

## **3. TURBULÊNCIA E DISPERSÃO DE CONTAMINANTES NA CAMADA LIMITE PLANETÁRIA**

**Gervásio A. Degrazia**

Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Física, Santa Maria, RS.

degrazia@ccne.ufsm.br

**Antonio G. O. Goulart**

Universidade Federal de Santa Maria, Programa de Pós-Graduação em Física, Santa Maria, RS.

agoulart@urisan.tche.br

### **3.1 Introdução**

Inicialmente, considera-se neste capítulo um campo turbulento geofísico caracterizado por um número de Reynolds muito elevado ( $Re \approx 10^7$ ). Em um período de vinte e quatro horas este tipo de turbulência é um fenômeno predominante na Camada Limite Planetária Atmosférica (CLP). Neste particular estado de um sistema físico, onde todas as simetrias possíveis permitidas pelas equações de conservação (e as condições de contorno) são recuperadas em um senso estatístico, a turbulência pode ser considerada completamente desenvolvida.

No estudo da dispersão em um campo turbulento bem desenvolvido, é importante discutir o conceito de partícula de fluido. Por partícula de fluido entende-se um volume de controle muito pequeno (do campo de escoamento turbulento), com dimensões características muito maiores do que as escalas espaciais moleculares, porém com dimensões menores do que a microescala de Kolmogorov. O meio contínuo formando tal partícula de fluido permanece intacto no mínimo durante um intervalo de tempo suficientemente grande comparado ao intervalo de tempo associado ao processo de transporte turbulento. Qualquer troca com o seu ambiente é de natureza puramente molecular. A dimensão da partícula de fluido implica que ela pode ser observada como parte do fluido contínuo e responde a todas as escalas do movimento turbulento. A dispersão turbulenta é distinta da difusão molecular por duas razões:

Em primeiro lugar, as interações intensivas entre as partículas de fluido promovem uma troca contínua da propriedade que está sendo transferida; em segundo, existe uma correlação temporal entre as propriedades de uma partícula de fluido em instantes subseqüentes. Um dos objetivos deste capítulo é apresentar e discutir algumas características gerais da turbulência bem desenvolvida. A análise considerada é baseada em hipóteses plausíveis, observadas experimentalmente, e que foram expressas matematicamente por Kolmogorov. Características fenomenológicas (associadas a uma turbulência bem desenvolvida), conhecidas como auto-similaridade, invariância de escala,

interações locais e o espectro de energia turbulenta serão assumidas e utilizadas na derivação de parâmetros turbulentos. Com base nestas discussões e no modelo de difusão estatístico de Taylor deriva-se, como um exemplo, coeficientes de difusão turbulentos para uma Camada Limite Convectiva (CLC).

Adicionalmente, estuda-se neste capítulo dois fenômenos particulares associados à turbulência e que influenciam freqüentemente a dispersão de contaminantes na CLP. Um destes fenômenos diz respeito ao decaimento da turbulência na CLC. Este processo dinâmico, que ocorre no período de transição dia-noite é responsável, durante o período de aproximadamente uma hora, pela presença de turbulência na Camada Residual (CR). Muitas fontes de contaminantes (chaminés) são localizadas nestas CR e, conseqüentemente, estimar a magnitude da dispersão neste ambiente de turbulência decaindo é de fundamental importância na escolha de parametrizações dos termos turbulentos presentes em modelos matemáticos analíticos e numéricos de poluição do ar.

O segundo fenômeno ocorre em situações caracterizadas por velocidades baixas do vento horizontal médio. Nestas situações de vento calmo, a direção de transporte dos contaminantes liberados por fontes pontuais contínuas (chaminés) não pode ser simulada com satisfatória precisão e desta forma os modelos de dispersão tradicionais, baseados na equação de difusão-advecção, não podem ser aplicados para calcular a concentração de poluentes na CLP. Responsável por esta indeterminação na direção da pluma de contaminantes são oscilações de baixa freqüência na direção do vento horizontal. Uma vez que este fenômeno ocorre com bastante freqüência em todas as épocas do ano (e principalmente a noite) compreendê-lo e descrevê-lo é de fundamental importância na modelagem do transporte e da difusão de contaminantes na baixa atmosfera. Partindo-se da hipótese fundamental que as equações de Navier-Stokes (N-S) descrevem a multitude de fenômenos associados à turbulência, a investigação de ambos os fenômenos (turbulência decaindo na CLC e oscilações de baixa freqüência na direção do vento horizontal) será realizada empregando-se estas equações de conservação. No caso de decaimento da CLC empregam-se as equações de N-S na derivação de coeficientes de difusão turbulentos. No caso de calma de vento utilizam-se as equações de N-S na explicação e descrição das oscilações na direção do vento horizontal.

## **3.2 Derivação de parâmetros de dispersão para uma turbulência não-homogênea na CLP**

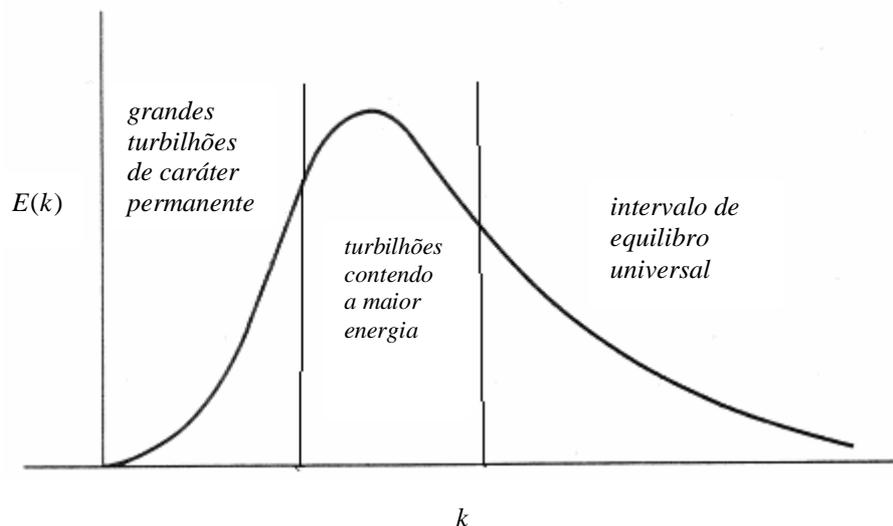
### **3.2.1 O espectro de energia turbulenta**

Devido à complexidade do campo turbulento, que pelo efeito da não linearidade do fenômeno possui um intervalo de escalas de movimento todas acopladas entre si, faz-se necessário o desenvolvimento de uma parametrização que permita modelar este estado caracterizado por um número gigantesco de graus de liberdade. Em um senso, uma parametrização significa uma

representação idealizada (baseada em argumentos heurísticos) do fenômeno de transporte turbulento. Neste sentido, quando parametriza-se os processos de troca turbulenta introduz-se nas equações, que descrevem as leis de conservação (modelos físicos), relações matemáticas aproximadas, que em princípio, são usadas como substitutas dos termos desconhecidos presentes no fenômeno natural.

A confiabilidade de cada modelo depende fortemente da maneira na qual os parâmetros turbulentos são calculados e relacionados à compreensão da física da CLP. O ingrediente fundamental na obtenção destes parâmetros turbulentos, que são formulados a partir de uma fenomenologia aplicada em uma turbulência bem desenvolvida, reside na seleção (escolha) de escalas típicas de velocidade e comprimento.

Neste aspecto, o comportamento observado do espectro de energia turbulenta pode auxiliar decisivamente na determinação destas escalas típicas. A forma geral do espectro de energia de uma turbulência bem desenvolvida é representada na figura abaixo.



**Figura 1** – Forma do espectro de energia para uma turbulência bem desenvolvida.

*Grandes Turbilhões de caráter permanente:* São os maiores turbilhões de caráter permanente que não possuem a maior parcela da energia turbulenta total.

*Turbilhões contendo a energia principal:* Turbilhões que possuem a maior parcela da energia turbulenta total; influenciam fortemente o processo dispersivo e, como conseqüência, na parametrização dos fluxos turbulentos será importante obter uma escala de comprimento “ $\ell_e$ ” em termos das características destes turbilhões mais energéticos.

*Intervalo inercial:* neste intervalo os turbilhões não mudam a sua energia, porém a quantidade de energia transferida através dos turbilhões é grande. A dissipação é desprezível em confronto com o fluxo de energia transferido por efeitos inerciais.

*Intervalo de equilíbrio universal:* o caráter da turbulência, nestes números de onda, é inteiramente determinado pelo fluxo de energia e pela razão de dissipação “ $\varepsilon$ ”, onde  $\varepsilon$  é a dissipação média de energia por unidade de tempo e por unidade de massa do fluido. O fluxo de energia mais a dissipação é igual à energia total fornecida para este intervalo. Da forma do espectro observa-se que esta energia é proveniente dos turbilhões que possuem o maior conteúdo de energia. Desta maneira, embora a dissipação é provocada pela viscosidade a ordem de magnitude de  $\varepsilon$  é determinada apenas por aquelas quantidades que caracterizam os turbilhões mais energéticos.

### 3.2.2 Grandezas caracterizando o processo de dispersão

Do ponto de vista fenomenológico e descritivo, identifica-se um fluxo turbulento como constituído por uma superposição de turbilhões. Todos estes turbilhões, que compõem o movimento turbulento, possuem uma certa energia cinética quantificada pela magnitude das flutuações de velocidade associadas a certas frequências. Estes turbilhões interagem continuamente com os mecanismos geradores da turbulência (os forçantes), dos quais eles extraem a sua energia, e também uns com os outros. Uma questão interessante, que diz respeito à descrição física da turbulência, pode ser colocada da seguinte maneira: Como a energia cinética é distribuída entre as várias escalas (frequências) do movimento turbulento? Do ponto de vista prático, torna-se fundamental a identificação das escalas (frequências) associadas aos turbilhões contendo a energia principal do fluxo turbulento (os turbilhões mais energéticos). Estes particulares vórtices possuem a maioria da energia cinética e são responsáveis pelo transporte de espécies escalares e vetoriais na CLP. Neste contexto será usada a transformada integral de Fourier e a teoria da difusão estatística de Taylor (TDET) para derivar a partir do espectro de energia cinética, grandezas que expressam a capacidade de dispersão de uma turbulência bem desenvolvida.

Inicialmente se deve dizer que um espectro mede a distribuição da variância de uma certa quantidade entre as diferentes frequências ou comprimentos de onda. Se a variável é uma componente da velocidade turbulenta de uma partícula de fluido, o espectro descreve a distribuição da energia cinética entre as distintas frequências.

Uma transformada de Fourier é um tipo de transformada integral que pode representar um estado de um sistema com um número infinito de graus de liberdade por um conjunto contínuo de frequências. Usando-se este tipo de transformada pode-se definir

$$\Phi_{L_i}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{L_i}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (1)$$

com  $i = u, v, w$ , onde a transformada inversa será a seguinte função de auto-correlação:

$$R_{L_i}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{L_i}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (2)$$

ou

$$R_{L_i}(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{L_i}(\omega) d\omega$$

de modo que  $\Phi_{L_i}(\omega)$  mostra como a energia cinética turbulenta é distribuída com respeito a frequência  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$ , onde  $T$  é o período de uma oscilação senoidal e  $n$  é a frequência em Hertz.

As equações (1) e (2) definem o teorema de Wiener-Khinchin e estabelecem um resultado fundamental que relaciona a transformada de Fourier da função de autocorrelação com o espectro de energia.

Considerando-se a turbulência estacionária, pode-se escrever  $R_{L_i}(\tau) = R_{L_i}(-\tau)$ ; isto é,  $R_{L_i}(\tau)$  é uma função par. Desta propriedade e da equação (1) obtém-se:

$\Phi_{L_i}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{L_i}(\tau) (\cos \omega\tau + \sin \omega\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_{L_i}(\tau) \cos \omega\tau d\tau$  desde que  $\sin \omega\tau$  é uma função ímpar. Isto mostra que  $\Phi_{L_i}(\omega) = \Phi_{L_i}(-\omega)$ , de modo que

$$R_{L_i}(\tau) = \int_0^{\infty} \Phi_{L_i}(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

e

$$R_{L_i}(0) = \int_0^{\infty} \Phi_{L_i}(\omega) d\omega.$$

A transformada de  $R_{L_i}(\tau)$ , a saber  $\Phi_{L_i}(\omega)$ , é chamada a Função Densidade Espectral de Energia em analogia com o espectro de luz estudado na Física. O produto  $\Phi_{L_i}(\omega)d\omega$  é a contribuição para a variância feita por flutuações no intervalo de largura  $d\omega$  centrado em  $\omega$ . Agora, mudando de frequência  $\omega$ , expressa em radianos por segundo, para frequência  $n = \frac{\omega}{2\pi}$ , expressa em ciclos por segundo, uma nova densidade espectral  $S_{L_i}(n) = 2\pi \Phi_{L_i}(2\pi n)$  pode ser introduzida, de modo que

$$R_{L_i}(\tau) = \int_0^{\infty} \Phi_{L_i}(2\pi n) \cos(2\pi n\tau) 2\pi dn = \int_0^{\infty} S_{L_i}(n) \cos(2\pi n\tau) dn \quad (3)$$

Para  $\tau = 0$ , a equação acima torna-se

$$\sigma_i^2 = R_{L_i}(0) = 2\pi \int_0^{\infty} \Phi_{L_i}(2\pi n) dn = \int_0^{\infty} S_{L_i}(n) dn \quad (4)$$

onde  $\sigma_i^2 = \overline{v_i^2}$  é a variância de uma componente da velocidade turbulenta. Isto confirma que duas vezes a energia cinética por unidade de massa é obtida se o espectro é integrado sobre todas as frequências.

