

## METODOLOGIA EULERIANA-LAGRANGEANA PARA A RESOLUÇÃO DE ESCOAMENTO EM DOMÍNIOS COM FRONTEIRAS IRREGULARES

**Viviana Cocco Mariani**

Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus Torres, Universidade Tuiuti do Paraná - UTP  
Av. Comendador Franco, 1860, CEP 80215-090, Curitiba, PR, Brasil.  
[viviana.mariani@utp.br](mailto:viviana.mariani@utp.br)

**Alvaro Toubes Prata**

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, CEP 88040-900, Florianópolis, SC, Brasil.  
[prata@nrva.ufsc.br](mailto:prata@nrva.ufsc.br)

**Resumo.** No presente trabalho um método misto Euleriano-Lagrangeano é descrito e aplicado para resolver o escoamento incompressível, laminar, isotérmico e em regime permanente, em domínios que apresentam fronteiras irregulares entre o fluido e o sólido. As equações são resolvidas em uma malha fixa usando o armazenamento colocalizado das variáveis. A fronteira irregular entre o fluido e o sólido é tratada explicitamente através de marcadores de partículas, usando a técnica dos volumes cortados (*cut-cell*). O método dos volumes finitos é utilizado em conjunção com um procedimento de segunda ordem para avaliar os fluxos nos volumes interfaciais. A precisão e eficiência da metodologia Euleriana-Lagrangeana é demonstrada resolvendo três problemas envolvendo fronteiras irregulares estacionárias.

**Palavras chave:** metodologia Euleriana-Lagrangeana, cavidade quadrada, cavidade triangular, difusor radial, método dos volumes finitos.

### 1. Introdução

Muitos fenômenos físicos envolvem interfaces que, devido a instabilidades ou influências externas, sofrem deformações severas tal como dilatação, compressão, fragmentação e colisão. Por exemplo, sob condições usuais em processos de solidificação, a interface entre sólido e fluido raramente mantém um estado planar. A física envolvida em tais processos exige dedicação no tratamento da interface. Estas questões podem ser muito complexas porque em muitos casos as fronteiras são deformáveis e móveis. O presente trabalho descreve uma técnica computacional Euleriana-Lagrangeana que pode ser utilizada na modelagem de fronteiras irregulares estacionárias ou móveis.

Na metodologia Euleriana-Lagrangeana a interface é modelada explicitamente através de marcadores de partículas, a malha computacional é fixa e a topologia é independente da interface (Udaykumar *et al.*, 1996). No presente trabalho para reconstruir o contorno irregular nas fronteiras entre fluido e sólido, o método dos volumes cortados (*cut-cell*) é utilizado. Neste método os volumes interfaciais arbitrariamente pequenos são redistribuídos entre os volumes vizinhos, recebendo um tratamento especial.

Os parâmetros geométricos necessários para identificar os volumes interfaciais são abordados no presente trabalho e os fluxos convectivos e difusivos, passando através das faces destes volumes são avaliados por um polinômio quadrático em uma direção preservando a precisão de segunda ordem (Ye *et al.*, 1999).

O objetivo do presente trabalho é descrever a metodologia Euleriana-Lagrangeana e mostrar a sua eficiência para isto resolve-se o escoamento em três problemas: cavidade quadrada com a base deformada por uma função cosenoidal, cavidade triangular e um difusor radial com geometria irregular. São apresentados perfis de pressão, velocidades e linhas de corrente. Os resultados são comparados com resultados disponíveis na literatura ou com resultados experimentais.

### 2. Método Euleriano-Lagrangeano

Nesta classe de métodos a interface é modelada explicitamente como curvas (ou superfícies no espaço tridimensional). Os cálculos são executados em uma malha fixa cuja topologia é independente daquela da interface. Um exemplo deste método é a técnica de fronteira imersa utilizada em problemas envolvendo vários fluidos (Udaykumar *et al.*, 1999) e em problemas entre dois fluidos (Peskin, 1977).

O método Euleriano-Lagrangeano trata explicitamente a interface e, transmite a informação da mesma para as equações governantes como os métodos Eulerianos, considerando a descontinuidade cruzando-a. Existem métodos que reconstróem o domínio computacional enfatizando a fronteira irregular, entre estes: o método da fronteira imersa (Peskin, 1977), o método dos volumes cortados (Quirk, 1994; Udaykumar *et al.*, 1996) e o método do domínio fictício (Glowski *et al.*, 1994).

No presente trabalho o método dos volumes cortados é adotado e o cálculo dos fluxos é realizado de uma forma especial, a fim de conservar as propriedades passando pelas faces dos volumes interfaciais.

A identificação dos volumes interfaciais é um aspecto importante no emprego do método Euleriano-Lagrangiano. Aos volumes interfaciais estão associados dois marcadores. Sob algumas circunstâncias um volume interfacial pode ter mais que dois marcadores de interface indicando que a malha está grosseira. Neste caso é necessário refinar a malha localmente, a fim de obter um melhor resultado para a representação da fronteira. A Fig. (1) ilustra exemplos de volumes interfaciais, no segundo volume a malha ainda está grosseira, porque a interface corta o volume em mais que dois pontos, logo a malha deve ser refinada.

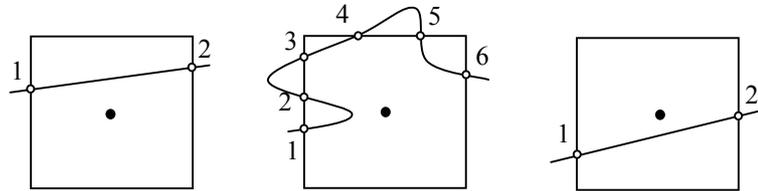


Figura 1. Pontos de interseção nos volumes interfaciais.

Existem 16 tipos de volumes interfaciais básicos, assim como existem algumas variantes destes, classificados de acordo com o corte da função interfacial. O tipo de volume é geralmente determinado pelo primeiro e último ponto de interseção (marcadores interfaciais) como mostrado na Fig. (2). Os marcadores de cada volume de controle interfacial devem ser armazenados. No presente trabalho a posição dos marcadores interfaciais é obtida pela interseção do segmento da função interfacial com as linhas verticais da malha. Na Fig. (2) estes marcadores são representados pelos índices  $f_{xu}(i)$  e  $f_{xu}(i+1)$ . Na mesma figura os parâmetros  $x_{médio}$  e  $y_{médio}$  estão ilustrados. Estes parâmetros representam as coordenadas do ponto médio do segmento interfacial.

