

MODELAGEM MATEMÁTICA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR NUM TROCADOR NÃO ESTACIONÁRIO “AR + SOLO”

Anai Lurdes De Boni

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ) - Mestrado em Modelagem Matemática
Rua São Francisco, 501, Ijuí, RS - 98700-000
e-mail: deboni@mksnet.com.br

Viktor Georgievich Krioukov

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ) - Departamento de Tecnologia
Rua São Francisco, 501, Ijuí, RS - 98700-000
e-mail: krioukov@main.unijui.tche.br

Luiz Carlos Martinelli Junior

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ) - Departamento de Tecnologia
Rua São Francisco, 501, Ijuí, RS - 98700-000
e-mail: martinel@main.unijui.tche.br

Resumo. O trabalho tem o objetivo de desenvolver o modelo matemático de um trocador de calor não estacionário “Ar + Solo”. Este trocador pretende aproveitar a temperatura de subsolo (que é quase constante durante o ano) para manter a temperatura agradável dentro de edifício com pequenos gastos de energia. A efetividade do trocador depende de vários fatores: diâmetro, comprimento do tubo, condutibilidade térmica, calor específico, densidade do solo e também o período de trabalho. O modelo matemático desenvolvido considera: fluxo do ar pela tubulação, levando em conta o atrito e transferência do calor, difusão do calor pelo solo (com variação da condutibilidade térmica), evolução da temperatura do ar na saída do trocador. Este modelo consiste de um sistema de EDO's e EDP's. As simulações numéricas mostram a possibilidade de alterar a temperatura do ar com $\Delta t \approx 10^\circ\text{C}$ durante 10 horas com perdas hidráulicas insignificantes.

Palavras-chave: Aproveitamento de energia, transferência de calor, ar, solo, modelagem matemática.

1. Introdução

As observações duradouras sobre o tempo nas regiões do Rio Grande do Sul, Santa Catarina e Paraná mostram que durante o ano a temperatura pode variar entre -5°C e 40°C .

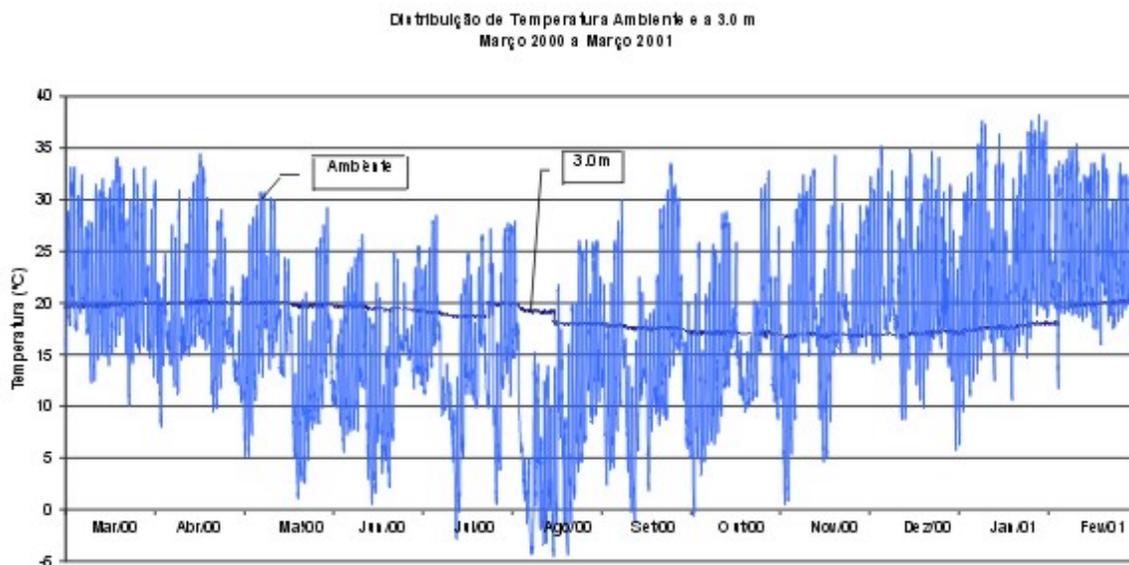


Figura 1. Distribuição de temperatura de atmosfera e subsolo (3m de profundidade) de 03/2000 até 03/2001

Por isso, para ter condições de temperatura favoráveis nas residências e nos comércios é necessário usar resfriadores ou aquecedores para manter a temperatura agradável; estes possuem custo muito alto e exigem consumo elevado de energia elétrica. Mas na mesma região estes gastos podem ser reduzidos se for usada a energia térmica do subsolo. Em particular, as pesquisas experimentais apresentadas por Martinelli et all (2000) mostram que durante o ano a temperatura do subsolo na profundidade de 2,5 a 3m é quase constante alterando no intervalo ($T_s = 20^{\circ}\text{C} \dots 25^{\circ}\text{C}$).