Por outro lado, em termos da frequência  $n$ , pode-se escrever

$$2\pi \Phi_{L_i}(2\pi n) = 4 \int_0^{\infty} R_{L_i}(\tau) \cos 2\pi n \tau \, d\tau$$

e resulta em

$$S_{L_i}(n) = 4 \int_0^{\infty} R_{L_i}(\tau) \cos 2\pi n \tau \, d\tau \quad (5)$$

Definindo-se a função de autocorrelação como

$$R_{L_i}(\tau) = \overline{v_i(t') v_i(t'+\tau)} = \overline{v_i^2} \rho_{L_i}(\tau) \quad (6)$$

e a escala de tempo integral Lagrangeana

$$T_{L_i} = \int_0^{\infty} \rho_{L_i}(\tau) \, d\tau \quad (7)$$

Conclui-se que para  $n = 0$

$$S_{L_i}(0) = 4 \int_0^{\infty} R_{L_i}(\tau) \, d\tau = 4 \overline{v_i^2} T_{L_i} \quad (8)$$

O produto  $\overline{v_i^2} T_{L_i}$  é um coeficiente de difusão turbulento expresso aqui pelo espectro de energia calculado na frequência  $n \rightarrow 0$ , ou seja, em termos dos grandes turbilhões. Esta consideração ergue a questão de como as diferentes frequências contribuem para a difusão turbulenta de partículas de fluido. De modo a responder esta questão apresenta-se o modelo de difusão de Taylor, que expressa o parâmetro de dispersão turbulenta generalizado em termos da variância e da função de autocorrelação na seguinte forma:

$$\overline{X_i^2} = 2 \overline{v_i^2} \int_0^t (t - \tau) \rho_{L_i}(\tau) \, d\tau \quad (9)$$

Substituindo-se  $\rho_{L_i}(\tau)$  em (9) por sua transformada de Fourier (3), resulta

$$\begin{aligned} \overline{X_i^2} &= 2 \overline{v_i^2} \int_0^t (t - \tau) \left[ \int_0^{\infty} F_{L_i}(n) \cos 2\pi n \tau \, dn \right] d\tau \\ \overline{X_i^2} &= 2 \overline{v_i^2} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^t (t - \tau) \cos 2\pi n \tau \, d\tau \right] F_{L_i}(n) \, dn \\ \overline{X_i^2} &= \overline{v_i^2} \int_0^{\infty} F_{L_i}(n) \left[ \frac{1 - \cos 2\pi n t}{2(n\pi)^2} \right] dn \\ \overline{X_i^2} &= \overline{v_i^2} t^2 \int_0^{\infty} F_{L_i}(n) \frac{\sin^2(n\pi t)}{(n\pi t)^2} dn \end{aligned} \quad (10)$$

onde  $F_{L_i}(n) = \frac{S_{L_i}(n)}{v_i^2}$ , é o espectro de energia Lagrangeano normalizado pela variância da

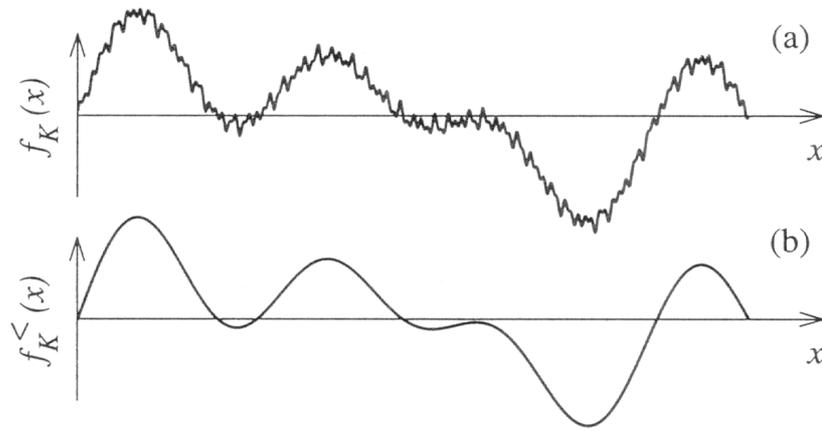
velocidade. A quantidade  $\frac{\sin^2(n\pi t)}{(n\pi t)^2}$  a medida que o tempo passa age como um filtro passa-baixa,

ou seja, ele remove ou atenua altos harmônicos na nossa decomposição de Fourier. Define-se um operador filtro passa-baixa como (Frisch, 1995)

$$P_k : f(\vec{r}) \rightarrow f_k^<(\vec{r})$$

Este operador elimina todas as componentes de Fourier com números de onda maiores que  $k$ , onde

$$\ell = k^{-1}.$$



**Figura 2** – (a) Um sinal com altos e baixos harmônicos. (b) Um sinal onde os altos harmônicos foram removidos. Extraído do livro *Turbulence* (Frisch, 1995).

A equação (10) possui o seguinte significado: para um intervalo de tempo curto após o instante de liberação da partícula de fluido, todas as escalas (altas e baixas frequências) contribuem para o crescimento de  $\overline{X_i^2}$ ; a medida que o tempo de difusão aumenta o filtro passa-baixa remove ou atenua as altas frequências na decomposição espectral de Fourier; altas frequências progressivamente perdem a habilidade de expandir  $\overline{X_i^2}$ .

Uma formulação de grande aplicação em diferentes modelos de dispersão pode ser obtida quando se deriva em relação ao tempo a relação (10). Neste caso obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \overline{X_i^2} \right) &= \frac{\overline{v_i^2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{F_{L_i}(n) \sin(n\pi t) \cos(n\pi t)}{n} dn = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\overline{v_i^2}}{\pi} \int_0^\infty F_{L_i}(n) \frac{\sin(2n\pi t)}{n} dn \end{aligned} \quad (11)$$

Ainda mais interessante é analisar o comportamento de (11) quando  $t \rightarrow \infty$ . Desta forma, considerando-se que  $F_{L_i}(n)$  e  $\sin(2n\pi t)/n$  são funções pares de  $n$  (11) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \overline{X_i^2} \right) = \frac{\overline{v_i^2}}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{L_i}(n) \sin(2n\pi t)}{\pi n} dn$$

Definindo-se  $g = 2\pi n$ , a equação acima pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \overline{X_i^2} \right) = \frac{\overline{v_i^2}}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{L_i} \left( \frac{g}{2\pi} \right) \sin(gt)}{\pi g} dg$$

Introduzindo-se o limite para  $t \rightarrow \infty$  pode-se escrever

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \overline{X_i^2} \right) = \frac{\overline{v_i^2}}{4} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{L_i} \left( \frac{g}{2\pi} \right) \sin(gt)}{\pi g} dg$$

Assumindo-se que as condições necessárias para a troca entre o limite e a operação de integração são preenchidas, resulta:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \overline{X_i^2} \right) = \frac{\overline{v_i^2}}{4} \int_{-\infty}^{\infty} F_{L_i} \left( \frac{g}{2\pi} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(gt)}{\pi g} dg$$

lembrando-se que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(gt)}{\pi g}$  é uma representação bem conhecida da função delta de Dirac

obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \overline{X_i^2} \right) &= \frac{\overline{v_i^2}}{4} \int_{-\infty}^{\infty} F_{L_i} \left( \frac{g}{2\pi} \right) \delta(g) dg \\ &= \frac{\overline{v_i^2} F_{L_i}(0)}{4} \end{aligned} \quad (12)$$

onde  $\delta(g)$  é a função delta de Dirac.

A fórmula (12) representa uma parametrização para os coeficientes de difusão turbulentos em termos do espectro de energia na origem. Neste caso pode-se escrever  $K_\alpha = \frac{\overline{v_i^2} F_{L_i}(0)}{4}$ , com  $\alpha = x, y, z$  em termos das características dos turbilhões mais energéticos.

Considerando-se agora

$$K_\alpha = \frac{\overline{v_i^2} F_{L_i}(0)}{4} = \overline{v_i^2} T_{L_i} \quad (13)$$

resulta

$$T_{L_i} = \frac{F_{L_i}(0)}{4} \quad \text{e} \quad L_i = \frac{\sqrt{v_i^2} F_{L_i}(0)}{4} \quad (14)$$

onde  $T_{L_i}$  e  $L_i$  são escalas de tempo e comprimento características para uma turbulência bem desenvolvida.

As relações acima mostram que os diferentes parâmetros, que quantificam o processo de dispersão, são expressos em termos do espectro de energia turbulenta. As fórmulas de parametrização apresentadas acima, aliadas a suposição de interação local entre turbilhões de escalas próximas, permite capturar os efeitos físicos dos turbilhões mais energéticos gerados pela turbulência mecânica e convectiva.

### 3.2.3 Relações entre estatísticas Eulerianas e Lagrangeanas

O espectro e a função de autocorrelação nas equações acima são descritas em um sistema de referência Lagrangeana. Em uma descrição Lagrangeana investiga-se a posição  $(x, y, z)$  de uma partícula de fluido em um tempo  $t$  relativo a sua posição  $(x_0, y_0, z_0)$  em um tempo de referência inicial  $t_0$  (Rodean, 1996). Como na prática este tipo de observação é difícil de ser realizada, os parâmetros estatísticos turbulentos são quase sempre medidos em um sistema de referência Euleriano, ou seja, em uma posição fixa no espaço, por exemplo, um anemômetro instalado em uma torre micrometeorológica.

Em problemas de dispersão turbulenta descreve-se o processo de difusão Lagrangeana em termos de medidas Eulerianas. Desta maneira, uma questão fundamental em problemas de turbulência é o estabelecimento de relações entre os sistemas de referência Euleriano e Lagrangeano (Hanna, 1982).

Em um campo turbulento homogêneo e estacionário as variâncias das velocidades Eulerianas e Lagrangeanas são consideradas idênticas (Corrsin, 1963). Esta hipótese é normalmente feita e baseia-se no fato da energia cinética turbulenta (uma grandeza escalar) ser a mesma para ambos sistemas de referência. Diferentemente, os espectros de energia ou as funções de autocorrelação Eulerianas ou Lagrangeanas diferem sistematicamente uns dos outros. Na atmosfera, uma vez que os traçadores seguem o movimento do ar de um modo imperfeito, é quase impossível obter séries ideais de medidas Lagrangeanas. Geralmente, velocidades de partículas seguindo o escoamento turbulento (referencial Lagrangeano), variam de um modo mais lento do que as velocidades medidas por um instrumento fixo (referencial Euleriano), e, como consequência, séries temporais Eulerianas flutuam mais frequentemente com o tempo do que as séries Lagrangeanas. Com isto, espectros Lagrangeanos são representados em frequências mais baixas em relação aos espectros Eulerianos.

Uma hipótese muito útil proposta por Gifford (1955) e Hay e Pasquill (1959) assume que as funções de autocorrelação são similares na forma, porém são deslocadas por um fator de escala  $\beta_i$ . Pelo teorema de Wiener-Khinchin a mesma suposição é válida para os espectros de energia. Do ponto de vista matemático, esta hipótese pode ser expressa na seguinte forma:

$$\rho_i(\tau) = \rho_{L_i}(\beta_i\tau) \quad (15)$$

onde  $\rho_i(\tau)$  é o coeficiente de autocorrelação Euleriano e  $\beta_i$  é o fator de escala associado à componente  $i$  da velocidade definido formalmente como a razão entre as escalas de tempo integral Lagrangeana e Euleriana, ou seja,

$$\beta_i = \frac{T_{L_i}}{T_i} \quad (16)$$

onde  $T_i$  é a escala de tempo integral Euleriana.