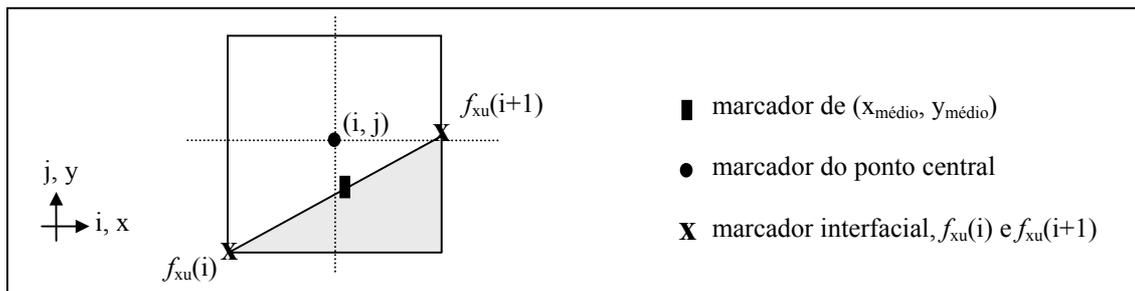


Figura 2. Marcadores no volume de controle interfacial.

A função que modela a interface é avaliada no centro e nas faces do volume de controle como  $f_{xa}(i)$  e  $f_{xu}(i)$ , respectivamente. Outro aspecto importante no acompanhamento da interface consiste em identificar a fase de cada volume de controle. Segundo Udaykumar e Shyy (1995) a fase de cada volume de controle pode ser identificada percorrendo todas as colunas da malha computacional, começando desde  $j = 1$ , onde um indicador é inicializado para sólido. Encontrando um volume cortado por um segmento interfacial, determina-se onde o segmento cortou o volume. Três casos são possíveis, conforme observado na Fig. (3) e descrito a seguir,

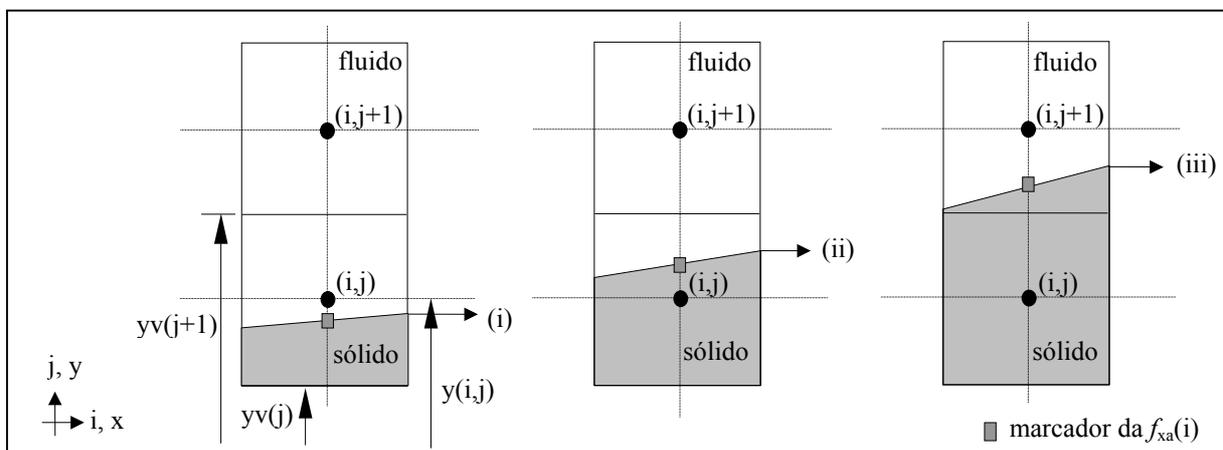


Figura 3. Identificação da fase dos volumes de controle interfacial.

- (i) Como  $f_{xa}(i)$  é inferior a  $y(i, j)$  o ponto nodal  $(i, j)$  é identificado como fluido. No programa computacional assume-se 0 para fluido e 1 para sólido.
- (ii) Como  $f_{xa}(i)$  é superior a  $y(i, j)$  e é inferior a  $yv(j+1)$ , o ponto nodal  $(i, j)$  é identificado como sólido, contudo existe uma porção do volume  $(i, j)$  que será incorporada por um volume vizinho.
- (iii) Como a linha vertical, que cruza a metade do volume  $(i, j)$ , não é cortada pelo segmento interfacial no volume  $(i, j)$ , o indicador do volume  $(i, j)$  permanece como sólido, e identifica-se o volume  $(i, j+1)$  como fluido.

O procedimento de identificar a fase dos volumes de controle deve ser repetido em cada coluna da malha numérica. Encontrando um volume interfacial deve-se modificar os demais volumes da mesma coluna, passando-os para fluido, desde que a curva interfacial não intercepte a malha mais a cima, na mesma coluna.

### 3. Cálculo dos Fluxos Interfaciais

Descreve-se, nesta seção, como calcular os fluxos dos volumes interfaciais, assumindo que a interface está entre fluido e sólido, podendo também ser aplicável com fronteiras entre fluido e fluido. O tratamento deste volume interfacial é feito de acordo com os trabalhos de Udaykumar *et al.* (1996) e Ye *et al.* (1999).

Os volumes cortados pela interface, cujo centro é fluido, são reformulados descartando a parte que está na região sólida. Já os volumes cortados pela interface cujo centro é sólido, são absorvidos pelos volumes de fluido vizinhos (Ye *et al.*, 1999). Tal prática resulta na formação de volumes de controle trapezoidais, com diversos formatos. Dependendo da posição e orientação local da interface volumes trapezoidais com três, quatro ou cinco lados podem ser formados.

A avaliação dos fluxos de massa: convectivos e difusivos, e dos gradientes de pressão nos volumes interfaciais, deve ser realizada com esmero. Em uma malha uniforme os fluxos e os gradientes de pressão, avaliados no centro das faces dos volumes, podem ser calculados com precisão de segunda ordem usando uma aproximação linear entre os valores nos centros dos volumes vizinhos. Nos volumes interfaciais, muitas vezes, o centro das faces do volume não está em linha com o centro dos volumes vizinhos. Conseqüentemente precisa-se de um procedimento que avalie estas quantidades no centro das faces com precisão adequada.

Segundo Ye *et al.* (1999), pode-se usar uma função de interpolação polinomial bidimensional, obtendo uma aproximação com precisão de segunda ordem para os fluxos e os gradientes nas faces dos volumes trapezoidais, usando os valores disponíveis no centro dos volumes vizinhos. Descreve-se a seguir a interpolação para um volume trapezoidal típico, por exemplo, o volume ABCDE, mostrado na Fig. (4). Neste volume de controle a interface intercepta as faces norte e sudeste.