As Figuras (1, 2) exibem as alterações das temperaturas do ar (T_a) e do subsolo durante 12 meses na região da cidade de Panambi (RS). Como é visível a temperatura T_a altera-se durante este período entre 3°C e 39°C e por exemplo, durante um dia a temperatura pode variar de 35°C até 15°C ; (ou de 20°C até 5°C). Mas no mesmo período o solo altera-se somente de 17°C até 21°C (na profundidade de 2,5m). Baseado nesta propriedade (inércia do subsolo) Martinelli et all (2000) procurou criar um trocador de calor “ar + solo” Fig. (3).

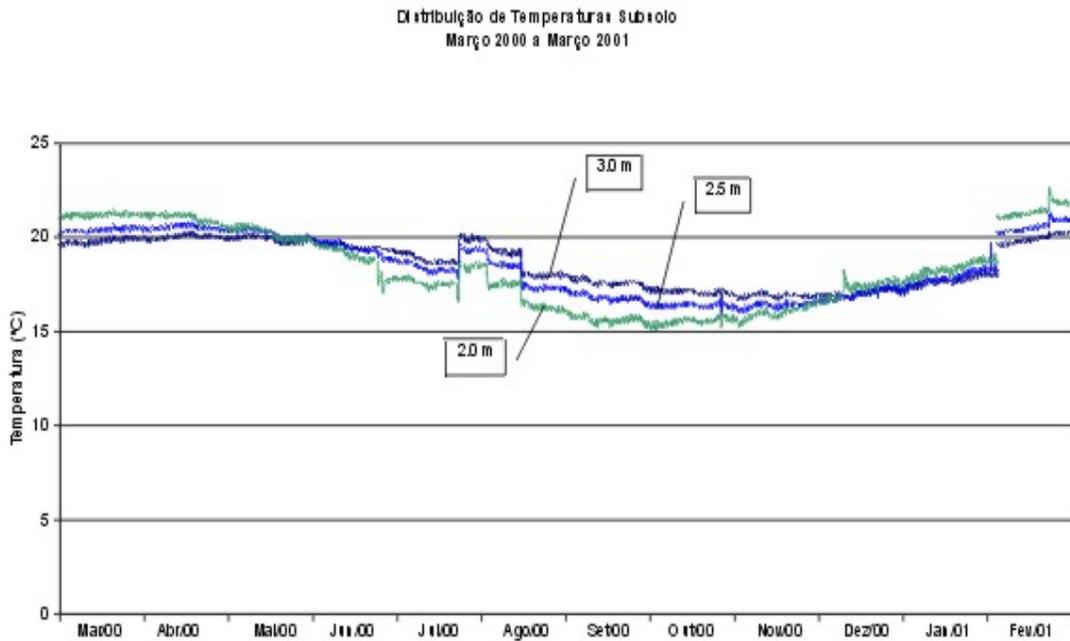


Figura 2. Distribuição de Temperatura a 2,0m, 2,5m e a 3,0m de profundidade de março de 2000 a março de 2001