A relação entre os espectros Lagrangeanos e Eulerianos pode ser descoberta considerando-se a seguinte expressão (eq.5),

$$F_i(n) = 4 \int_0^{\infty} \rho_i(\tau) \cos(2\pi n\tau) d\tau \quad (17)$$

onde  $F_i(n)$  é o espectro Euleriano normalizado por  $\sigma_i^2$ .

A substituição de (15) na equação (17) resulta

$$F_{L_i}(n) = 4\beta_i \int_0^{\infty} \rho_{L_i}(\beta_i\tau) \cos(2\pi n\beta_i\tau) d\tau \quad (18)$$

Uma comparação entre (17) e (18) permite escrever

$$nF_{L_i}(n) = \beta_i n F_i(\beta_i n) \quad (19)$$

Substituindo-se (19) nas relações (10) e (11) resulta, respectivamente

$$\sigma_\alpha^2(t) = \overline{X_i^2}(t) = \frac{\sigma_i^2 \beta_i^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} F_i(n) \frac{\text{sen}^2(2\pi n t / \beta_i)}{n^2} dn \quad (20)$$

$$K_\alpha(t) = \frac{1}{2} \frac{d \overline{X_i^2}}{dt} = \frac{\sigma_i^2 \beta_i}{2\pi} \int_0^{\infty} F_i(n) \frac{\text{sen}(2\pi n t / \beta_i)}{n} dn \quad (21)$$

As equações (20) e (21) apesar de conterem um espectro de energia Euleriano são escritas em termos do parâmetro  $\beta_i$  e desta forma elas descrevem as variâncias espaciais e os coeficientes de dispersão turbulenta de uma perspectiva Lagrangeana. As formulações assintóticas (13) e (14), expressas como funções das propriedades locais da turbulência (não apresentam memória das condições iniciais), podem agora ser escritas em termos do parâmetro  $\beta_i$  nas seguintes formas:

$$K_\alpha = \frac{\sigma_i^2 \beta_i F_i(0)}{4} \quad (22)$$

e

$$T_{L_i} = \frac{\beta_i F_i(0)}{4} \qquad L_i = \frac{\sigma_i F_i(0)}{4} \qquad (23)$$

As equações (20), (21), (22) e (23) mostram que o conhecimento do espectro de energia Euleriano (que pode ser medido por um anemômetro sônico), aliado à uma relação descrevendo o fator de escala  $\beta_i$  é suficiente para se quantificar a magnitude da dispersão turbulenta na CLP.

Além do mais, a dependência com a altura contida no espectro de energia observado permite descrever a turbulência não-homogênea existente na CLP. Isto significa, que para as diferentes alturas as características dos turbilhões mais energéticos estarão contidas nas expressões para  $K_\alpha(z, t)$  (eq.21),  $K_\alpha(z)$  (eq.22),  $T_{L_i}(z)$  (eq.23),  $L_i(z)$  (eq.23). Com os espectros turbulentos unidimensionais variando com a altura a TDET pode então ser aplicada na descrição de uma turbulência não-homogênea.

### 3.2.4 Uma formulação heurística para o fator de escala $\beta_i$

No subintervalo inercial do espectro de energia, a dinâmica da turbulência é dominada pelos termos de inércia presentes na equação de Navier-Stokes. Neste subintervalo, onde os turbilhões são pequenos quando comparados aos turbilhões mais energéticos, a energia não entra no sistema e nem é dissipada por ação da viscosidade. Ela é simplesmente transmitida em uma razão  $\varepsilon$  das grandes para as pequenas escalas de movimento. Assume-se que a turbulência de pequena escala não percebe as condições de contorno e possa ser considerada homogênea e isotrópica. Este comportamento isotrópico local é fundamental quando se deriva quantidades turbulentas de pequena escala. Descobre-se que vários resultados importantes que dizem respeito às propriedades locais da turbulência podem ser obtidos de argumentos de similaridade (Kolmogorov, 1941a,b,c). Andrei Nikolaevich Kolmogorov foi quem primeiro concebeu a existência de um subintervalo inercial, separando o intervalo de dissipação daquele contendo a energia principal do campo turbulento (independência estatística entre grandes e pequenas escalas). Ele derivou a partir de argumentos dimensionais a forma da densidade espectral de energia tridimensional e a função estrutura da velocidade Euleriana para este subintervalo inercial (Monin e Yaglom, 1975). O espectro de energia tridimensional Euleriano é escrito na forma

$$E(k) = \alpha_i \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \qquad (24)$$

enquanto a função estrutura da velocidade é descrita por

$$D_i(\tau) = \overline{[v_i(t+\tau) - v_i(t)]^2} = \alpha_i C_s (\varepsilon U)^{2/3} \tau^{2/3} \qquad (25)$$

onde  $\alpha_i$ ,  $\alpha_s$ ,  $C_s$  são constantes numéricas,  $k = 2\pi n/U$  é o número de onda e  $U$  é a velocidade do vento médio horizontal. A função estrutura da velocidade Euleriana é distinta da função estrutura da velocidade Lagrangeana. Esta última é descrita em termos da variação da velocidade de uma

partícula de fluido a medida que esta move-se sob a influência dos turbilhões em um escoamento turbulento. Argumentos dimensionais mostram que esta variação da velocidade Lagrangeana depende apenas de  $\varepsilon$ , que determina a estrutura local da turbulência, e da diferença de tempo  $\tau$ . Formando-se a combinação de  $\varepsilon$  e  $\tau$  que apresenta as dimensões corretas obtém-se a função estrutura da velocidade Lagrangeana pela seguinte relação

$$D_{L_i}(\tau) = \overline{[v_{L_i}(t+\tau) - v_{L_i}(t)]^2} = C_{0_i} \varepsilon \tau \quad (26)$$

onde  $C_{0_i}$  é a constante de Kolmogorov. Pela condição de isotropia do subintervalo inercial, os espectros turbulentos unidimensionais Eulerianos apresentam nas quantidades  $\varepsilon$  e  $k$  a mesma dependência exibida na equação (24)

$$E_i(k) = \alpha_i \alpha_u \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (27)$$

onde  $\alpha_u$  pode ser determinado experimentalmente e  $\alpha_i = 1, 4/3, 4/3$  para as componentes  $u, v$  e  $w$  respectivamente (Champagne et al., 1977; Sorbjan, 1989; Kaimal and Finnigan, 1994). A relação (27) pode ser escrita como

$$\Phi_i(\omega) = \frac{1}{U} E_i\left(\frac{\omega}{U}\right) = \alpha_i \alpha_u (\varepsilon U)^{2/3} \omega^{-5/3}$$

e finalmente

$$S_i(n) = 2\pi \Phi_i(2\pi n) = \frac{\alpha_i \alpha_u}{(2\pi)^{2/3}} (\varepsilon U)^{2/3} n^{-5/3} \quad (28)$$

No subintervalo inercial, os espectros de energia Lagrangeanos unidimensionais dependem apenas de  $\varepsilon$  e  $\omega$ . Conseqüentemente, análise dimensional permite escrever para estes espectros a seguinte formulação (Tennekes, 1982)

$$\Phi_{L_i}(\omega) = B_{0_i} \varepsilon \omega^{-2} \quad (29)$$

onde  $B_{0_i}$  é uma outra constante numérica. Em termos da frequência  $n$ , a equação (29) pode ser escrita como,

$$2\pi \Phi_{L_i}(2\pi n) = \frac{B_{0_i}}{2\pi} \varepsilon n^{-2} \quad (30)$$

resultando,

$$S_{L_i}(n) = \frac{B_{0_i}}{2\pi} \varepsilon n^{-2} \quad (31)$$

O emprego da teoria e das equações apresentadas acima, permite obter uma expressão teórica para o importante fator de escala  $\beta_i$ . A seguinte derivação de uma expressão para  $\beta_i$  segue o desenvolvimento clássico proposto por Corrsin (1963) e usa observações atualizadas de turbulência na CLP.

Inicialmente integram-se as equações (28) e (31) para se obter, respectivamente, as variâncias Eulerianas e Lagrangeanas da velocidade turbulenta no subintervalo inercial

$$\sigma_i^2 = \int_{n_E}^{\infty} S_i(n) dn = \frac{3}{2} \frac{\alpha_i \alpha_u}{(2\pi)^{2/3}} \left( \frac{\varepsilon U}{n_E} \right)^{2/3} \quad (32)$$

e

$$\sigma_{L_i}^2 = \int_{n_L}^{\infty} S_{L_i}(n) dn = \frac{B_{0_i}}{2\pi} \varepsilon \frac{1}{n_L} \quad (33)$$

onde  $n_E$  e  $n_L$  são, respectivamente, as frequências iniciais Euleriana e Lagrangeana do subintervalo inercial.

Os valores inversos destas frequências características representam escalas de tempo.

A equação (33) pode ser reescrita na forma

$$\varepsilon^{2/3} = \frac{(2\pi)^{2/3}}{B_{0_i}^{2/3}} n_L^{2/3} \sigma_{L_i}^{2/3} \quad (34)$$

Considerando-se que a taxa de dissipação da energia turbulenta  $\varepsilon$  é igual em ambos sistemas de referência, a equação (34) pode ser substituída na equação (32) para se obter:

$$\frac{n_E^{2/3}}{n_L^{2/3}} = \frac{3}{2} \alpha_i \alpha_u \frac{U^{2/3} \sigma_{L_i}^{4/3}}{B_{0_i}^{2/3} \sigma_i^2} \quad (35)$$

Finalmente, assumindo-se que as variâncias Eulerianas e Lagrangeanas da velocidade turbulenta são iguais ( $\sigma_{L_i}^2 = \sigma_i^2$ ), a expressão para o fator de escala  $\beta_i$  é escrito na forma (Wandel and Kofoed-Hansen, 1962; Angell, 1971, Pasquill, 1974; Hanna, 1981),

$$\beta_i = \frac{T_{L_i}}{T_i} = \frac{n_E}{n_L} = \gamma \frac{U}{\sigma_i} \quad (36)$$

onde

$$\gamma = \left( \frac{3}{2} \right)^{3/2} \frac{(\alpha_i \alpha_u)^{3/2}}{B_{0_i}} \quad (37)$$

Uma estimativa para o coeficiente numérico  $\gamma$  pode ser obtida conhecendo-se os valores das constantes  $\alpha_i$ ,  $\alpha_u$  e  $B_{0_i}$ . Para as componentes  $v$  e  $w$  da velocidade  $\alpha_v = \alpha_w = 4/3$  (condição de isotropia).

Por outro lado, a função estrutura da velocidade Lagrangeana pode ser expressa em termos da função de autocorrelação Lagrangeana e do espectro turbulento Lagrangeano no subintervalo inercial

$$D_{L_i}(\tau) = 2\sigma_i^2 \left[ 1 - \rho_{L_i}(\tau) \right] = 2 \int_0^{\infty} \left[ 1 - \cos(2\pi n\tau) \right] S_{L_i}(n) dn \quad (38)$$

A substituição de (31) em (38), resulta

$$D_{L_i}(\tau) = \frac{\varepsilon \beta_{0_i}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[1 - \cos(2\pi n\tau)]}{n^2} dn = B_{0_i} \varepsilon \pi \tau \quad (39)$$

Comparando-se as equações (39) e (26) obtém-se

$$B_{0_i} = \frac{C_{0_i}}{\pi} \quad (40)$$

Um procedimento semelhante envolvendo a função estrutura da velocidade Euleriana permite escrever

$$D_i(\tau) = 2\sigma_i^2 [1 - \rho_i(\tau)] = 2 \int_0^{\infty} [1 - \cos(2\pi n\tau)] S_i(n) dn \quad (41)$$

A substituição de (28) em (41) fornece uma relação entre  $\alpha_u$  e  $C_s$ ,

$$D_i(\tau) = \frac{2\alpha_i \alpha_u}{(2\pi)^{2/3}} (\varepsilon U)^{2/3} \int_0^{\infty} \frac{[1 - \cos(2\pi n\tau)]}{n^{5/3}} dn = 4\alpha_i \alpha_u (\varepsilon U \tau)^{2/3} \quad (42)$$

Comparando-se as equações (42) e (25) resulta,

$$\alpha_u = \frac{C_s}{4} \quad (43)$$

Finalmente, a substituição de (40) e (43) na expressão (37), permite estimar o coeficiente  $\gamma$  em função das constantes  $C_s$  e  $C_{0_i}$ ,

$$\gamma = \left(\frac{3}{8}\right)^{3/2} \frac{\pi(\alpha_i C_s)^{3/2}}{C_{0_i}} \quad (44)$$

Um estudo recente de Anfossi et al. (2000) sugere um valor de  $C_s \cong 1.65$ , enquanto um trabalho experimental de Hanna (1981) estima o valor de  $C_{0_i} \cong 4,0$ . A substituição destas constantes numéricas na relação (44) fixa um valor para  $\gamma \cong 0,58$ . Este resultado está de acordo com o valor de  $\gamma = 0.55 \pm 0,14$  estimado como um valor médio a partir de um grande número de trabalhos teóricos e experimentais descobertos na literatura (Degrazia e Anfossi, 1998).