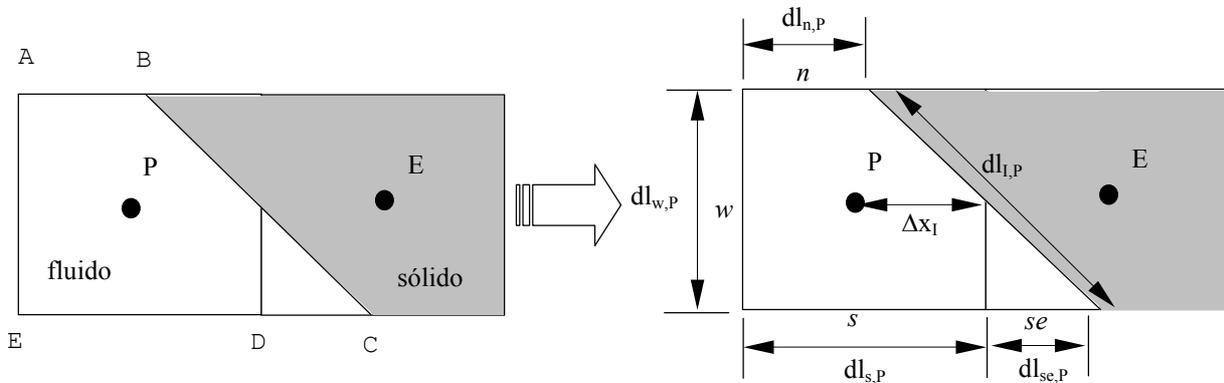


Figura 4. Volume de controle interfacial.

Para o escoamento laminar, incompressível, isotérmico e em regime permanente a equação em coordenadas cartesianas para a variável genérica  $\phi$  que rege o escoamento é

$$\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S^\phi, \quad (1)$$

Discretizando a Eq. (1) através do método dos volumes finitos, no volume ilustrado na Fig. (4), e substituindo os fluxos convectivos por  $F = (\rho u \mathbf{dl})$ , obtém-se a Eq. (2),

$$\begin{aligned} -F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s - F_{se} \phi_{se} + (\rho u_n \phi)_I dl_{I,P} = & - \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w dl_{w,P} + \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n dl_{n,P} - \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s dl_{s,P} + \\ & - \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{se} dl_{se,P} + \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_I dl_{I,P} + \bar{S}^\phi. \end{aligned} \quad (2)$$

O valor da variável no centro do segmento interfacial é obtido das condições de contorno do tipo Dirichlet, não sendo necessário uma função de interpolação para obtê-la. No presente trabalho a condição de não deslizamento é prescrita na interface, assim  $\phi_I = 0$  para  $\phi = u$  ou  $v$ .

Subtraindo do lado esquerdo da Eq. (2) a equação da conservação da massa discretizada

$$-(\rho u)_w dl_{w,P} + (\rho v)_n dl_{n,P} - (\rho v)_s dl_{s,P} - (\rho v)_{se} dl_{se,P} = 0, \tag{3}$$

multiplicada por  $\phi_p$ , substituindo os fluxos total por  $J = [\rho \mathbf{u} \phi - \Gamma^\phi (\partial \phi / \partial \mathbf{n})] dl$  e organizando os termos obtém-se

$$-(J_w - F_w \phi_p) - (J_s - F_s \phi_p) + (J_n - F_n \phi_p) = (J_{se} - F_{se} \phi_p) + \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \right)_I dl_{I,P} + \bar{S}^\phi. \tag{4}$$

A face CDE do volume trapezoidal é composta de duas partes, CD e DE. A integral nesta face é decomposta como

$$\int_{CE} f dx = \int_{CD} f dx + \int_{DE} f dx. \tag{5}$$

Uma aproximação de segunda ordem para esta integral é obtida por

$$\int_{CE} f dx \approx f_{se}(x_C - x_D) + f_s(x_D - x_E), \tag{6}$$

onde  $f_{se}$  e  $f_s$  são calculados no centro dos segmentos CD e DE, respectivamente.

A face AB é menor que a face do volume de controle padrão, e a integral é aproximada por,

$$\int_{AB} f dx \approx f_n(x_B - x_A), \tag{7}$$

onde  $f_n$  é o fluxo calculado no centro do segmento AB. Os volumes que não estão na interface (volumes cheios) têm os valores no centro das faces avaliados com precisão de segunda ordem por uma aproximação linear simples (Patankar, 1980). A aproximação por diferença central não pode ser usada para volumes interfaciais, porque muitas vezes os pontos nodais vizinhos podem estar na região sólida. Na Fig. (4) os pontos nodais norte e leste estão na região sólida e não podem ser usados na avaliação de  $f_{se}$  e  $f_n$ . Entretanto, se todos os pontos nodais vizinhos são viáveis não é evidente que um esquema com precisão de segunda ordem pode ser construído, porque o fluxo pode não estar localizado na linha que une o centro dos volumes vizinhos. Assim, por exemplo, a interpolação diferença central não pode aproximar os fluxos com precisão de segunda ordem necessitando de uma interpolação diferente, para avaliá-los. Uma opção é expressar os fluxos, tal como,  $f_{se}$  e  $f_n$ , em termos de uma função de interpolação polinomial bidimensional em uma direção. Assim,  $f_{se}$  é aproximado expressando  $\phi$  em termos de uma função que é linear em  $y$  e quadrática em  $x$ , ao longo da região trapezoidal indicada na Fig. (5b) (Ye *et al.*, 1999), conforme Eq. (8),