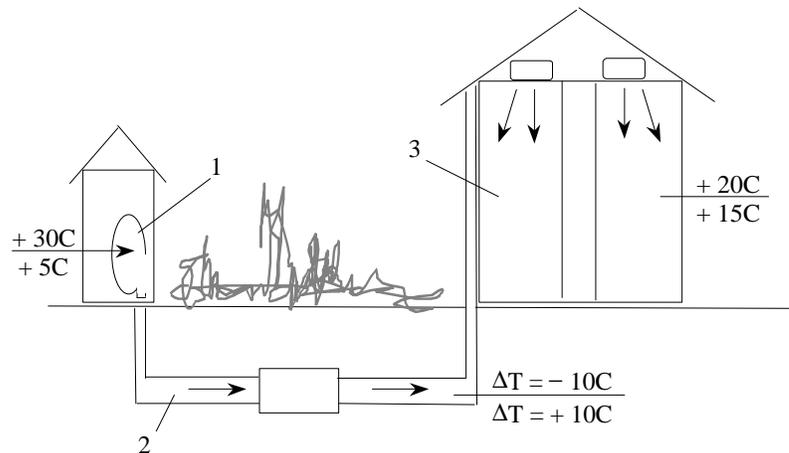


Figura 3. Idéia principal do resfriamento de calor “ar - subsolo”: 1 – ventilador; 2 – tubulação; 3 - edifício

Este trocador possui a estrutura simples que inclui um ventilador, um tubulação (instalada dentro do subsolo e provavelmente bastante comprida) e um objeto de resfriamento (ou aquecimento) – edifício ou casa. O princípio do funcionamento também é simples: o ar, sob a força de um ventilador, entra na tubulação, altera a sua temperatura e depois passa pelo edifício. No verão, o ar será resfriado e no inverno, ele será aquecido. Em comparação com os aparelhos usados habitualmente o trocador tem as seguintes vantagens:

- o conforto térmico com a amenização dos picos de temperatura (verão/inverno);
- uma geração de ruído no ambiente é quase nula – o ventilador é instalado longe do ambiente ventilado;
- a renovação do ar do ambiente conforme normas técnicas – a vazão de ar insuflada é bastante para substituir o ar viciado do ambiente;
- o baixo consumo de energia elétrica – a utilização de apenas um equipamento para o insuflamento do ar para vários ambientes distintos;
- a possibilidade de utilização tanto em ambientes industriais (de grande porte) como residenciais (de pequeno porte).

Para realizar este trocador, na realidade é necessário, preliminarmente, resolver alguns problemas:

- avaliar a taxa de transferência de calor entre tubulação e subsolo para diferentes diâmetros de tubos, materiais de solo, vazões de ar;
- determinar a evolução da temperatura do ar na saída do trocador e tempo de aquecimento (resfriamento) da camada do solo ao redor da tubulação;
- determinar o tempo da recuperação térmica desta camada quando o ar não passa por tubulação.

Apesar destes problemas puderem ser resolvidos experimentalmente, é evidente que este modo é bastante caro e na fase inicial de pesquisa seria bom aplicar a metodologia de modelagem matemática. O presente trabalho é dedicado a resolver alguns destes problemas por meio da criação de um modelo matemático de trocador “ar + subsolo” com a realização das simulações numéricas necessárias.

2. Modelo matemático e algoritmo de resolução

O esquema do trocador com a principal alteração das características apresenta-se na Fig. (4). Analisando os processos no trocador de calor admitimos que a temperatura do ar na atmosfera é $T_a = 30^\circ\text{C}$ e no solo a temperatura é $T_w(\tau, x, r) = 20^\circ\text{C}$. No primeiro período, o ar passando pelo tubo tem contato com a parede fria e no fim do tubo resfria-se significativamente. Mas com o tempo, T_w aumenta por causa da transferência de calor, no resultado a temperatura do ar no fim do tubo (T_f) cresce. O solo natural possui características não favoráveis para a transferência do calor: $\lambda_p = 0,3\text{W/m.K}$; $\rho_p = 1260\text{kg/m}^3$; $c^p = 770\text{J/(kg.K)}$ (De Vries, 1963; De Vries, 1975; Hillel, 1980). Por isso, ao redor do tubo numa camada, T_w pode conseguir valor alto e a diferença $(T - T_w)$ torna-se insignificante e o trocador pode funcionar com a baixa eficaz, ou seja, começando de um momento acontece a “saturação” térmica do trocador. Se este momento chegará mais rápido é necessário substituir ao redor do tubo alguma camada do solo natural por outro material com características melhores λ_p, ρ_p, c^p . Este modo aplica-se no resfriamento de cabos elétricos quando ao redor do cabo implanta-se o material de tipo “Backfill” (Damasceno, 1993; Damasceno & Prata, 1989). Para a prática também é preciso avaliar o tempo que é necessário (quando o trocador está parado) para a “recuperação” térmica do solo, ou seja, o seu retorno na temperatura inicial.

