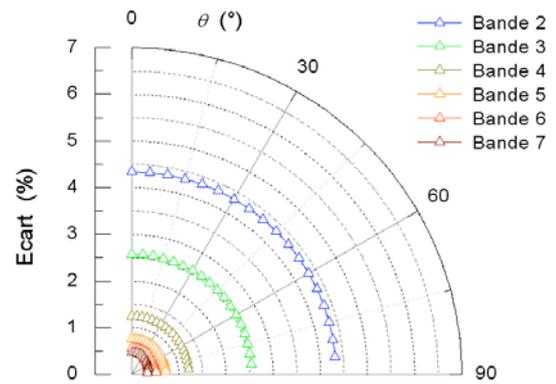


b)

**Figure C.2.18:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 4$  mm.  $Q_{11}^* = 0.90 Q_{12}^*$ .

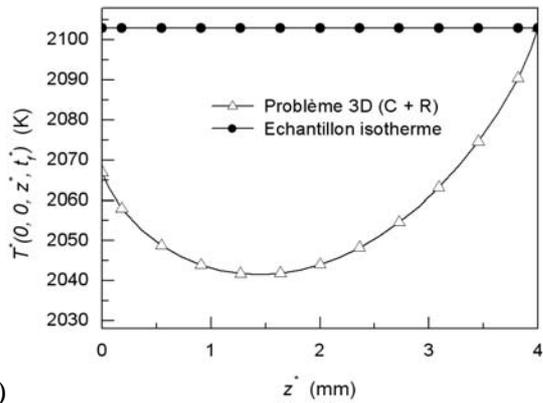


a)

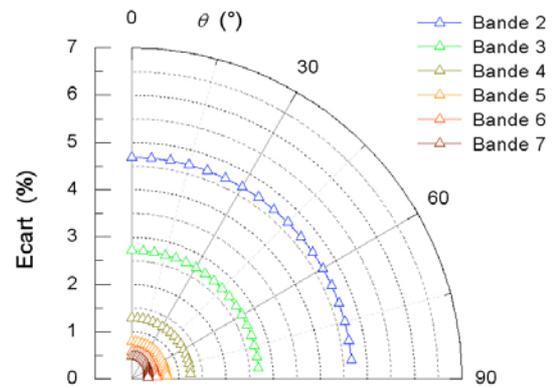


b)

**Figure C.2.19:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 4$  mm.  $Q_{11}^* = 0.85 Q_{12}^*$ .

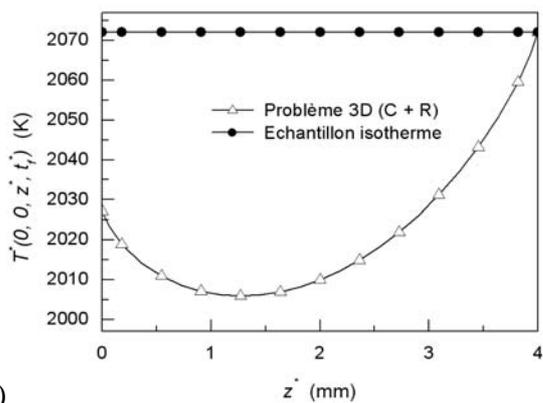


a)

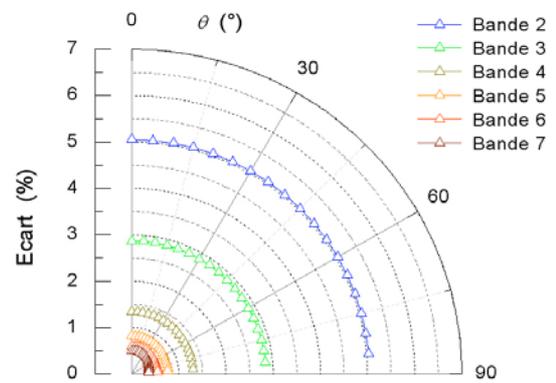


b)

**Figure C.2.20:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 4$  mm.  $Q_{11}^* = 0.80 Q_{12}^*$ .



a)



b)

**Figure C.2.21:** a) Distribution de température le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  et b) écart sur le facteur d'émission d'un échantillon d'alumine d'épaisseur  $c^* = 4$  mm.  $Q_{11}^* = 0.75 Q_{12}^*$ .

### C.2.3.2 Influence du déséquilibre de flux

Dans la situation où  $Q_{11}^*$  et  $Q_{12}^*$  sont choisis différents, la différence de température interne atteint jusqu'à 66 K, comme le montre la figure C.2.21.a). L'écart sur le facteur d'émission augmente, atteignant la valeur non négligeable de 5.1 % pour la bande 2, 2.9 % pour la bande 3 et moins de 1.4 % pour les bandes 4-8. Par conséquent, le gradient de température à l'intérieur de l'échantillon apparaît comme la principale source d'écart sur le facteur d'émission. D'un autre côté, le déséquilibre entre les flux reçus sur les faces principales de l'échantillon se révèle être une source d'erreur sur le gradient interne de température 3 fois moins importante que les pertes de flux radiatif aux frontières, lorsque l'épaisseur de l'échantillon est de 4 mm.