### 3.3. Derivação de coeficientes de difusão para uma turbulência gerada por forçantes convectivos na CLP

Nesta seção, empregando-se as equações (21) e (22) e os espectros unidimensionais das velocidades turbulentas, deriva-se expressões para os coeficientes de difusão turbulentos na Camada Limite Convectiva (CLC). Estes coeficientes de difusão são parâmetros fundamentais que expressam a magnitude da dispersão turbulenta na CLC. O conhecimento destes coeficientes, aliado à descrição do campo de vento horizontal, na equação de difusão-advecção permite simular, de um ponto de vista numérico ou analítico, o campo de concentração de contaminantes liberados por diferentes tipos de fontes.

Em condições convectivas, a equação para os espectros Eulerianos unidimensionais das velocidades turbulentas pode ser expressa como uma função das escalas convectivas na seguinte forma (Degrazia et al., 1997):

$$\frac{n S_{ic}^E(n)}{w_*^2} = \frac{1.06 c_i f \left( \psi_\varepsilon \frac{z}{z_i} \right)^{2/3}}{\left[ (f_m^*)_i^c \right]^{5/3} \left\{ 1 + 1.5 \frac{f}{\left[ (f_m^*)_i^c \right]} \right\}^{5/3}} \quad (45)$$

onde,  $c_v = c_w = 0.36$  e  $c_u = 0.27$ ,  $f = \frac{nz}{U}$  é uma frequência adimensional,  $z$  é a altura acima do solo,

$(f_m^*)_i^c$  é a frequência normalizada associada ao máximo do espectro convectivo,  $z_i$  é altura da

CLC,  $w_*$  é a escala de velocidade convectiva e  $\psi_\varepsilon = \frac{\varepsilon z_i}{w_*^3}$  é a taxa de dissipação viscosa

adimensional da energia cinética turbulenta. Deve ser observado que a magnitude de  $\varepsilon$  é determinada por aquelas quantidades que caracterizam os turbilhões contendo a energia principal da turbulência convectiva. Neste caso,  $z_i$  e  $w_*$  representam, respectivamente, escalas características de comprimento e de velocidade na CLC.

A integração analítica da equação (45) sobre o domínio inteiro de frequências, permite determinar a seguinte variância generalizada das velocidades turbulentas unidimensionais (eq. 4):

$$\sigma_{ic}^2 = \frac{1.06 c_i z \left( \psi_\varepsilon \frac{z}{z_i} \right)^{2/3} w_*^2}{U \left[ (f_m^*)_i^c \right]^{5/3}} \int_0^\infty \left[ 1 + 1.5 \frac{nz}{U \left[ (f_m^*)_i^c \right]} \right]^{-5/3} dn \quad (46)$$

e

$$\sigma_{ic}^2 = \frac{1.06 c_i \left( \psi_\varepsilon \frac{z}{z_i} \right)^{2/3} w_*^2}{\left[ (f_m^*)_i^c \right]^{2/3}} \quad (47)$$

que é usada na normalização da eq.(45). Com este procedimento, a relação espectral (45) pode ser escrita na seguinte maneira

$$F_{ic}^E(n) = \frac{S_{ic}^E(n)}{\sigma_{ic}^2} = \frac{z}{U \left[ (f_m^*)_i^c \right]} \left\{ 1 + 1.5 \frac{(nz/U)}{\left[ (f_m^*)_i^c \right]} \right\}^{-5/3} \quad (48)$$

Substituindo-se  $\beta_{ic} = \frac{0.55U}{\sigma_{ic}}$  (Degrazia e Anfossi, 1998) e eq.(47) nos termos que constituem a eq.(21) resulta,

$$\frac{\sigma_{ic}^2 \beta_{ic}}{2\pi} = \frac{0.09 U c_i^{1/2} w_* \left( \psi_\varepsilon \frac{z}{z_i} \right)^{1/3}}{\left[ (f_m^*)_i \right]^{1/3}} \quad (49)$$

e

$$\frac{2\pi t}{\beta_{ic}} \equiv a = \frac{11.76 c_i^{1/2} \left( \psi_\varepsilon \frac{z}{z_i} \right)^{1/3}}{\left[ (f_m^*)_i \right]^{1/3}} \frac{z_i}{U} X \quad (50)$$

onde uma transposição da variável tempo de viagem ( $t = \frac{x}{U}$ ) para uma distância espacial foi aplicada na parte temporal da eq.(21), resultando um  $K_\alpha$  dependente da distância adimensional  $X = \frac{x w_*}{U z_i}$ . A variável  $X$  é interpretada como a razão entre o tempo de viagem e a escala de tempo

convectiva ( $\frac{z_i}{w_*}$ ). Finalmente, definindo-se  $n' = bn$ , onde  $b = \frac{1.5z}{U (f_m^*)_i^c}$  e substituindo-se as expressões (48), (49) e (50) na eq.(21) obtém-se,

$$\frac{K_\alpha}{w_* z_i} = \frac{0.09 c_i^{1/2} \psi_\varepsilon^{1/3} (z/z_i)^{4/3}}{\left[ (f_m^*)_i \right]^{4/3}} \int_0^\infty \frac{\text{sen} \left( \frac{a}{b} n' \right) dn'}{(1+n')^{5/3} n'} \quad (51)$$

que pode ser expandida na seguinte forma generalizada (Degrazia et al., 2001)

$$\frac{K_\alpha}{w_* z_i} = \frac{0.09 c_i^{1/2} \psi_\varepsilon^{1/3} \left( \frac{z}{z_i} \right)^{4/3}}{\left[ (f_m^*)_i \right]^{4/3}} \int_0^\infty \frac{\text{sen} \left\{ \frac{7.84 c_i^{1/2} \psi_\varepsilon^{1/3} \left[ (f_m^*)_i \right]^{2/3}}{(z/z_i)^{2/3}} X n' \right\} dn'}{(1+n')^{5/3} n'} \quad (52)$$

É importante salientar que o processo de dispersão turbulenta no campo próximo à uma fonte pontual contínua (uma chaminé), é distinto daquele ocorrendo em regiões distantes. Na vizinhança da fonte, as partículas de fluido possuem uma memória do seu ambiente turbulento inicial descrito pela função de autocorrelação. Todavia, para grandes tempos de viagem (no campo turbulento longe da fonte), este efeito de memória desaparece e as partículas de fluido seguem apenas as propriedades locais da turbulência. Este efeito de ausência de memória é dado pelo

comportamento assintótico da eq.(21), e, sua forma matemática para  $t \rightarrow \infty$  é expressa pela eq.(22).

A substituição de  $\beta_{ic}$ ,  $\sigma_{ic}^2$  (eq.47) e  $F_{ic}^E (n=0)$  (eq. 48) na (eq. 22) conduz ao seguinte coeficiente de difusão turbulento assintótico:

$$K_{\alpha} = \frac{0.14 c_i^{1/2} \psi_{\varepsilon}^{1/3} \left( \frac{z}{z_i} \right)^{1/3} w_* z}{\left[ (f_m^*)_i \right]^{4/3}}. \quad (53)$$

O coeficiente de difusão turbulento expresso por (52) depende da geometria da fonte e é útil no cálculo da concentração de contaminantes liberados por fontes pontuais contínuas elevadas. Por outro lado, o seu comportamento assintótico expresso por (53), é empregado no cálculo da concentração de espécies escalares e vetoriais liberadas por fontes áreas infinitas (Degrazia e Moraes, 1992). Desta forma, o coeficiente de difusão assintótico (53) pode ser usado para descrever a transferência de calor, momentum e contaminantes na CLP. As eqs. (52) e (53) são expressas em termos das quantidades  $\psi_{\varepsilon}$  e  $(f_m^*)_i$ . Estes importantes parâmetros, que descrevem o tipo de turbulência são derivados a partir de fatos experimentais observados na CLP. Diferente de estados simples, a turbulência representa um estado físico complexo caracterizado por uma fenomenologia extremamente diversificada e desta forma valores de  $\psi_{\varepsilon}$  e  $(f_m^*)_i$  devem ser obtidos a partir de observações.

No caso de homogeneidade horizontal, a evolução da CLC é controlada principalmente pelo transporte vertical de calor. Como consequência, a presente análise é centrada na derivação de coeficientes de difusão turbulenta vertical. Este coeficiente pode ser derivado a partir da equação (52) assumindo-se

$$\left( f_m^* \right)_w^c = \frac{z}{\left( \lambda_m \right)_w^c} = 0.55 \left( \frac{z}{z_i} \right) \left[ 1 - \exp \left( -4 \frac{z}{z_i} \right) - 0.0003 \exp \left( 8 \frac{z}{z_i} \right) \right]^{-1} \quad (54)$$

onde  $\left( \lambda_m \right)_w^c = 1.8 z_i \left[ 1 - \exp \left( -4 \frac{z}{z_i} \right) - 0.0003 \exp \left( 8 \frac{z}{z_i} \right) \right]$  é o valor do comprimento de onda vertical associado ao máximo do espectro e representa uma expressão matemática de ajuste aos dados observados ao longo da extensão vertical da CLC (Caughey e Palmer, 1979).

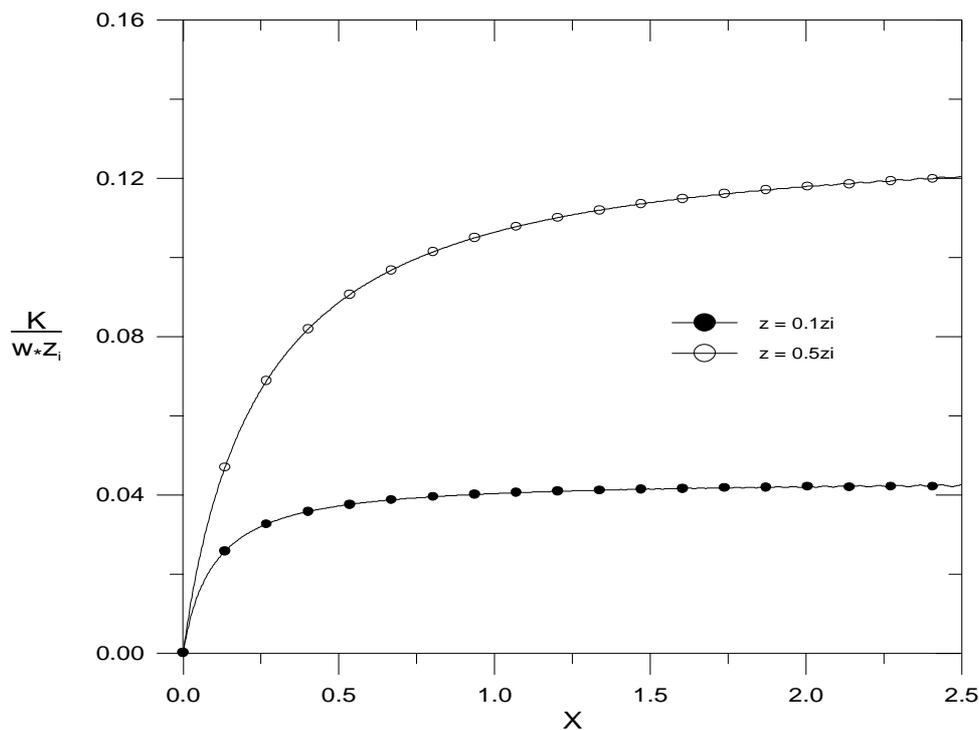
A substituição da equação (54) na relação geral (52) permite obter o seguinte coeficiente de difusão vertical (Degrazia et. al., 2001),

$$\frac{K_z}{w_* z_i} = 0.12 \psi_\varepsilon^{1/3} \left[ 1 - \exp(-4z/z_i) - 0.0003 \exp(8z/z_i) \right]^{4/3} \times \int_0^\infty \frac{\text{sen} \left\{ 3.17 \left[ 1 - \exp(-4z/z_i) - 0.0003 \exp(8z/z_i) \right]^{-2/3} \psi_\varepsilon^{1/3} X n' \right\}}{(1+n')^{5/3}} \frac{dn'}{n'} \quad (55)$$

O parâmetro (55) quantifica a capacidade de mistura da CLC em termos dos turbilhões mais energéticos e do efeito de memória do campo turbulento representado pela distância da fonte  $X$ . A função de dissipação  $\psi_\varepsilon$  pode ser estimada a partir da seguinte expressão obtida pelo ajuste de dados experimentais (Højstrup, 1982),

$$\psi_\varepsilon^{1/3} = \left[ \left( 1 - \frac{z}{z_i} \right)^2 \left( -\frac{z}{L} \right)^{-2/3} + 0.75 \right]^{1/2} \quad (56)$$

onde  $L$  é o comprimento de Obukhov na Camada Limite Superficial Convectiva e representa a altura limite vertical, na qual os efeitos mecânicos não são desprezíveis.