Então, no modelo matemático do trocador é preciso considerar:

- fluxo de ar pelo tubo com atrito e transferência de calor;
- transferência e distribuição do calor pelo subsolo;
- existência ao redor do tubo de 2-3 camadas de materiais diferentes;
- evolução da temperatura do subsolo depois da parada do trocador.

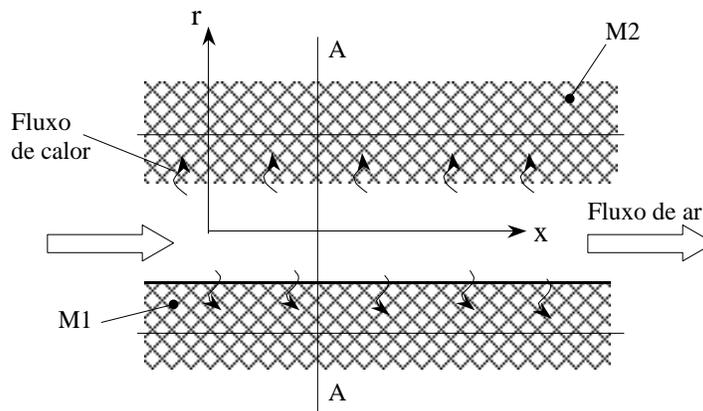


Figura 4. Esquema da troca de calor entre o ar e solo; M1 – material artificial, M2 – solo natural.

As grandezas conhecidas no modelo são: a vazão (G_a), a temperatura T_a , os parâmetros geométricos de tubo (L e D), as características termofísicas do ar (λ, c_p, η) e do solo (λ_p, ρ_p, c^p). É necessário determinar a evolução das características: a temperatura do ar ao longo do tubo e pelo tempo - $T(x, \tau)$; queda de pressão na tubulação - $\Delta P(x, \tau)$ e a distribuição da temperatura dentro do solo pelas coordenadas x e r - $T_w(x, r, \tau)$.

Na realização do modelo matemático (considerando que a temperatura do ar se altera ligeiramente ao longo do tubo), aceita-se as hipóteses simplificadas:

- fluxo pelo tubo é unidimensional e apresenta-se pelo conjunto dos estados estacionários (desprezando o termo $\partial/\partial\tau$ nas equações de movimento);
- dentro do solo desprezam-se os fluxos de calor pela direção x e a distribuição da temperatura $T_w(x, r, \tau)$ pelo solo considera-se como conjunto de distribuições unidimensionais $T_{wi}(r, \tau)$ pelas seções ortogonais (tipo A-A)
- na transferência de calor entre ar e solo, o tubo apresenta-se por conjunto de trechos ($i = 1 \dots n$) com temperaturas da parede uniforme em cada trecho mas com alteração pelo tempo.

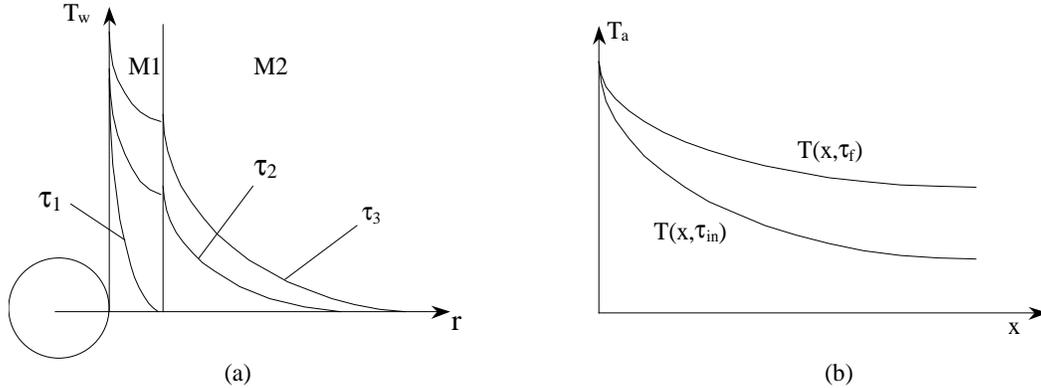


Figura 5. (a) Distribuição principal das temperaturas pelo solo (seção A-A, Fig. 4) em função de tempo. (b) caráter de alteração da temperatura de ar no tubo nos momentos inicial τ_{in} e final τ_f .