Afin de permettre une meilleure compréhension des résultats donnés en figures C.2.1-21, ces résultats sont classifiés en 3 tableaux relatifs aux échantillons de 1 mm, de 2 mm et de 4 mm d'épaisseur respectivement (cf. tableaux C.2.1-3). En colonne n° 2 les différences de températures observées le long de l'axe  $(0, 0, z^*)$  sont répertoriées pour les déséquilibres de flux simulés. L'écart moyen simulé sur le facteur d'émission spectral est ensuite référencé en fonction des déséquilibres de flux simulés et en fonction des bandes de longueurs d'onde étudiées  $m = 2, \dots, 7$ . Cet écart moyen est toujours proche de l'écart directionnel, ce dernier ayant un comportement isotrope.

La comparaison des écarts simulés sur les trois échantillons d'alumine permet de conclure que l'échantillon de 1 mm d'épaisseur est le plus approprié à la réalisation de la mesure indirecte de facteur d'émission. En raison de sa faible épaisseur géométrique, et par conséquent optique, le rayonnement se distribue de manière plus équitable que lorsque l'épaisseur augmente. L'observation des figures C.2.1-21 permet de montrer que l'augmentation de l'épaisseur des échantillons limite la propagation du rayonnement infrarouge et favorise l'apparition d'un gradient interne de température.

*Tableau C.2.1: Ecart de température interne et écart sur le facteur d'émission simulé pour un échantillon d'alumine d'épaisseur 1 mm.*

Déséquilibre entre les flux	Gradient de température interne	Ecart moyen sur le facteur d'émission $\tilde{\epsilon}_m$ (%)					
		$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
$Q_{i1}^* = Q_{i2}^*$	$\Delta T = 8$ K	0.6	0.5	0.3	0.2	0.2	0.1
$Q_{i1}^* = 0.95 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 8$ K	0.7	0.5	0.4	0.2	0.2	0.1
$Q_{i1}^* = 0.90 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 9$ K	0.8	0.6	0.4	0.2	0.2	0.1
$Q_{i1}^* = 0.85 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 10$ K	0.9	0.7	0.4	0.3	0.2	0.1
$Q_{i1}^* = 0.80 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 11$ K	0.9	0.7	0.4	0.3	0.2	0.2
$Q_{i1}^* = 0.75 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 12$ K	1.0	0.8	0.5	0.3	0.2	0.2

*Tableau C.2.2: Ecart de température interne et écart sur le facteur d'émission simulé pour un échantillon d'alumine d'épaisseur 2 mm.*

Déséquilibre entre les flux	Gradient de température interne	Ecart moyen sur le facteur d'émission $\tilde{\epsilon}_m$ (%)					
		$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
$Q_{i1}^* = Q_{i2}^*$	$\Delta T = 19$ K	1.4	1.0	0.6	0.4	0.3	0.2
$Q_{i1}^* = 0.95 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 20$ K	1.5	1.1	0.6	0.4	0.3	0.2
$Q_{i1}^* = 0.90 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 22$ K	1.7	1.2	0.7	0.4	0.3	0.2
$Q_{i1}^* = 0.85 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 24$ K	1.9	1.3	0.7	0.4	0.3	0.2
$Q_{i1}^* = 0.80 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 26$ K	2.0	1.4	0.7	0.4	0.3	0.3
$Q_{i1}^* = 0.75 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 28$ K	2.2	1.5	0.8	0.5	0.3	0.3

*Tableau C.2.3: Ecart de température interne et écart sur le facteur d'émission simulé pour un échantillon d'alumine d'épaisseur 4 mm.*

Déséquilibre entre les flux	Gradient de température interne	Ecart moyen sur le facteur d'émission $\tilde{\epsilon}_m$ (%)					
		$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
$Q_{i1}^* = Q_{i2}^*$	$\Delta T = 46$ K	3.4	2.2	1.1	0.7	0.5	0.4
$Q_{i1}^* = 0.95 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 49$ K	3.7	2.3	1.1	0.7	0.5	0.4
$Q_{i1}^* = 0.90 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 53$ K	4.0	2.4	1.2	0.7	0.5	0.5
$Q_{i1}^* = 0.85 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 57$ K	4.3	2.6	1.2	0.8	0.6	0.5
$Q_{i1}^* = 0.80 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 61$ K	4.7	2.7	1.3	0.8	0.6	0.5
$Q_{i1}^* = 0.75 Q_{i2}^*$	$\Delta T = 66$ K	5.0	2.9	1.3	0.8	0.6	0.5