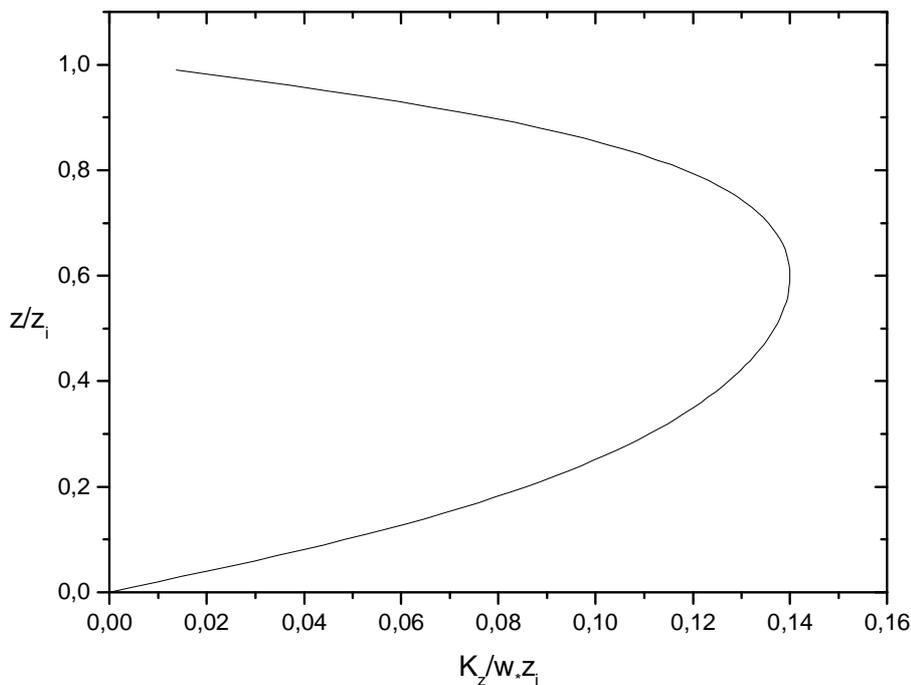
**Figura 3** – Comportamento com a distância do coeficiente de difusão turbulento vertical convectivo nas alturas adimensionais  $z/z_i = 0,1$  e  $z/z_i = 0,5$  (eq. 55).

A Figura 3 exhibe o comportamento de  $K_z/w_* z_i$  para dois diferentes níveis na CLC. Ela indica que para uma dada altura o  $K_z/w_* z_i$  calculado da equação (55) é inicialmente zero, aumenta linearmente com  $X$  e lentamente tende para um valor assintótico constante que pode ser obtido

das equações (53) e (54). Esta formulação, que descreve o coeficiente de difusão vertical assintótico longe da fonte pode ser escrita como (Degrazia et. al., 2001),

$$\frac{K_z}{w_* z_i} = 0.19 \psi_\varepsilon^{1/3} [1 - \exp(-4 z/z_i) - 0.0003 \exp(8 z/z_i)]^{4/3} \quad (57)$$

A Figura 4 mostra o comportamento do perfil vertical gerado pela equação (57). Do ponto de vista matemático o perfil deste coeficiente de difusão é bem comportado, apresentando valores máximos nas regiões centrais da CLC (a região bem misturada) e valores menores nas regiões próximas ao topo e vizinhança da superfície. Este comportamento, descrito pela eq. (57), é um resultado fisicamente consistente uma vez que as escalas de comprimento e velocidade turbulentas, na região central da CLC, excedem por um fator de dez os valores destas mesmas quantidades nas regiões abrangendo o contorno superior (vizinhança da inversão elevada) e inferior (região superficial) da CLC.



**Figura 4** – Perfil vertical do coeficiente de difusão turbulento assintótico calculado da eq. (57).

As fórmulas (52) e (55) descrevem a turbulência não-homogênea da CLP e levam em conta o efeito de memória modelado pela função de autocorrelação na teoria de difusão de Taylor. Estas parametrizações são particularmente adequadas na descrição do transporte turbulento de contaminantes liberados por uma fonte pontual contínua elevada na CLC. Por outro lado, as expressões (53) e (57) descrevem o transporte turbulento de contaminantes liberados por uma fonte área infinita e, como consequência, as parametrizações (53) e (57) permitem modelar a

transferência vertical de espécies como umidade, momento e calor na CLP. Neste caso, em virtude dos fracos gradientes horizontais, negligencia-se a dispersão turbulenta horizontal. Uma situação análoga ocorre algumas vezes sobre cidades onde os poluentes originados da superfície difundem-se verticalmente a medida que são transportados horizontalmente pelo vento.

### **3.4. Modelagem do transporte turbulento de contaminates durante o decaimento de uma CLC e fenômenos de oscilações de baixas frequências do vento horizontal**

#### **3.4.1 Introdução**

As eqs. (11), (13), (55) e (57) descrevem o processo de transporte associado à uma turbulência estacionária bem desenvolvida, ou seja, um campo turbulento como proposto por Kolmogorov, apresentando características de auto similaridade e invariância de escala. Todavia, é importante salientar que na CLP pode ocorrer diariamente, durante um período de tempo de aproximadamente uma hora, situações nas quais a dispersão é mantida pelo decaimento da turbulência na CLC. Como conseqüência, compreender e quantificar o fenômeno de dispersão turbulenta nesta particular situação constitui um problema de extrema importância na modelagem da dispersão de contaminantes na baixa atmosfera.

Por outro lado, estudos de dispersão e turbulência em situações de vento calmo são extremamente difíceis (Domenico et. al., 2004). Quando o vento médio horizontal tende para zero ( $U \rightarrow 0$ ), a maioria dos modelos operacionais de dispersão não pode ser aplicado para simular o campo de concentração de contaminantes. Em geral os modelos baseados na equação de difusão-advecção podem ser empregados apenas quando os ventos horizontais médios são maiores do que  $2\text{ms}^{-1}$  (Wilson et. al., 1976; Lines et. al., 1997). Nas condições caracterizadas por vento calmo a dispersão de contaminantes é governada por oscilações de baixa frequência do vento horizontal.

Neste ponto se deve ter em mente que as equações de N-S contém todo o tipo de informação sobre o fenômeno turbulento (Frisch, 1995). A complexidade contida nas equações de N-S é de tal ordem que estas equações de conservação são capazes de explicar a variada fenomenologia associada aos diferentes tipos de turbulência. Deve-se recordar que muitos fenômenos observados em turbulência são, na realidade, manifestações heurísticas das equações de N-S. Contudo, compreender de forma integrada todos os termos que compõem as equações de N-S é uma tarefa difícil e trabalhosa.

Com base nos argumentos expostos acima, empregando-se as equações de N-S, serão descritos nas próximas seções os dois fenômenos turbulentos geofísicos particulares, ou seja, o decaimento da turbulência na CLC e o meandro do vento horizontal.

#### **3.4.2 Derivação de coeficientes de difusão na Camada Residual.**

Aproximadamente meia hora antes do pôr-do-sol, o fluxo turbulento de calor superficial (positivo durante os dias ensolarados) começa a decrescer e, durante a noite torna-se negativo. Durante este período de transição dia-noite inicia-se a formação da Camada Limite Superficial Estável que tende a isolar da superfície a extensão vertical ocupada pela antiga CLC. Esta extensão vertical é chamada de Camada Residual (CR) e no seu interior a turbulência é mantida pelo decaimento dos turbilhões convectivos mais energéticos. A CR é uma camada elevada, aproximadamente neutra, que é pouco influenciada pelo transporte turbulento de espécies escalares e vetoriais originados na superfície. Além do mais, as suas características em um tempo inicial são consideradas idênticas às da CLC e o fenômeno turbulento no seu interior persiste por um tempo de aproximadamente uma hora. No que diz respeito a esta camada, é importante salientar que um grande número de chaminés elevadas liberam contaminantes durante o período de transição dia-noite. Além do mais, em dias de céu claro, esta transição ocorre regularmente em um período de vinte e quatro horas e, como consequência, a derivação de coeficientes de difusão neste particular período fornece uma parametrização turbulenta para modelos operacionais de difusão atmosféricos.

Para uma turbulência homogênea e isotrópica Goulart et. al. (2002) propôs um modelo para derivar coeficientes de difusão na CR em uma turbulência convectiva decaindo. Este modelo baseia-se na equação de balanço para a energia cinética turbulenta na qual a contribuição devido ao empuxo foi desprezada e apenas o termo de transferência inercial de energia foi mantido. Os resultados desta aproximação foram comparados com um coeficiente de difusão vertical decaindo obtido a partir de dados de simulação dos grandes turbilhões (LES) (Nieuwstadt e Brost, 1986) (NB). Para pequenos tempos de difusão foi observada uma boa concordância entre os coeficientes de difusão teórico e simulado. Todavia, para tempos maiores, o coeficiente de difusão vertical simulado numericamente decaiu mais rapidamente.

Mais recentemente, Goulart et. al. (2003) desenvolveu um modelo teórico para estudar o decaimento da energia cinética turbulenta na CLC. Como no caso anterior este modelo baseia-se na equação do espectro de energia, na qual os termos de transferência inercial e de empuxo são retidos. Diferentemente dos modelos de Goulart, Degrazia et. al. (2003), empregando a teoria de decaimento de turbulência de Heisenberg, derivou um coeficiente de difusão aplicado à CR. Este coeficiente de difusão modelado foi comparado com os dados de LES de NB e os resultados mostraram que o modelo de Degrazia, não reproduz satisfatoriamente a variância da velocidade vertical decaindo simulada pelo modelo LES.

Motivado pelos trabalhos citados acima, o objetivo deste estudo é derivar uma formulação para os coeficientes de difusão na CR considerando-se uma turbulência convectiva decaindo não isotrópica. Um coeficiente de difusão vertical será derivado durante o tempo total de decaimento. Um propósito adicional deste trabalho é a obtenção de uma formulação simples para

representar este coeficiente de difusão de modo que a nova parametrização possa ser empregada em modelos operacionais de dispersão atmosférica.

Distintamente do trabalho de Goulart et. al. (2002), a aproximação desenvolvida neste estudo, assume uma turbulência homogênea mas não isotrópica na direção vertical. O termo de transferência de energia inercial na equação de energia cinética turbulenta é parametrizado a partir de argumentos dimensionais utilizando-se uma idéia sugerida por Pao (1965). Desta maneira obtém-se uma equação de balanço para a energia cinética turbulenta que é resolvida analiticamente para se obter o espectro de densidade de energia (EDE) tridimensional (3-D). Este EDE 3-D é expresso em termos do EDE inicial ( $t = 0$ ) da CLC diurna estacionária. Para calcular este EDE 3-D inicial, para o caso de uma turbulência não isotrópica (direção vertical), utiliza-se a formulação matemática proposta por Kristensen et. al. (1989). Esta formulação permite-nos determinar o espectro tridimensional de um fluxo turbulento não isotrópico e homogêneo a partir dos espectros unidimensionais conhecidos. Para calcular o espectro vertical decaindo e, como consequência, a variância de velocidade e o coeficiente de difusão vertical, emprega-se um método matemático que utiliza uma função peso. Esta função peso informa a magnitude da componente vertical do espectro na formação do espectro de energia tridimensional.