Então o sistema inicial das equações do movimento de ar (Sisson & Pitts, 1988) pode ser apresentada na forma:

- Equação de momento linear:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + f \frac{w^2}{2D} = 0 \quad (1)$$

- Equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + w \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

- Equação de energia:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + w \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{4h.B.(T - T_w(0, \tau))}{\pi D^2 \rho . c_p} = 0 \quad (3)$$

onde: w, ρ – velocidade e densidade do ar no tubo; f – fator de atrito; D, B – diâmetro e perímetro de tubo; h - coeficiente de transferência de calor.

Desprezando os termos $\partial/\partial\tau$ obtemos:

Equação de momento linear:

$$w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + f \frac{w^2}{2D} = 0 \quad (4)$$

Equação de continuidade:

$$w \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Equação de energia:

$$w \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{4h \cdot B \cdot (T - T_w(0, \tau))}{\pi D^2 \rho \cdot c_p} = 0 \quad (6)$$

Usando a equação do estado do gás ideal, este sistema pode ser reduzido (eliminando w e ρ) até as equações:
Equação de energia para i -ésimo trecho:

$$\frac{dT_i}{dx} = - \frac{h_i \cdot B_i \cdot (T_i - T_{wi}(0, \tau))}{G \cdot c_p} = -f_{Ti}; \quad i = 1 \dots n; \quad (7)$$

Equação de momento linear para i -ésimo trecho:

$$\frac{dP_i}{dx} = \left(\frac{f_{Ti}}{T_i} - \frac{f_i}{2D_i} \right) \left/ \left(\frac{A_i^2 P_i}{G^2 R T_i} - \frac{1}{P_i} \right) \right. = f_{pi} \quad (8)$$

onde: A_i – área de i -ésimo trecho do tubo; R – constante de gás do ar; G – vazão de ar.
Os coeficientes h_i determinam-se pelas fórmulas conhecidas (Sisson & Pitts, 1988):

$$h_i = \frac{\lambda_i}{D_i} 0,023 \text{Re}_i^{0,8} \text{Pr}^{0,33} \quad i = 1 \dots n; \quad (9)$$

O valor f determina-se pela fórmula:

$$f_i = \frac{8Nu_i \text{Pr}^{2/3}}{\text{Re}_i}; \quad (10)$$

usando a analogia de Reynolds.

As distribuições da temperatura T_{wi} dentro cada i -ésimo pedaço de solo descreve-se pela equação de transferência de calor dentro do solo:

$$\frac{\partial T_{wi}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\lambda_p}{\rho_p \cdot c_p} \frac{\partial T_{wi}}{\partial r} \right) + \frac{\lambda_p}{\rho_p \cdot c_p} \frac{1}{r} \frac{\partial T_{wi}}{\partial r} \quad i = 1 \dots n; \quad (11)$$

com condições de contorno:

$$h_i (T_i - T_{wi}) = -\lambda_p \left(\frac{\partial T_{wi}}{\partial r} \right) \quad (12)$$

$$T_{wi}(\tau, r = R_f) = T_{win} \quad (13)$$

onde R_f é um raio bastante grande quando a temperatura do solo não se altera ($R_f \approx 0,5\text{m}$).

Na resolução das Eqs. (7 e 8) usa-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem e os valores de P e T na saída do i -ésimo trecho são dados iniciais para entrada no $(i+1)$ -ésimo trecho. A Equação (11) integra-se usando o método de linhas quando uma EDP apresenta-se num sistema de EDO's por meio de discretização das variáveis espaciais deixando a derivada pelo tempo (Lambert, 1993; Van Der Houwen, 1996).

As Equações (7,8 e 11) integram-se em estreitos intervalos do tempo $\Delta\tau$ alternadamente. No início com a temperatura inicial $T_{wi}(r,0) = T_{win}$ integram-se as Eqs. (7 e 8) ao longo do tubo e determinam-se os valores $T_i(x,0)$. Usando-os integram-se as Eqs. (11) e calculam-se $T_{wi}(r,\Delta\tau)$. Depois de novo integram-se as Eqs. (7, 8) considerando as temperaturas na superfície de paredes $T_{wi}(0,\Delta\tau)$ e assim por diante até o tempo final.