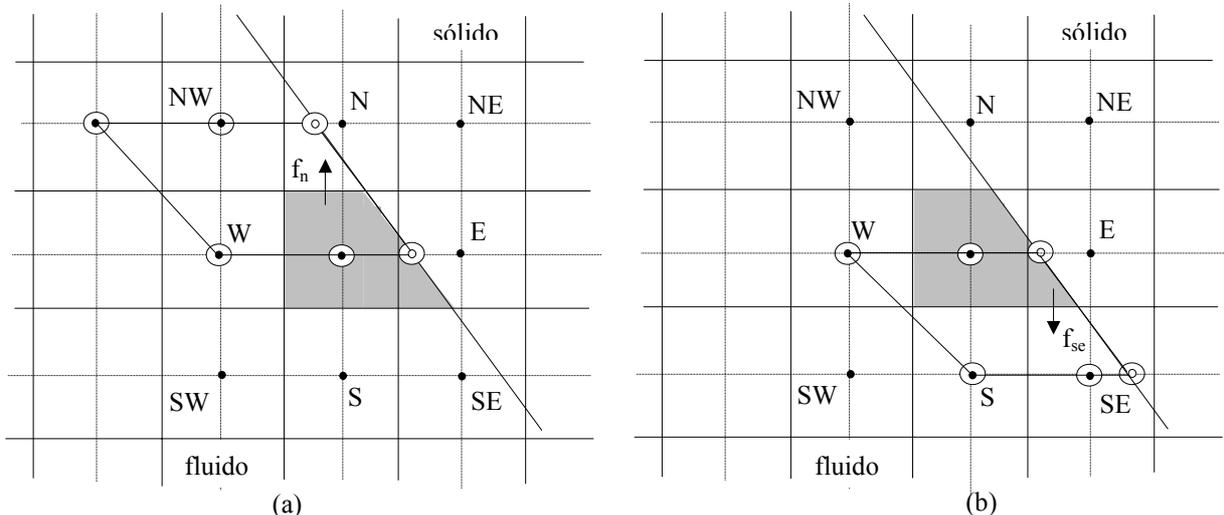


Figura 5. Extensão usada no cálculo do (a) fluxo  $f_n$  e (b) fluxo  $f_{se}$  no volume interfacial.

$$\phi = c_1 x^2 y + c_2 x^2 + c_3 xy + c_4 x + c_5 y + c_6. \quad (8)$$

onde  $c_1$  a  $c_6$  são coeficientes desconhecidos. Se  $f_{se}$ , por exemplo, envolve a derivada normal de  $\phi$ , obtém-se o valor diferenciando a função de interpolação, isto é,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = c_1 x^2 + c_3 x + c_5. \quad (9)$$

A razão para escolher a Eq. (8) como uma função de interpolação para avaliação de  $f_{se}$  deve-se ao fato de que a avaliação da derivada na face do volume também pode ser obtida com precisão de segunda ordem conforme demonstrado por Ye *et al.* (1999), nota-se que a face CD está situada entre os lados paralelos do trapezóide, ilustrado na Fig. (5b). Na mesma figura observa-se que os lados do trapezóide em que a interpolação é executada, passam através de quatro pontos nodais e dois pontos na interface. Conseqüentemente, os seis coeficientes desconhecidos na Eq. (8) são expressos em termos da variável  $\phi$  nestes seis locais, isto é,  $c_n$  contém os valores de  $\phi_j$  para  $j = 1, \dots, 6$ . Obtém-se  $c_n$  usando, por exemplo, um método direto, como eliminação de Gauss. Obtidos os valores de  $c_n$  então  $\phi$  e  $(\partial\phi/\partial y)$  são expressos no centro da face CD por,

$$\phi_{se} = c_1 x_{se}^2 y_{se} + c_2 x_{se}^2 + c_3 x_{se} y_{se} + c_4 x_{se} + c_5 y_{se} + c_6, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{se} = c_1 x_{se}^2 + c_3 x_{se} + c_5. \quad (11)$$

Um procedimento similar é usado para aproximar  $f_n$ , na face AB do volume interfacial. Uma função de interpolação linear quadrática é usada na região trapezoidal, mostrada na Fig. (5a) e equações semelhantes a (10) e (11) são obtidas. Os seis pontos utilizados na função de interpolação são mostrados na mesma figura. Podem surgir volumes de fronteira cujas faces leste e/ou oeste são cortadas pelo segmento interfacial. Nestes volumes a função de interpolação linear em  $x$  e quadrática em  $y$  é utilizada.

Em geral, ambos os fluxos, convectivo e difusivo, são necessários no segmento da interface requerendo a aproximação do valor das variáveis e da derivada normal no centro do segmento interfacial. O valor da variável é obtido das condições de contorno do tipo Dirichlet ( $\phi_i=0$ ), não sendo necessário uma função de interpolação, já a derivada normal na face BC do volume mostrado na Fig. (4), por exemplo, é decomposta como,

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_I = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_I n_x + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_I n_y, \quad (12)$$

onde  $n_x$  e  $n_y$  são as componentes do vetor normal unitário, na face BC. Como a forma da interface é conhecida,  $n_x$  e  $n_y$  são conhecidos. Contudo, o cálculo da derivada normal requer a estimativa de  $(\partial\phi/\partial x)_I$  e  $(\partial\phi/\partial y)_I$  no centro da face.

Assim,  $(\partial\phi/\partial x)_I$  é calculado utilizando a variação de  $\phi$  ao longo da linha horizontal, Fig. (6a), em termos de uma função quadrática em  $x$

$$\phi = b_1 x^2 + b_2 x + b_3. \quad (13)$$

Os coeficientes da função de interpolação são expressos em termos dos valores de  $\phi$  nos três pontos indicados na Fig. (6a). A derivada na direção  $x$  no centro da face BC é avaliada como

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_I = 2b_1 x_I + b_2. \quad (14)$$

O cálculo de  $(\partial\phi/\partial y)_I$  não é simples. O procedimento é similar ao realizado para obter  $(\partial\phi/\partial y)_{se}$  e  $(\partial\phi/\partial y)_n$  resultando na seguinte expressão,

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_I = d_1 x_I^2 + d_3 x_I + d_5, \quad (15)$$

onde os coeficientes  $b_i$ 's e  $d_i$ 's dependem da localização e orientação da interface na vizinhança do volume em consideração. Finalmente combinando as Eqs. (14) e (15) tem-se a expressão para o gradiente normal na interface CD da

Fig. (4). Observa-se que dos nove pontos utilizados nas Eqs. (14) e (15), três estão na interface, e seus valores são conhecidos pela condição de contorno, condição prescrita.