### 3.4.2.1 Equação Dinâmica para o Espectro Densidade de Energia

Pode-se derivar uma equação para a função espectro de energia em um campo de escoamento turbulento empregando-se a lei de conservação de momentum. Esta lei é expressa pelas conhecidas equações de Navier-Stokes. No caso de um escoamento turbulento homogêneo, a Transformada de Fourier da energia cinética turbulenta na equação dinâmica para o EDE pode ser escrita como (Hinze, 1975)

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = M(k, t) + \frac{g}{T_0} H(k, t) + W(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t) \quad (58)$$

onde  $t$  é o tempo,  $g/T_0$  é o parâmetro de empuxo,  $k$  é o número de onda,  $E(k, t)$  é o EDE 3-D,  $W(k, t)$  é o termo de transporte inercial de energia,  $M(k, t)$  é o termo de produção de energia por efeito mecânico,  $H(k, t)$  é o termo de produção ou perda de energia devido ao empuxo e o último termo do lado direito é a perda de energia devido a dissipação viscosa. Na CR, em uma primeira aproximação, os termos de empuxo  $H(k, t)$  e produção mecânica  $M(k, t)$  podem ser desprezados e assume-se um campo turbulento homogêneo e isotrópico. Conseqüentemente, a seguinte equação para o EDE 3-D pode ser escrita,

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = W(k, t) - 2\nu k^2 E(k, t) \quad (58a)$$

Um campo turbulento é constituído por turbilhões de diferentes tamanhos ou distintos números de onda. Os pequenos turbilhões estão sob a ação do efeito de cisalhamento gerado pelos grandes turbilhões. Este cisalhamento aumenta a vorticidade dos pequenos turbilhões e, conseqüentemente, a sua energia cinética. Desta maneira, ocorre a transferência de energia cinética turbulenta para os turbilhões menores. Este processo dinâmico cessa de existir na microescala de Kolmogorov, onde por ação da viscosidade molecular, a energia cinética turbulenta é dissipada em calor. Esta transferência é representada pelo termo,

$$W(k,t) = -\frac{\partial}{\partial k} (\alpha^{-1} \varepsilon^{1/3} k^{5/3} E(k,t)) \quad (59)$$

onde  $\alpha$  é a constante espectral de Kolmogorov. Substituindo-se a eq. (59) na eq. (58) obtém-se:

$$\frac{\partial E(k,t)}{\partial t} + \alpha^{-1} \varepsilon^{1/3} k^{5/3} \frac{\partial E(k,t)}{\partial k} + \frac{5}{3} \alpha^{-1} \varepsilon^{2/3} k^{2/3} E(k,t) - 2\nu k^2 E(k,t) = 0 \quad (60)$$

Definindo-se os seguintes parâmetros adimensionais,

$$t_* = \frac{w_* t}{z_i}, \quad R_e = \frac{w_* z_i}{\nu}, \quad \psi_\varepsilon = \frac{\varepsilon z_i}{w_*^3} \quad (61)$$

a eq. (60) torna-se

$$\frac{\partial E(k',t_*)}{\partial t_*} + \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{1/3} (k')^{5/3} \frac{\partial E(k',t_*)}{\partial k'} + \frac{5}{3} \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{1/3} (k')^{2/3} E(k',t_*) - \frac{2}{R_e} (k')^2 E(k',t_*) = 0 \quad (62)$$

onde  $k' = kz_i$ .

Na resolução da equação (62) considera-se as seguintes mudanças de variáveis:  $t \rightarrow s$  e  $k' \rightarrow m$  (em  $t = 0$ ,  $E(m,0) = E(m)$ ):

$$\dot{s}(t) = 1 \quad (63)$$

$$\dot{k}'(s) = \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{1/3} k'^{5/3} \quad (64)$$

$$\dot{Z}(s) = -\left(\frac{5}{3} \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{1/3} k'^{2/3} + \frac{2}{R_e} k'^2\right) Z(s) \quad (65)$$

$$s(0) = 0 \quad (66)$$

$$k'(0) = m \quad (67)$$

$$Z(m,0) = E(m,0) \quad (68)$$

A partir da eq. (63) e (64) obtém-se

$$\frac{ds}{dt_*} = 1 \quad \text{ou} \quad s = t_* \quad (69)$$

e

$$\frac{dk'}{ds} = \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{1/3} k'^{5/3} \quad (70)$$

A solução da eq. (70), a partir das condições iniciais (66) e (67) estabelece a seguinte relação entre  $k'$  e  $m$

$$k' = \left( -\frac{2}{3} \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{1/3} s + m^{-2/3} \right)^{-3/2} \quad (71)$$

A substituição da eq. (71) na eq. (65) com o emprego das condições iniciais (66), (67) e (68) permite escrever a seguinte equação

$$E(m, s) = E(m, 0) \left( \frac{-2/3 \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{1/3} s + m^{-2/3}}{m^{-2/3}} \right)^{5/3} \exp \left[ \left( -2/3 \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{1/3} s + m^{-2/3} \right)^{-2} - m^{4/3} \right] \quad (72)$$

Finalmente, substituindo-se a variável  $m$  (eq. 71) na eq. (72) e considerando-se  $s = t_*$  (eq. 69), resulta na seguinte solução analítica

$$E(k', t_*) = E(\xi, 0) \left( \frac{k'}{\xi} \right)^{-5/3} \exp \left\{ -\frac{3\alpha}{2R_\varepsilon \psi_\varepsilon^{1/3}} \left( (k')^{4/3} - \xi^{4/3} \right) \right\} \quad (73)$$

onde  $\xi = \left\{ (k')^{-2/3} + \frac{2}{3} \alpha^{-1} \psi_\varepsilon^{1/3} t_* \right\}^{-3/2}$ ,  $\alpha = 1.5$  e  $E(\xi, 0)$  é o espectro 3-D inicial.

A equação dinâmica para o EDE turbulento (eq. 58) é válida no espaço 3-D. Desta forma, o espectro  $E(k, 0)$ , que representa a condição inicial na eq. (73), é o espectro 3-D da CLC antes do seu decaimento.

Neste estudo, considera-se uma turbulência não isotrópica e, como consequência, usar-se-á a formulação proposta por Kristensen (1989) na determinação deste espectro 3-D inicial. Conhecendo-se os espectros unidimensionais a formulação derivada por Kristensen (1989) permite determinar o espectro 3-D de um campo turbulento homogêneo (Goulart, et. al., 2003)

$$E_0(k, z) = k^3 \frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{dF_u(k)}{dk} + 12 A_i m_i B_i^{-\frac{17}{6}} k^4 \sum_{n=0}^3 C_n \int_{W_{1i}}^{\infty} \frac{Z_i^{3n-12}}{(Z_i^3 - 1)^5} dZ_i - \frac{84}{9} A_i m_i B_i^{-\frac{3}{2}} k^3 \sum_{n=0}^3 C_n \int_1^{W_{2i}} \frac{Z_i^{3n-12}}{(Z_i^3 - 1)^{n-5}} dZ_i \quad (74)$$

onde

$$W_{1i} = \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{B_i s}} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad W_{2i} = \left( 1 + \sqrt{B_i s} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad A_i = a_i \left( \frac{1}{b_i} \right)^{\frac{5}{6}},$$

$$m_u = 2, \quad m_v = m_w = -1,$$

$$C_0 = -\frac{55}{27}, \quad C_1 = \frac{70}{9}, \quad C_2 = -\frac{725}{72}, \quad C_3 = \frac{935}{216}, \quad A_i = a_i b_i^{-\frac{5}{6}}, \quad B_i = b_i^{-2} \quad (75)$$

Seguindo Degrazia et. al. (2000) as componentes espectrais unidimensionais iniciais podem ser escritas como:

$$F_i(k, 0) = \frac{a_i}{(1 + b_i k)^{5/3}} \quad i = u, v, w \quad (76)$$

com

$$a_i = \frac{1.06}{2\pi} c_i \left( \frac{z}{z_i} \right)^{5/3} z_i \psi_\varepsilon^{2/3} w_*^2 [(f_m^*)_i]^c ]^{-5/3} \text{ e } b_i = \frac{1.5}{2\pi} \frac{z}{z_i} z_i \frac{1}{(f_m^*)_i},$$

e

$$G_u = 1.5, \quad G_v = 1.5, \quad G_w = 1.8 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{4z}{z_i}\right) - 0.0003 \exp\left(\frac{8z}{z_i}\right) \right].$$

Devido ao fluxo de calor superficial, a CLC é não isotrópica na direção vertical. Desta forma, para calcular a componente vertical do espectro de energia em um instante de tempo particular  $t$ , considera-se a existência de uma relação entre os espectros unidimensionais e o espectro 3-D. Do ponto de vista matemático, esta relação é expressa na forma

$$F_w(k, t) = \alpha(k) \frac{\frac{1}{T} \int_0^t F_w(k, t) dt}{\frac{1}{T} \int_0^t E(k, t) dt} E(k, t) \quad (77)$$

onde a razão entre as duas integrais é uma função peso que indica o quanto a componente vertical contribui para o espectro 3-D e  $\alpha(k)$  é uma constante de proporcionalidade.

A solução da equação (77) fornece a componente vertical como função do espectro 3-D,

$$F_w(k, t) = F_w(k, 0) \exp\left[\int_0^t Q'(k, s) ds\right] \quad (78)$$

Neste caso  $F_w(k, 0)$  é fornecido pela eq. (76)

$$Q'(k, s) = \alpha(k) Q(k, s) + \frac{1}{Q(k, s)} \frac{\partial Q(k, s)}{\partial s} \quad (79a)$$

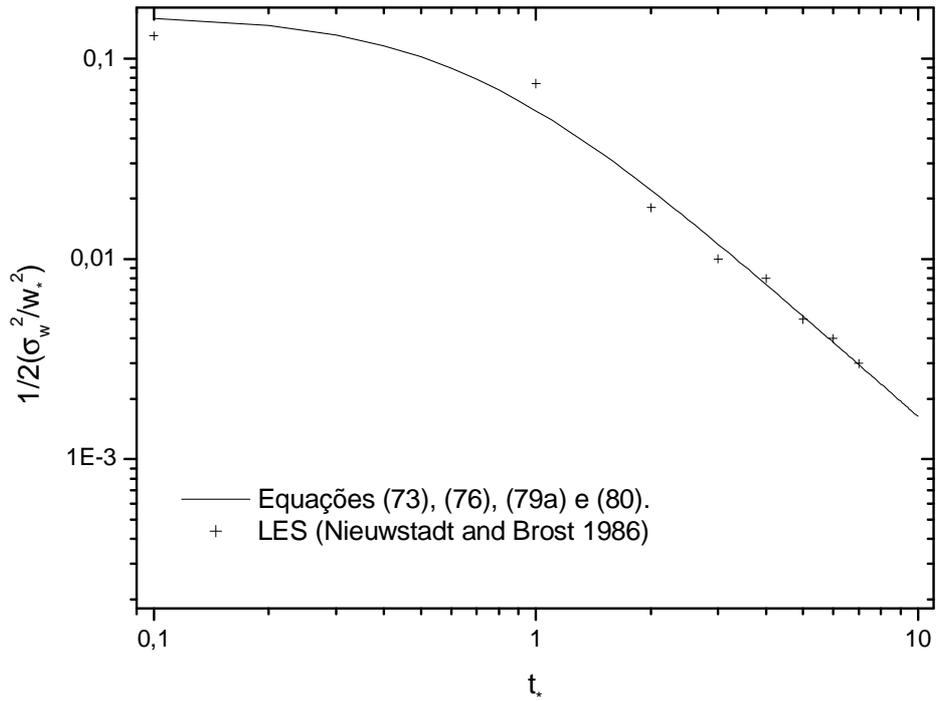
e  $Q(k, s)$  é dado por

$$Q(k, s) = \frac{E(k, s)}{\int_0^t E(k, s) ds} \quad (79b)$$

Para o nosso conhecimento não existem observações conclusivas do processo de decaimento da CLC, deste modo nossas expressões teóricas são comparadas com os dados de LES (Nieuwstadt e Brost, 1986). A variância vertical do fluxo turbulento decaindo é calculada pela seguinte equação,

$$\sigma_i^2(t; z) = \int_0^\infty F_i(k, t; z) dk \quad (80)$$

A Figura 3 mostra a evolução temporal do decaimento da variância da velocidade vertical através da CLC ( $0.2 < z/z_i < 0.8$ ), calculada das equações (73), (76), (79a) e (80).



**Figure 3** – Evolução temporal do decaimento da variância da velocidade vertical através da CLC ( $0.2 < z/z_i < 0.8$ ).

A Figura 3 mostra que o nosso modelo analítico (linha sólida) concorda muito bem com os resultados simulados pelo modelo numérico LES (representados por cruzes).

Os coeficientes de difusão calculados por Batchelor (1949) podem ser identificados com aqueles da equação de difusão-advecção quando se considera um campo turbulento homogêneo. Para grandes tempos de difusão o coeficiente pode ser calculado do modelo de difusão de Taylor (1921) e apresenta a seguinte forma:

$$K_\alpha(t; z) = \frac{\pi \beta_i \sigma_i^2(t; z)}{3 U (k_m)_i} \quad \alpha = x, y, z \quad (81)$$

onde  $(k_m)_i$  é o número de onda associado ao máximo do espectro.