3. Simulações Numéricas

Para as simulações numéricas foi escolhido um regime básico e seus parâmetros e características são apresentados na Tab. (1). A temperatura inicial do solo $T_{win} = 15^\circ\text{C}$; número de trechos $n = 4$; temperatura da atmosfera varia entre $5^\circ\text{C} \dots 30^\circ\text{C}$. Foram simuladas as evoluções das características do trocador para dois tipos do solo:

- solo natural (variante 1S);
- solo natural + Backfill que é situado na camada $\Delta r = 0,05\text{m}$ ao redor do tubo (variante 2S).

Tabela 1. Parâmetros e características do regime básico.

Parâmetros do ar e tubo				Propriedades termofísicas do ar			
D (m)	G_a (kg/s)	T_a (°C)	L (m)	c_p J/(kg K)	λ W/(m K)	ρ kg/m ³	η N s/m ²
0,15	0,2	30	20	1004	$2,6 \cdot 10^{-2}$	1,24	$1,8 \cdot 10^{-5}$
Solo natural				Solo artificial (Backfill)			
c_p J/(kg K)	λ_p W/(m K)	ρ_p kg/m ³	c_p J/(kg K)	λ_p W/(m K)	ρ_p kg/m ³		
770	0,3	1260	830	2	2000		

A Figura (6) mostra as alterações da temperatura do ar ao longo do trocador para temperaturas diferentes: $T_a = 30^\circ\text{C}$ (resfriamento) e $T_a = 5^\circ\text{C}$ (aquecimento). Observa-se que nestas condições a eficiência do trocador é baixa:

- no caso de resfriamento no momento inicial ($\tau = 0\text{h}$) $\Delta T = T_a - T_f = 5^\circ\text{C}$ e no fim de resfriamento ($\tau_f = 12\text{h}$) $\Delta T = 2^\circ\text{C}$;
- no caso de aquecimento temos respetivamente quando $\tau = 0\text{h}$, $\Delta T = 3^\circ\text{C}$ e se $\tau_f = 12\text{h}$, $\Delta T = 1^\circ\text{C}$.

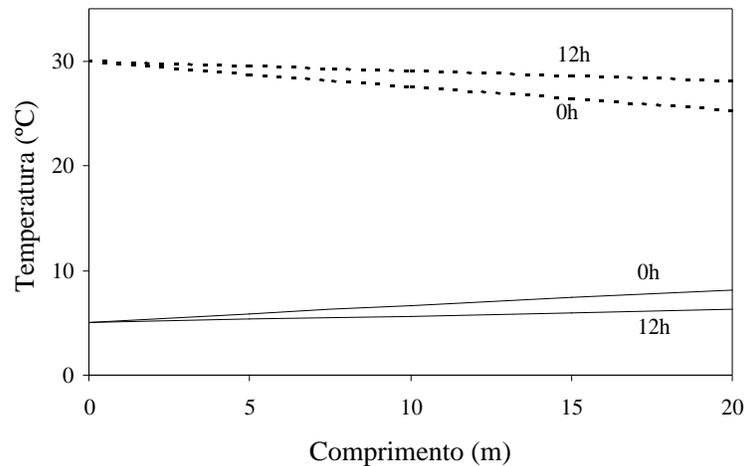


Figura 6. Resfriamento do ar ao longo do trocador “ar-solo” (1S, solo natural), $T_{ar}=30^\circ\text{C}$; (- - -), $T_{ar}=5^\circ\text{C}$ (—)

Existem vários modos para melhorar o rendimento, por exemplo, aumentar o comprimento L ; aumentar diâmetro D (mantendo $G_a = \text{const}$); substituir um tubo por conjunto de tubos com diâmetros menores; implantar aletas. Um dos modos principais é a substituição de um camada do solo natural por solo artificial com a condutibilidade térmica alta. As simulações desta variante foram realizadas e os resultados são apresentados na Fig. (7).