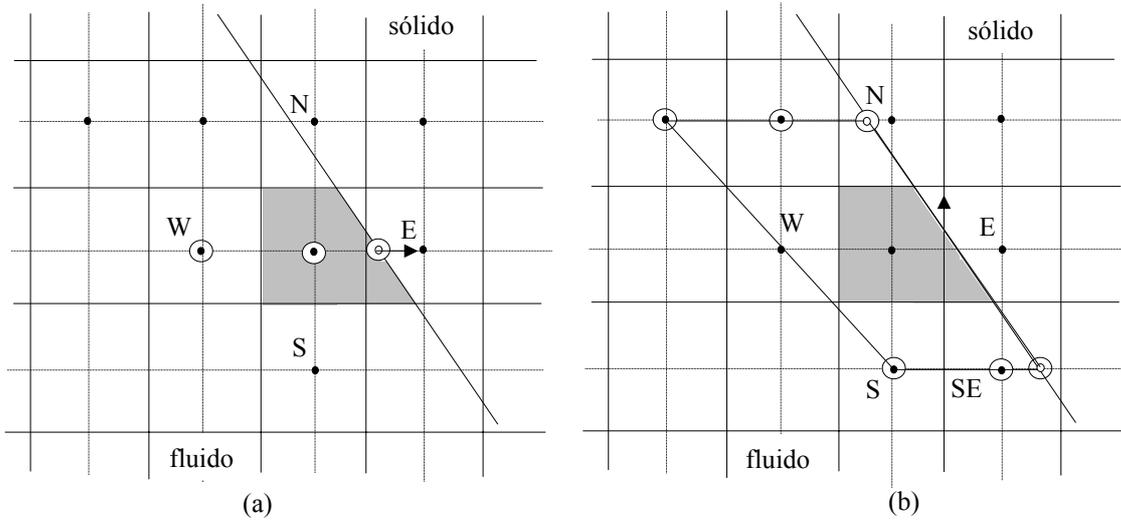


Figura 6. Extensão para o cálculo de (a)  $(\partial\phi/\partial x)_I$  e (b)  $(\partial\phi/\partial y)_I$

Assim, a equação algébrica para o volume de controle interfacial é semelhante a dos volumes cheios, exceto que o coeficiente vizinho à interface do volume ( $a_E$ ) é nulo, bem como a influência dos termos das faces prolongadas, neste volume a face sudeste, é colocada no termo fonte da equação algébrica. A equação algébrica para este volume tem o seguinte formato

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b^\phi, \quad (16)$$

onde

$$\begin{aligned} a_W &= D_W + \max(F_W, 0), \\ a_N &= D_N + \max(-F_N, 0), \\ a_S &= D_S + \max(F_S, 0), \\ a_P &= a_W + a_N + a_S, \end{aligned} \quad (17)$$

$$b^\phi = \bar{S}^\phi + (\rho v)_{se} (\phi_{se} - \phi_P) dl_{se,P} - \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{se} dl_{se,P} - \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_I dl_{I,P} n_x - \left( \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_I dl_{I,P} n_y,$$

$$\bar{S}^\phi = \begin{cases} p_W r_W dl_{W,P} + p_I r_P dl_{I,P} n_x, & \text{para } \phi = u, \\ p_S r_S dl_{S,P} - p_N r_N dl_{N,P} + p_{se} r_{se} dl_{se,P} + p_I r_P dl_{I,P} n_y, & \text{para } \phi = v. \end{cases}$$

A normal local na interface é calculada conforme segue (Shyy *et al.*, 1993)

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\nabla F|} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial F}{\partial (f(x))} \hat{j} \right), \quad (18)$$

onde  $F$  é dependente dos valores de  $x$  e  $f(x)$ ,  $f(x)$  é a curva interfacial. A forma da interface é definida por uma função localmente linear.

#### 4. Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentados os problemas estudados para validar a metodologia ELAFINT. Primeiramente estuda-se o escoamento no interior de cavidades quadradas que possuem parede superior deslizante e parede inferior irregular de acordo com uma função arbitrária  $f(x)$ , em seguida investiga-se o escoamento em uma cavidade triangular e, finalmente o escoamento em um difusor radial é analisado e os resultados numéricos e experimentais são apresentados.

#### 4.1 Escoamento nas Cavidades Quadradas com Base Irregular

A Fig. (7) ilustra duas cavidades, onde a função cossenoidal  $f(x)$  é utilizada na parede inferior irregular. A simetria do escoamento nas duas cavidades é utilizada na validação do código computacional. As principais características deste problema são regime permanente, problema bidimensional, isotérmico e sem entrada ou saída de massa.

O escoamento é simulado para o número de Reynolds definido como  $Re = \rho UL/\mu$ , onde  $\mu$  é a viscosidade absoluta,  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $L$  é o comprimento da cavidade e  $U$  é a velocidade de deslocamento da superfície superior da cavidade, considerada constante. Assumindo propriedades termo-físicas constantes, e desprezando-se a dissipação viscosa e efeitos de força de corpo, as equações que governam o escoamento no interior da cavidade podem ser escritas como:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2(\mu u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\mu u)}{\partial y^2}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2(\mu v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\mu v)}{\partial y^2}. \tag{21}$$

Neste problema todos os resultados são apresentados considerando  $\rho, U$  e  $L$  iguais a um, e  $\mu = \rho L/Re$ . As condições de contorno considerando a cavidade quadrada são as seguintes:

- (i)  $u = 1, v = 0$  para  $y = 1$  e  $0 \leq x \leq 1$ ;
- (ii)  $u = 0, v = 0$  para  $y = f(x)$  e  $0 \leq x \leq 1$ ;
- (iii)  $u = 0, v = 0$  para  $x = 0$  e  $f(x) < y < 1$ ;
- (iv)  $u = 0, v = 0$  para  $x = 1$  e  $f(x) < y < 1$ .

As condições iniciais são  $u = 0, v = 0$  para  $0 \leq x \leq 1$  e  $f(x) \leq y < 1$ , que correspondem as condições de fluido estagnado.

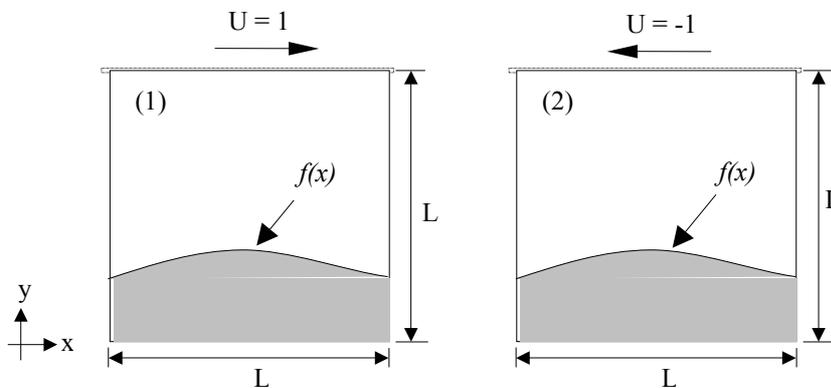


Figura 7. Cavidades quadradas com  $f(x) = 0,275 + 0,05(1-\cos(2\pi x))$ .