Considerando-se  $\beta_i = 0.55 \frac{U}{\sigma_i}$  (Degrazia e Anfossi, 1998) na eq. (81) resulta o seguinte

coeficiente de difusão para uma turbulência decaindo na CR,

$$K_\alpha(t; z) = \frac{0.55\pi \sigma_i(t; z)}{3 (k_m)_i} \quad (82)$$

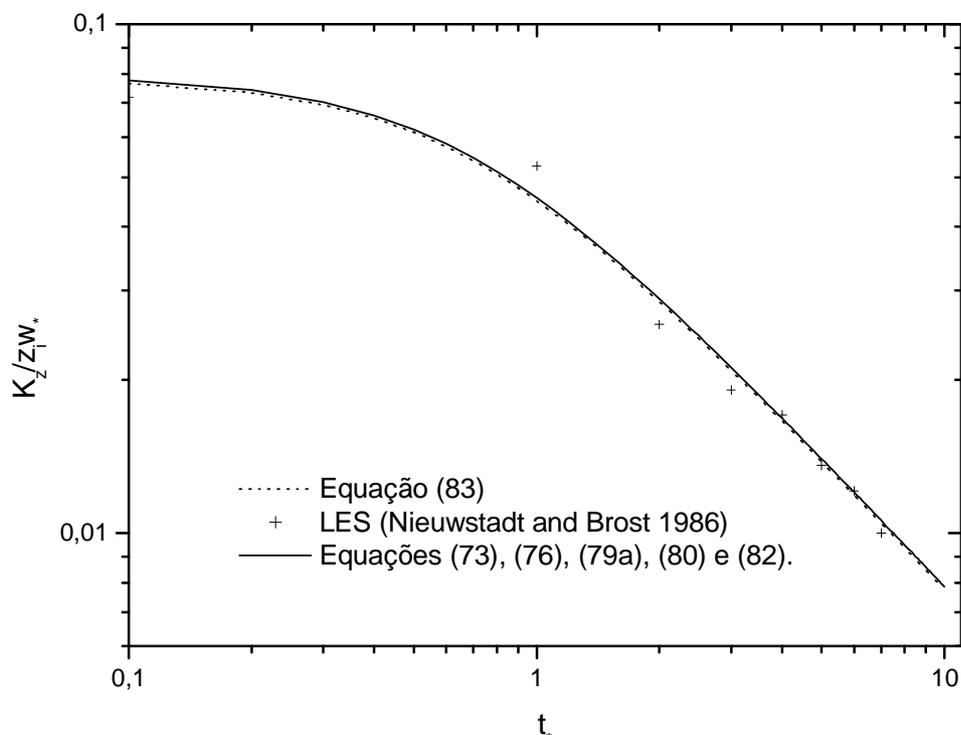
onde,  $\sigma_i(t; z)$  é obtido das equações (73), (76), (79a) e (80).

Em seu trabalho clássico NB mostram que o espectro da velocidade vertical (exibido na sua figura 14), calculado para vários tempos adimensionais, apresenta um valor máximo para  $(k_m)_w z_i \approx 4$ . Este resultado da simulação permite calcular o coeficiente de difusão vertical para diferentes tempos em uma CLC decaindo.

A Figura 4 exibe três destes coeficientes. Nesta figura, os dados representados por cruces foram calculados a partir da eq. (82) usando-se valores de  $\sigma_w$  decaindo calculados pelo modelo numérico LES. Por outro lado, a linha sólida foi obtida usando-se a eq. (82) com valores de  $\sigma_w$  derivados do nosso modelo analítico (eqs. 73, 76, 79a, 80 e 82). Para todo o tempo de decaimento, pode-se ver que existe uma boa concordância entre os resultados simulados numericamente e aqueles obtidos pelo modelo analítico. Finalmente, a linha pontilhada foi calculada a partir da seguinte equação algébrica:

$$\frac{K_z}{z_i w_*} = \frac{0.079}{\sqrt{1 + 2t_*^{1.7}}} \quad (83)$$

Observa-se da Figura 4 que a equação (83) representa um bom ajuste para o coeficiente de difusão vertical na CR.



**Figura 4** – Coeficiente de difusão vertical decaindo na CR

O modelo desenvolvido a partir da eq. (58), e que descreve o decaimento da turbulência na CLC, mostra que a equação algébrica simples (eq. 83) pode ser empregada em modelos operacionais de dispersão para descrever o campo de concentração de contaminantes liberados por fontes pontuais contínuas (chaminés) localizadas no interior da CR.

### 3.4.3. Análise do fenômeno de oscilações de baixa frequência do vento horizontal pelo emprego das equações de Navier-Stokes

Normalmente em condições estáveis, durante situações de vento calmo ( $\bar{U} \leq 1 - 2$  m/s), oscilações de baixa frequência do vento horizontal (“meandro”) são observadas na CLP. Esta pequena velocidade do vento faz com que modelos matemáticos que simulam a dispersão de contaminantes na Camada Limite Planetária (CLP) tornem-se altamente imprecisos no cálculo dos campos de concentração. Estes movimentos são claramente distinguíveis dos movimentos presentes em uma turbulência bem desenvolvida (movimentos de alta frequência) que usualmente são responsáveis pela difusão de poluentes na CLP. Os movimentos de baixa frequência dispersam a pluma de contaminantes em todas as direções, de modo que, qualquer modelo operacional para ser confiável deve levar em conta este efeito físico.

Neste estudo empregam-se as equações de N-S para descrever o campo de velocidade média horizontal e investigar a origem das oscilações de baixa frequência (o meandro do vento). A seguir, apresenta-se um método analítico de solução das equações simplificadas de N-S e mostra-se que o caráter oscilatório do campo de vento observado está associado à natureza matemática deste sistema, ou seja, hipotetiza-se que as oscilações de baixa frequência surgem da natureza matemática das equações de N-S sob condições físicas particulares.

#### 3.4.3.1. Solução particular das equações de Navier-Stokes

Para investigar os processos físicos responsáveis pelo fenômeno de meandro do vento e obter uma expressão para a função de autocorrelação considera-se as equações de N-S em duas dimensões,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = f_c \bar{v} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{(u'u')}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{(u'v')}}{\partial y} \quad (84)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -f_c \bar{u} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{(v'u')}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{(v'v')}}{\partial y} \quad (85)$$

onde,  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  são as componentes longitudinal e transversal da velocidade média do vento,  $\bar{\rho}$  é a densidade média do ar,  $u'$  e  $v'$  são as flutuações de velocidade,  $\bar{p}$  é a pressão média e  $f_c$  é o parâmetro de Coriolis.

Como o sistema de equações (84) e (85) não possui uma solução analítica geral, algumas simplificações devem ser feitas a fim de se obter uma solução analítica particular. No caso da análise das condições de meandro, assume-se que todos os gradientes horizontais das duas componentes da velocidade do vento e da pressão são constantes e que o gradiente horizontal do tensor stress de Reynolds pode ser desprezado. Esta última suposição origina-se da consideração de que a turbulência é realmente pouco intensa nas condições de meandro e, como consequência, seus gradientes horizontais são desprezíveis. Definindo-se,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}; & b_1 &= +f_c - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; & c_1 &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ a_2 &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}; & b_2 &= -f_c - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}; & c_2 &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \end{aligned} \quad (86)$$

as equações (84) e (85) podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial \bar{u}(t)}{\partial t} = -a_1 \bar{u}(t) + b_1 \bar{v}(t) + c_1 \quad (87 \text{ a})$$

$$\frac{\partial \bar{v}(t)}{\partial t} = -a_2 \bar{v}(t) + b_2 \bar{u}(t) + c_2 \quad (87 \text{ b})$$

Combinando-se as equações (87 a) e (87 b) por derivar em relação ao tempo a equação (87 a) e substituindo na equação (87 b), resulta:

$$\bar{u}'' + (a_1 + a_2)\bar{u} + (a_1 a_2 - b_1 b_2)\bar{u} = a_2 c_1 + b_1 c_2 \quad (88)$$

que pode ser escrita como

$$\bar{u}'' + B\bar{u}' + C\bar{u} = D \quad (89)$$

onde,

$$B = a_1 + a_2 \quad C = (a_1 a_2 - b_1 b_2) \quad D = a_2 c_1 + b_1 c_2 \quad (90)$$

A equação (88) possui uma solução analítica conhecida. Elas correspondem aos três casos na solução da equação (89), isto é de acordo com os valores das raízes  $r_1$  e  $r_2$  da equação auxiliar  $r^2 + Br + C = 0$ . As raízes podem ser escritas como:

$$r = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad (91 \text{ a})$$

Considera-se somente o caso onde

$$B^2 - 4C < 0 \text{ [i.e. } (a_1 - a_2)^2 < -4b_1 b_2 \text{]} \text{ ou } \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 < 4 \left( f_c - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \left( f_c + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \quad (91 \text{ b})$$

que corresponde ao comportamento oscilatório. Definindo-se

$$r_1 = p + qi \quad \text{e} \quad r_2 = p - qi \quad (92)$$

onde

$$p = \frac{B}{2} \quad q = \frac{\sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad (93)$$

as soluções do sistema de equações (87 a) e (87 b) são:

$$\bar{u}(t) = e^{-pt} (\alpha_1 \cos(qt) + \alpha_2 \sin(qt)) + \frac{D}{p^2 + q^2} \quad (94 a)$$

e

$$\bar{v}(t) = e^{-pt} \left[ \frac{(-p\alpha_1 + q\alpha_2 + a_1\alpha_1)}{b_1} \cos(qt) + \frac{(-p\alpha_2 - q\alpha_1 + a_1\alpha_2)}{b_1} \sin(qt) + \frac{D}{p^2 + q^2} \frac{a_1}{b_1} - \frac{c_1}{b_1} \right] \quad (94 b)$$

onde

$$\alpha_1 = u_o - \frac{D}{p^2 + q^2} \quad \alpha_2 = \frac{1}{q} \left[ v_o b_1 - (-p + a_1)u_o - \frac{Dp}{p^2 + q^2} + c_1 \right] \quad (95)$$

A solução analítica (eqs. 94a e 94b) mostra que o aparecimento do fenômeno de meandro do vento horizontal está relacionado à estrutura das equações de N-S. Uma condição particular (neste caso o equilíbrio entre as forças devido ao gradiente de pressão e Coriolis) gera uma solução que tem características oscilatórias. A condição matemática (91 b) para a existência do meandro do vento impõe que a diferença entre os gradientes horizontais das componentes da velocidade do vento sejam pequenos. Entretanto, nenhuma condição é imposta à magnitude da velocidade do vento. Assim, esta última pode ser maior do que as usualmente encontradas em estudos de meandro do vento.

O período de oscilação nas equações (94a) e (94b) depende dos valores de  $\partial \bar{u} / \partial y$  e  $\partial \bar{v} / \partial x$  (ver 86, 87a, 87b e 90) e do parâmetro de Coriolis. A partir das equações (94a) e (94b) pode-se ver que quando  $\partial \bar{u} / \partial y$  e  $\partial \bar{v} / \partial x$  são ambos iguais a zero, a presente solução tem o período inercial de oscilação  $2\pi / f_c \approx 17$  horas (Stull, 1988). Também se pode observar que com o crescimento da velocidade do vento, e assim com o aumento das derivadas espaciais das componentes da velocidade do vento, o período de oscilação decresce.