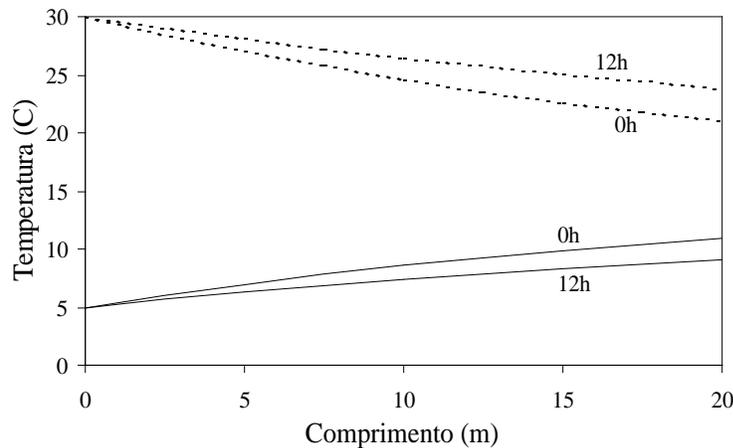


Figura 7. Resfriamento do ar ao longo do trocador “ar-solo” (2S, Backfill + solo natural), $T_{ar}=30^\circ\text{C}$ (- - -), $T_{ar}=5^\circ\text{C}$ (—).

É evidente que usando o solo artificial a eficiência do trocador aumenta, a saber:

- no caso de resfriamento temos para $\tau = 0h$; $\Delta T = 9^\circ C$ e para $\tau_f = 12h$; $\Delta T = 7^\circ C$;
- no caso de aquecimento - $\tau = 0h$; $\Delta T = 5^\circ C$ e para $\tau_f = 12h$; $\Delta T = 3^\circ C$.

Considerando estes resultados de ponto de vista do conforto ambiental pode-se observar que:

- o trocador já possui a eficiência para resfriar o ar até condições favoráveis para $\tau = 0h$, $T_f = 30 - 9 = 21^\circ C$ e para $\tau = 12h$, $T_f = 23^\circ C$;
- mas a sua eficiência ainda não é bastante para aquecer o ar no período do inverno para $\tau = 0h$, $T_f = 5 + 5 = 10^\circ C$ e para $\tau = 12h$, $T_f = 8^\circ C$.

Para o mesmo regime básico foram realizadas as simulações variando a vazão de ar. Na Figura (8) apresentam-se as dependências $T_f = f(G_a)$ nos momentos τ_0 e τ_f para casos 1S e 2S. Observa-se que estas dependências são não lineares principalmente para baixas vazões G_a . Também com a diminuição G_a aumenta-se a efetividade do trocador. Se $G_a = 0,05kg/s$ temos:

- no caso 1S para $\tau = 0h$; $\Delta T = 10^\circ C$ e para $\tau_f = 12h$; $\Delta T = 6^\circ C$;
- no caso 2S para $\tau = 0h$; $\Delta T = 13^\circ C$ e para $\tau_f = 12h$; $\Delta T = 11^\circ C$.

Quando $G_a < 0,2kg/s$ a evolução pelo tempo dos valores ΔT são menores para variante 2S. Por exemplo, para $G_a = 0,05kg/s$ no caso 2S temos $|\Delta T(\tau_0) - \Delta T(\tau_f)| = 2^\circ C$ e para variante 1S: $|\Delta T(\tau_0) - \Delta T(\tau_f)| = 6^\circ C$. Efeito contrário observa-se para $G_a > 0,2kg/s$.

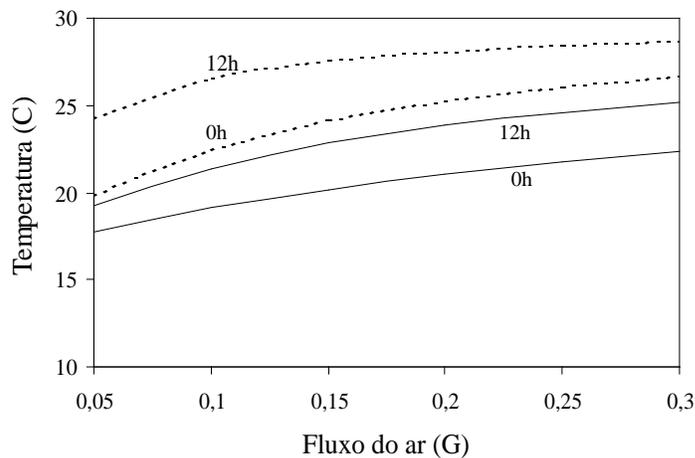


Figura 8. Dependência da temperatura do ar resfriado (T_f) em função da vazão do ar (---) - 1S; (—) - 2S.