Na Fig. (8) são apresentados os perfis de velocidade  $u$  na linha vertical central das cavidades ilustradas na figura (7) para o número de Reynolds 1000 e duas malhas numéricas formadas por  $51 \times 51$  e  $100 \times 100$  volumes de controle.

Na Fig. (8) os resultados obtidos com a malha refinada são coincidente com os resultados de Shyy *et al.* (1996). Os perfis de velocidade  $v$  na linha horizontal central também são ilustrados na mesma figura, onde se nota que a malha refinada apresenta valores ligeiramente diferenciados da malha grosseira, semelhante aos resultados obtidos para o perfil da velocidade  $u$ . A simetria do escoamento foi utilizada na validação dos resultados.

Na Fig. (9) as linhas de corrente nas cavidades (1) e (2) são apresentadas para Reynolds 1000, onde se percebe que o resultado para a cavidade (1) segue o resultado obtido por Shyy *et al.* (1996), apresentado na Fig. (10) para uma malha formada por  $121 \times 121$  volumes de controle.

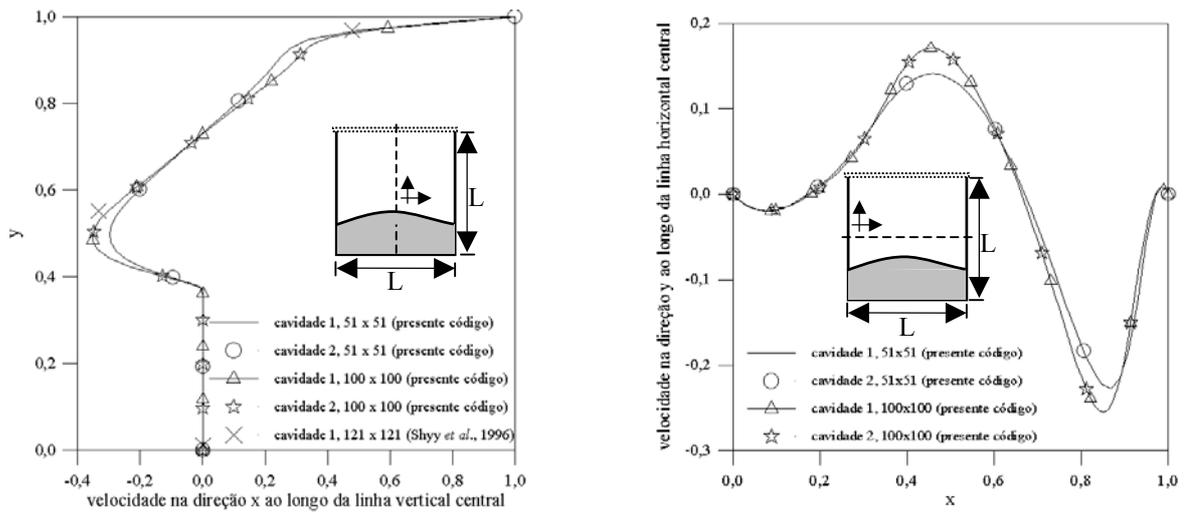


Figura 8. Perfis de velocidades através do centro geométrico da cavidade quadrada,  $Re = 1000$ .

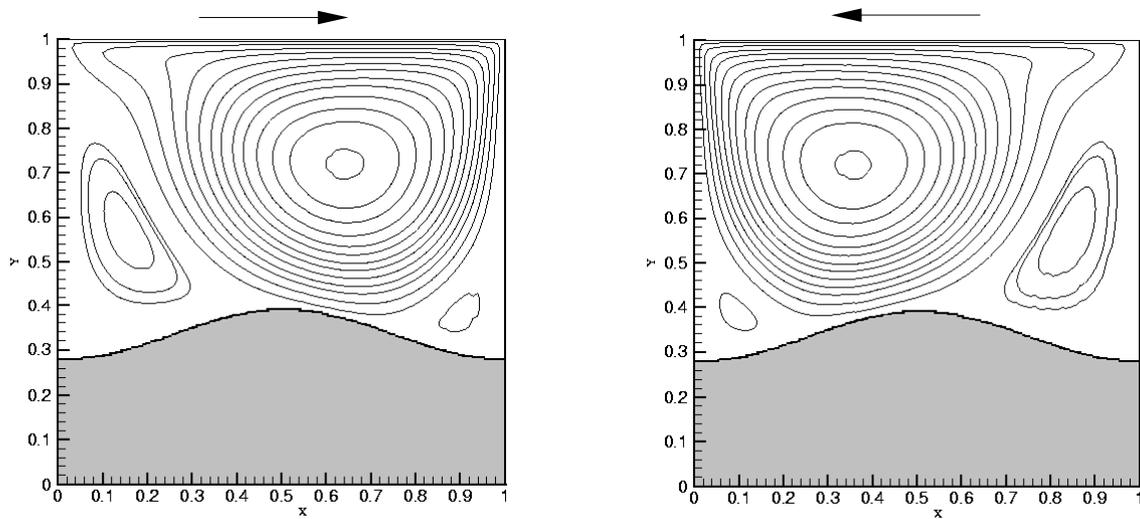


Figura 9. Linhas de corrente para as cavidades 1 e 2,  $Re = 1000$ .

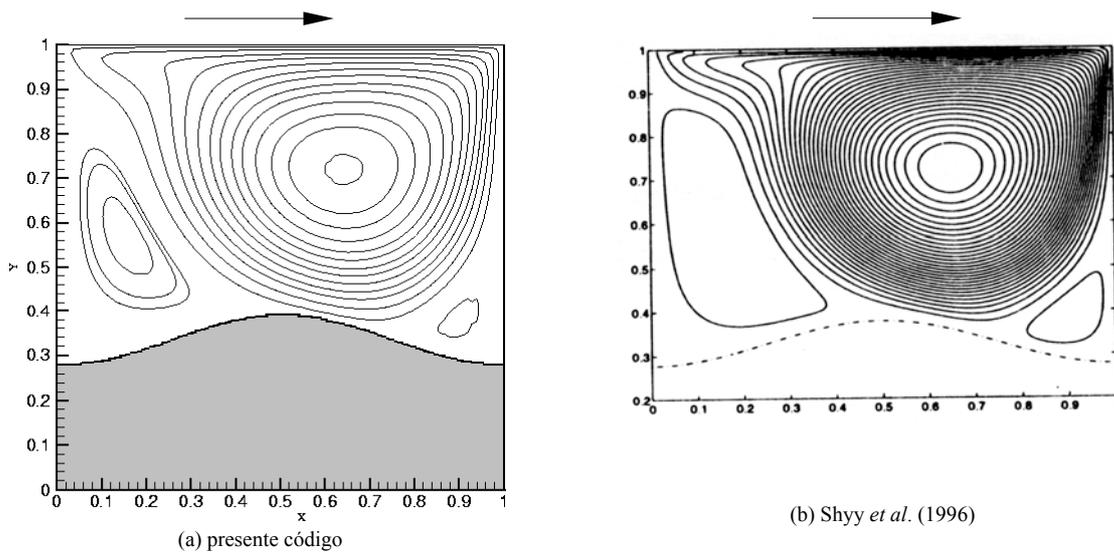


Figura 10. Linhas de corrente para a cavidade 1,  $Re = 1000$ .