A partir de uma análise de escala nas equações (94a) e (94b) observa-se que o termo

$\frac{D}{p^2 + q^2}$  é aproximadamente zero,  $\frac{(-p\alpha_1 + q\alpha_2 + a_1\alpha_1)}{b_1}$  é duas ordens de magnitude menor que o termo  $\frac{(-p\alpha_2 - q\alpha_1 + a_1\alpha_2)}{b_1}$ . Da mesma forma  $\alpha_2$  é duas ordens de magnitude menor que  $\alpha_1$ .  $\frac{a_1}{b_1}$  e

$\frac{c_1}{b_1}$  são desprezíveis em relação ao restante dos termos.  $-p \alpha_2 + a_1\alpha_2$  é aproximadamente zero e

$\frac{q}{b_1} \approx 1$ . Considerando-se estas simplificações, as equações (11a) e (11b) tornam-se:

$$\overline{u_s}(t) = \alpha_1 e^{-pt} \cos(qt) \quad (96 \text{ a})$$

$$\overline{v_s}(t) = \alpha_1 e^{-pt} \sin(qt) \quad (96 \text{ b})$$

As equações (13a) e (13b) podem ser escritas como:

$$\overline{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{a}_1 e^{-(pt-iqt)} \quad (97).$$

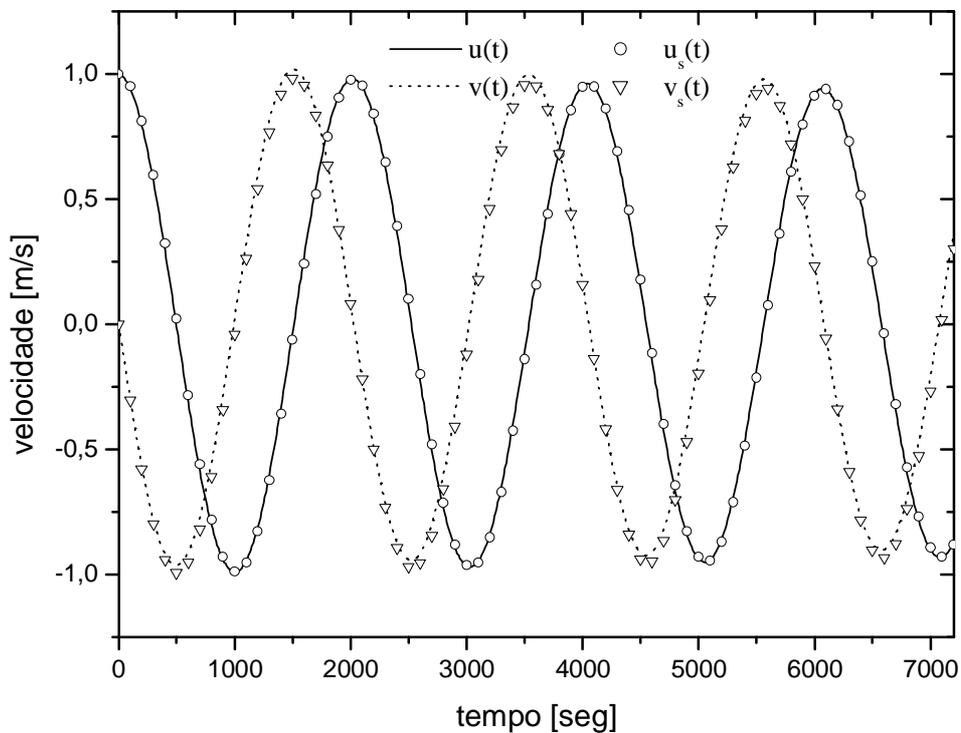
As equações simplificadas (96a) e (96b) estão na Figura 5 como linhas pontilhadas, enquanto que as equações completas (94a) e (94b) aparecem como linha cheia. Pode-se observar que as duas soluções são praticamente coincidentes e que, portanto, as equações simplificadas (96a) e (96b) podem ser usadas em aplicações. A partir da equação (97) pode-se obter a função de autocorrelação normalizada

$$R(\tau) = e^{-p\tau} (\cos(q\tau) + i \operatorname{sen}(q\tau)) \quad (98)$$

Retendo somente a parte real da equação (15) temos,

$$R(\tau) = e^{-p\tau} \cos(q\tau) \quad (99).$$

A expressão (99) para a função de autocorrelação é exatamente igual àquela proposta por Frenkiel (1953), e que descreve condições de meandro do vento horizontal na CLP (Anfossi et al., 2004).



**Figura 5** – Séries temporais das velocidades do vento modeladas a partir das equações (94a, 94b, 96a, 96b).

A derivação analítica apresentada neste estudo mostra que na CLP não há necessidade de um mecanismo específico, tais como ondas de gravidade (Etling, 1990; Olesen et. al., 1984) ou condições de estabilidade, para gerar o fenômeno de meandro do vento horizontal em um escoamento caracterizado por baixa velocidade do vento. A solução das equações de N-S simplificadas sugerem que um aumento no gradiente de pressão horizontal (um desequilíbrio entre o efeito de Coriolis e a pressão), evita o surgimento do fenômeno de meandro. De um modo geral, pode-se dizer que com o aumento dos termos de produção no lado direito das equações de N-S (o afastamento do balanço geostrófico ou o aumento no stress de Reynolds), o fenômeno de meandro vai sendo amortecido e as oscilações de baixa frequência do vento horizontal desaparecem completamente.

Finalmente, pode-se concluir que a introdução das equações (96 a-b) na parte advectiva da equação de difusão-advvecção permite descrever as direções do vento horizontal médio e desta forma determinar com precisão o transporte de contaminantes liberados na CLP.

### 3.5 Referências

- ANFOSSI D., OETTL, D., DEGRAZIA, G., GOULART, A. An analysis of sonic anemometer observations in low wind speed conditions, **Boundary Layer Meteorology**, in print
- ANFOSSI, D., DEGRAZIA, G., FERRERO, E., GRYNING, S.E., MORSELLI, M.G., e TRINI CASTELLI. Estimation of the Lagrangian Structure Function Constant  $C_0$  From Surface-Layer Wind Data, **Boundary-Layer Meteorology**, v.95, p. 249-270. 2000.
- ANGELL, J. K., PACK, D. H., HOECKER, W. H. e DELVER, N. Lagrangian-Eulerian time-scale estimated from constant volume balloon flights past a tall tower, **Quarterly Journal of Royal Meteorological Society**, v.97, p.87-92. 1971.
- BACHELOR, G.K. Diffusion in a field of homogeneous turbulence. *Aust. J. Sci. Res.* 2, 437-450. 1949.
- CAUGHEY, S.J., PALMER, S.G. Some Aspects of Turbulence Structure Through the Depth of the Convective Boundary Layer, *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 105, 811-827. 1979.
- CHAMPAGNE, F.H., FRICHE, C.A., LARVE, J.C., WYNGAARD, J.C. Flux measurements, flux estimation techniques, and fine scale turbulence measurements in the unstable surface layer over land, *J. Atmos. Sci.*, v.34, p.515-520. 1977.
- CORRSIN, S. Estimates of the relations between Eulerian and Lagrangean scales in large Reynolds number turbulence, **Journal of Atmospheric Science**, v.20, p.115-119. 1963.
- DEGRAZIA, G. A., GOULART, A., ANFOSSI, D., VELHO, H. F. C., LUKASZCYK, J. P., PALANDI, J. A model based on Heisenberg's theory for the eddy diffusivity in decaying turbulence applied to the residual layer. **Il Nuovo Cimento C**, v.26 C n.1, p.39 - 51. 2003.
- DEGRAZIA, G.A., ANFOSSI, D., CARVALHO, J.C., MANGIA, C., TIRABASSI, T. Turbulence Parameterization for PBL Dispersion Models in All Stability Conditions, **Atmospheric Environment**, v.34, p.3575 – 3583. 2000.
- DEGRAZIA, G.A., MOREIRA, D.M., VILHENA, M.T. Derivation of an Eddy Diffusivity Depending on Source Distance for Vertically Inhomogeneous Turbulence in a Convective Boundary Layer, **J. Applied Meteorol.**, v.40, p.1233-1240. 2001.
- DEGRAZIA, G.A., ANFOSSI, D. Estimation of the Kolmogorov constant from classical statistical diffusion theory, **Atmos. Environ.**, v.32, p.3611-3614. 1998.
- DEGRAZIA, G.A., CAMPOS VELHO, H.F., CARVALHO, J.C. Nonlocal Exchange Coefficients for the Convective Boundary Layer Derived from Spectral Properties, **Beitr. Phys. Atmosph.**, v.70, n.1, p.57-64. 1997.

- DEGRAZIA, G.A. e MORAES, O. L. L. A Model for Eddy Diffusivity in a Stable Boundary Layer, **Boundary-Layer Meteorol.**, v.58, p.205-214. 1992.
- ETLING, D. On Plume Meandering under Stable Stratification, **Atmospheric Environment**, v.8, p.1979-1985. 1990.
- FRENKIEL, F.N. Turbulent diffusion: mean concentration distribution in a field of homogeneous turbulence. **Adv. Appl. Mech.**, v.3, p.61-107. 1953.
- FRISCH, U. *Turbulence*, Cambridge Press, U.K., 296 pp. 1995.
- GIFFORD, F. A. A Simultaneous Lagrangian-Eulerian Turbulence experiment, **Monthly Weather Review**, v.83, p.293-301. 1955.
- GOULART, A., DEGRAZIA, G., RIZZA, U., ANFOSSI, D. A theoretical model for the study of convective turbulence decay and comparison with large-eddy simulation data, **Boundary-Layer Meteorology**, v.107, p.143-155. 2003.
- GOULART, A., DEGRAZIA, G.A., ANFOSSI, D. e ACEVEDO, O. Modeling and eddy diffusivity for convective decaying turbulence in the residual layer, 15<sup>th</sup> Symposium on Boundary layers and turbulence American Meteorological Society, 267-268. 2002.
- HANNA, S. Lagrangian e Eulerian Time-Scale in the Daytime Boundary layer, **J. Appl. Meteorol.**, v.20, p.242-249. 1981.
- HANNA, S. Applications in air pollution modeling. Atmospheric turbulence and Air Pollution Modeling, **F.T.M. Nieuwstadt and H. von Dop, Eds., D. Reidel Publishing**, p.275-310. 1982.
- HAY, J. S. e PASQUILL, F. Diffusion from a continuous source in relation to the spectrum and scale of turbulence, Atmospheric Diffusion and Air Pollution, eds., F. N. Frenkiel and P. A. Sheppard, Academic Press, New York, Advances in Geophysics, 1959. 345 p.
- HINZE, J.O. *Turbulence*, Mc Graw Hill. 1975.
- HOJSTRUP, J. Velocity spectra in the unstable planetary boundary layer, **J. Atmos. Sci**, v.33, p.2152-2169. 1982.
- KAIMAL, J.C., FINNINGAN, J.J. *Atmospheric Boundary Layer Flows*, Oxford University Press, Oxford, 1994, 289 p.
- KOLMOGOROV, A.N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number, *Dokl. Akad. Nauk. Nauk SSSR*, v.30, p.9-13, 1941a. (reprinted in *Proc. R. Soc. Lond. A* 434, 9-13 (1991).
- KOLMOGOROV, A.N. On degeneration (decay) of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid, *Dokl. Akad. Nauk. Nauk SSSR*, v.31, p.538-540. 1941b.

- KOLMOKOROV, A.N. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, v.32, p.16-18, 1941c. (reprinted in *Proc. R. Soc. Lond. A* 434, 15-17 (1991)).
- KRISTENSEN, L., LENCHOW, D., KIRKEGAARD, P. e COURTNEY, M. The spectral velocity tensor for homogeneous boundary layer, ***Boundary-Layer Meteorology***, v.47, p.149-193. 1989.
- LINES, I.G., DEAVES, D.M., ATKINS, W.S. Practical modeling of gas dispersion in low wind speed conditions, for application in risk assessment, ***J. Hazardous Materials***, v.54, p.201-226. 1997.
- MONIN, A.S. & YAGLOM, A.M. *Statistical Fluid Mechanics*, 2, ed. J. Lumley. MIT Press, Cambridge, MA. 1975.
- NIEUWSTADT, F.T.M., BROST, R.A. The decay of convective turbulence. ***J. Atmos. Sci.*** v.43, p.532-546. 1986.
- OLESEN, H.R., LARSEN S.E., e HOJSTRUP J. Modelling velocity spectra in the lower part of the planetary boundary layer, ***Boundary-Layer Meteorology***, v.29, p.285-312. 1984.
- PAO, Y.H. Structure of Turbulent Velocity and Scalar Fields at Large Wavenumbers, ***The Physics of Fluids***, v.8, p.1063-1075. 1965.
- PASQUILL, F. *Atmospheric Diffusion* (2<sup>nd</sup> edn.), Ellis Horwood Ltd., Chichester, 228p.
- RODEAN H. C. *Stochastic Lagrangean Models of Turbulent Diffusion*, American Meteorological Society, Boston, 1996, 48 p.
- SORBJAN, Z. *Structure of the Atmospheric Boundary Layer*, Prentice Hall, NJ, 1989, 317 p.
- STULL, R.B. *An introduction to Boundary Layer Meteorology*, Kluwer Academic Publishes, Boston, 1988, 666 p.
- TAYLOR, G.I. Diffusion by continuous movements. ***Proc. London Math. Soc.***, v.20: p.196-212. 1921.
- TENNEKES, H. Similarity relation, scaling laws and spectral dynamics, In: **Nieuwstadt F.T.M., H. van Dop (Eds.) Atmospheric Turbulence and Air Pollution Modeling**, Reidel, Dordrecht, p.37-68. 1982,
- WANDEL, C.F., HANSEN, O.K. On the Eulerian-Lagrangian Transform in the Statistical Theory of Turbulence, ***Journal of Geophysical Research***, v.67, p.3089-3093. 1962.
- WILSON, R.B., START, G.E., DICKSON, C.R., RICKS, N.R. Diffusion under low wind speed conditions near Oak Ridge, Tennessee. NOAA Technical Memorandum ERL ARL-61, 1976, 83 p.