4. Conclusões

Foi desenvolvido o modelo matemático para um trocador de calor não estacionário “Ar + Solo” que considera: o fluxo de ar pelo tubo com atrito e transferência de calor; a transferência e distribuição do calor pelo subsolo; a variedade da condutibilidade térmica de solo.

O modelo apresenta-se pelo sistema de EDP's e EDO's que se resolve pelo método de linhas. O código correspondente é escrito na linguagem C++.

As primeiras simulações numéricas realizadas para um regime “básico” mostram que:

- para a variante de solo natural (1S) a eficiência do trocador é baixa;
- mas para variante 2S (solo natural + Backfill) o rendimento é mais alto e o trocador pode ser usado para o resfriamento do ar em edifícios e casas;
- com o aumento da vazão do ar a sua temperatura na saída (T_f) está crescendo diminuindo o rendimento do trocador.

5. Referências

- Damasceno Ferreira, L.S. and Prata, A.T., 1989, "Evaluation of Parametric Model for Heat and Mass Transfer in Unsaturated Porous Media", Multi - Phase Transport & Particulate Phenomena, Vol. 1, Ed. by T. Nejat Veziroglu, Hemisphere Publishing Corporation, New York.
- Damasceno Ferreira, L.S., 1991, "Transferência de Calor e Migração de Umidade em Solos que Envolvem Cabos de Potências Aterrados", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina.
- De Vries, D.A., 1975, "Heat Transfer in Soils, Heat and Mass Transfer in Biosphere", Scripta, Washington, pp. 5-28.
- De Vries, D.A., 1963, "Thermal Properties in Soils", Physics of Plant Environment, Ed. North-Holland Publishing Co., Amsterdam.
- Hillel, D., 1980, "Fundamentals of Soils Physics", Academic Press, New York.

- Lambert, J.D., 1993, “Numerical Methods for Ordinary Differential Systems”, John Wiley Sons.
- Martinelli, Jr. L.C., 2000, “Estudo da Relação entre Temperatura Ambiente e Temperaturas do Solo em Diferentes Profundidades (Sistema de Climatização de Baixo Custo-Trocador de Calor em Subsuperfície)”, Mercofrio-2000, Porto Alegre-RS, Brasil.
- Sisson, L.E., Pitts, D.R., 1988, “Fenômenos de Transporte”, Rio de Janeiro: Guanabara.
- Van Der Houwen, P.J., 1996, “The Development of Runge-Kutta Methods for Partial Differential Equations”, Applied Numerical Mathematics, Vol. 20, pp. 261-272.

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT TRANSFER FOR EXCHANGER NON STATIONARY “AIR + SOIL”

Anai Lurdes De Boni

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ) - Mestrado em Modelagem Matemática
Rua São Francisco, 501, Ijuí, RS - 98700-000
e-mail: deboni@mksnet.com.br

Viktor Georgievich Krioukov

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ) - Departamento de Tecnologia
Rua São Francisco, 501, Ijuí, RS - 98700-000
e-mail: kriukov@main.unijui.tche.br

Luiz Carlos Martinelli Junior

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ) - Departamento de Tecnologia
Rua São Francisco, 501, Ijuí, RS - 98700-000
e-mail: martinel@main.unijui.tche.br

Abstract. *This work has aim to develop the mathematical model of a heat exchanger non-stationary "Air + Soil ". This heat exchanger intends to use of the subsoil temperature (that is almost constant during of year) to maintain the convenient temperature inside of building with small energy expenses. The heat exchanger yield depends on several factors: diameter and length of tube; thermal conductivity, specific heat and density of soil; time work. The developed mathematical model considers: air tube flow with the attrition and heat transfer, soil heat diffusion (with variation of the thermal conductivity), air temperature evolution of the heat exchanger exit. This model consists of a EDO's and EDP's system. The numeric simulations show the possibility to change the air temperature until $\Delta T = 10^{\circ}\text{C}$ during 10 hours with insignificant hydraulic losses.*

Keywords: *Energy improvement, heat transfer, air, soil, mathematical modeling.*

This document was created with Win2PDF available at <http://www.daneprairie.com>.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.