#### 4.2 Escoamento na Cavidade Triangular

O segundo problema analisado é o escoamento no interior de uma cavidade triangular. As mesmas equações governantes e condições de contorno, empregadas na cavidade quadrada são utilizadas. A Fig. (11) ilustra a geometria da cavidade triangular utilizada no presente trabalho.

O escoamento na cavidade triangular foi simulado para Reynolds 50 e 800 com o objetivo de comparar os resultados com os obtidos por Jyotsna e Vanka (1995).

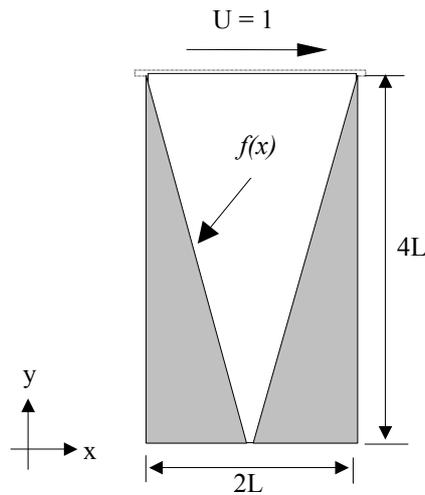


Figura 11. Cavidade triangular para  $f(x) = \begin{cases} -4x + 4, & x \leq L \\ 4x - 4, & x > L \end{cases}$ .

O escoamento na cavidade triangular é resolvido e os resultados são comparados com os obtidos por Jyotsna e Vanka (1995). A Fig. (12) ilustra o perfil da velocidade  $u$  ao longo da linha vertical central da cavidade triangular, para  $Re = 50$  e  $800$ . Conforme observado, na Fig. (12) a velocidade se anula ao longo de grande parte desta linha exceto próximo ao topo. Isto ocorre em virtude do aprisionamento do fluido na região da base da cavidade. Na mesma figura observa-se o comportamento da pressão ao longo da mesma linha. Nota-se que próximo à parede superior deslizante da cavidade a pressão apresenta grandes variações, ao passo que para  $y \leq 2,6$  a pressão é constante e virtualmente nula. O gradiente de pressão inexistente na região da base da cavidade é decorrência da fraca atividade do escoamento nesta região. Jyotsna e Vanka (1995) resolveram o escoamento na cavidade triangular utilizando o método de elementos finitos e no presente trabalho o método de volumes finitos em conjunção com a metodologia ELAFINT foi empregado. A presente metodologia mostrou-se eficaz na solução do escoamento da cavidade triangular e os resultados obtidos são bastante satisfatórios.

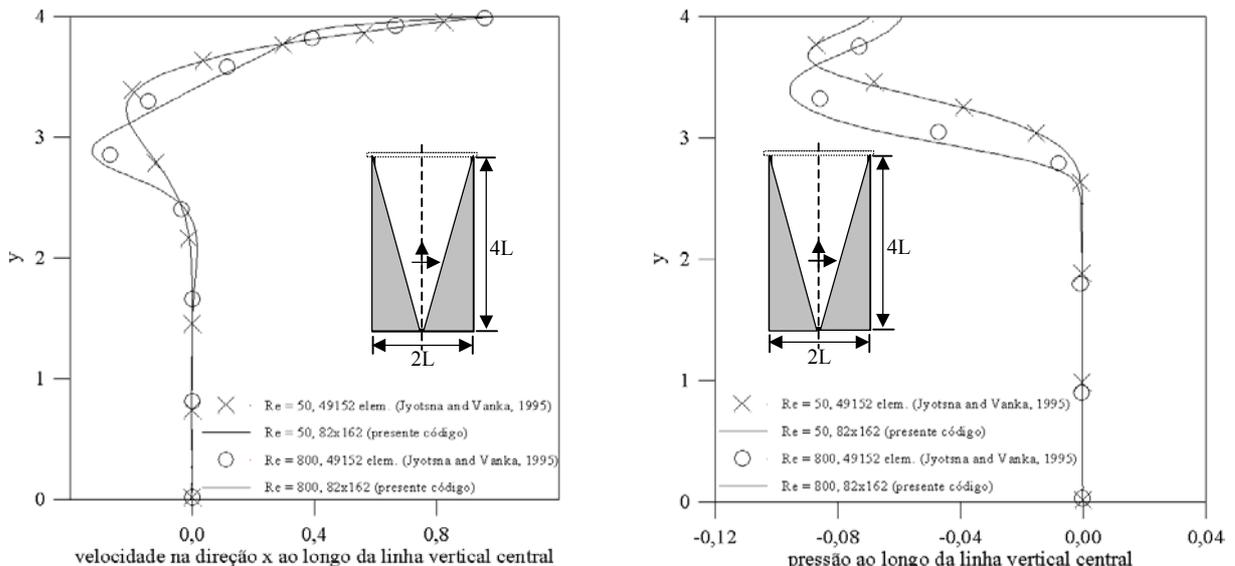


Figura 12. Perfis da velocidade  $u$  e da pressão na linha vertical central da cavidade triangular, para  $Re = 50$  e  $800$ .

As figuras (13) e (14) exploram as linhas de corrente para a cavidade triangular. Destas figuras observa-se que o tamanho dos vórtices na cavidade triangular decresce à medida que se aproxima do vértice inferior da cavidade. O vórtice mais próximo do topo se move no sentido horário, o segundo vórtice se move em sentido anti-horário, e assim sucessivamente para os demais vórtices. A solução gerada pelo presente código foi capaz de captar apenas os dois primeiros vórtices para captar os demais vórtices é necessário um maior refino da malha computacional (Mariani e Prata, 2001). Os resultados obtidos pelo presente código são semelhantes aos de Jyotsna e Vanka (1995), conforme apresentado nas figuras que seguem.

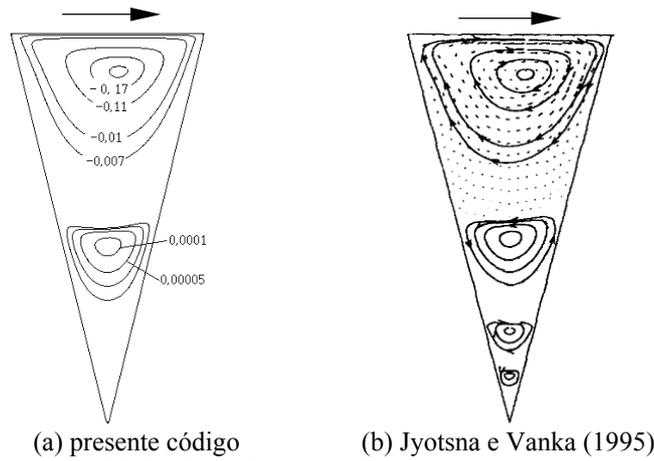


Figura 13. Linhas de corrente para a cavidade triangular, Re = 50.

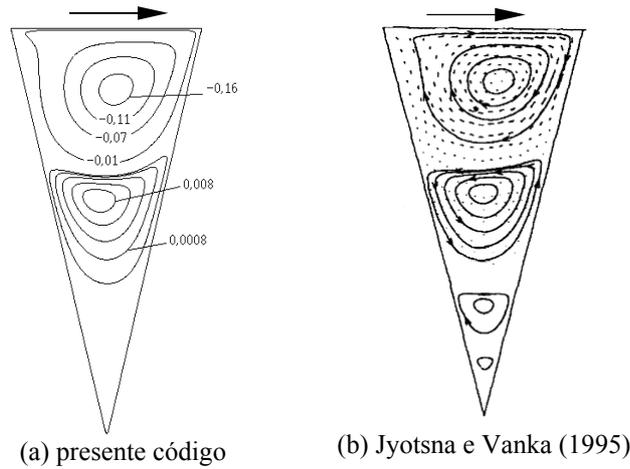


Figura 14. Linhas de corrente para a cavidade triangular, Re = 800.

### 4.3. Escoamento no Difusor Radial

A validação da metodologia ELAFINT é finalizada através da comparação dos resultados numéricos com resultados experimentais do escoamento em válvulas cujo assento é inclinado em 5,0° conforme Fig. (15). O escoamento é resolvido numérica e experimentalmente através do difusor com palheta paralela em relação ao assento.

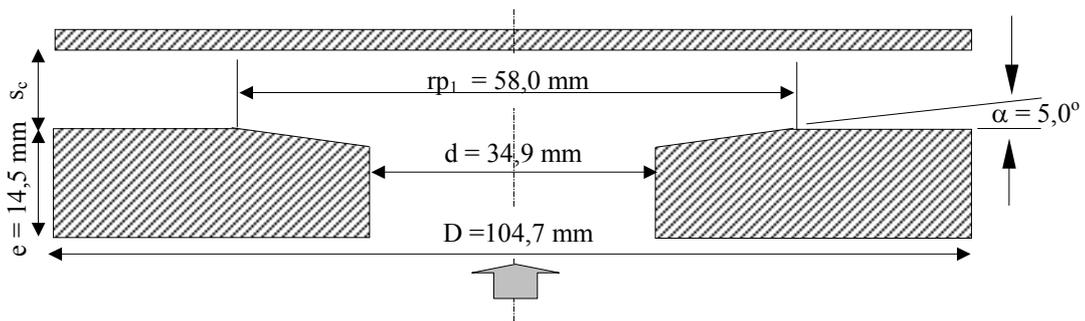


Figura 15. Assento da válvula com inclinação de 5,0°.

Para o escoamento laminar, incompressível, isotérmico e em regime permanente as equações em coordenadas cilíndricas que regem o escoamento no difusor radial da Fig. (15) são,

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v)}{\partial r} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v u)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right), \tag{23}$$

$$\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v v)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \left( \frac{\mu v}{r^2} \right), \tag{24}$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $\mu$  é a viscosidade absoluta,  $u$  e  $v$  são, respectivamente, as componentes axial e radial da velocidade e  $p$  é a pressão.

As equações são sujeitas as seguintes condições de contorno. Na fronteira com saída de massa considera-se a condição de escoamento localmente parabólico ( $\partial(rv)/\partial r = u = 0$ ). No eixo de simetria é usada a condição de simetria ( $v = \partial u / \partial r = 0$ ). Nas fronteiras sólidas a condição de não deslizamento é imposta ( $v = u = 0$ ). Na fronteira com entrada de massa obtém-se a velocidade na direção axial a partir do número de Reynolds ( $u = \bar{u} = \mu Re / \rho d$ ) e a velocidade na direção radial é nula ( $v = 0$ ). Como o escoamento é axissimétrico estuda-se apenas um radiano ao longo da circunferência do difusor, simulando um problema bidimensional.

As Figs. (16) e (17) apresentam comparações dos perfis de pressão adimensional sobre a palheta. Os resultados são obtidos da simulação numérica e do experimento. Dois casos foram analisados, classificados de acordo com o afastamento adimensional entre palheta e assento ( $s_c/d = 0,012$  e  $0,020$ ). Na Fig. (15) as curvas demonstram uma diferença entre os resultados numéricos e experimentais principalmente na região de estagnação, e boa concordância na região de aceleração do escoamento. A diferença apresentada para  $s_c/d = 0,012$  pode ser atribuída a dificuldade de medição experimental quando o afastamento entre a palheta e o assento é muito pequeno. Observa-se também que neste caso as pressões adimensionais não são negativas. Isto é explicado pela presença do chanfro na saída do orifício de passagem que diminui a aceleração do fluido nesta região, elevando as pressões.

A Fig. (17) apresenta os resultados numéricos para  $s_c/d = 0,020$ . As curvas apresentam uma pequena discrepância entre os resultados numéricos e experimentais na região de estagnação do escoamento e os resultados coincidem na região de aceleração. Semelhante ao afastamento  $s_c/d = 0,012$  as pressões adimensionais são sempre positivas.

Um último aspecto a ser notado é que para o assento com inclinação os resultados experimentais apresentaram uma oscilação nos valores de pressão e esta oscilação aumentou com o aumento no afastamento entre o assento e a palheta. Dentro do escopo do presente trabalho as causas destas oscilações não foram identificadas. Um fato curioso é que as oscilações não apresentaram dependência alguma com o número de Reynolds o que sugere que as mesmas não estão associadas a oscilações auto-induzidas e mantidas pelo escoamento (Prata *et al.*, 1995).

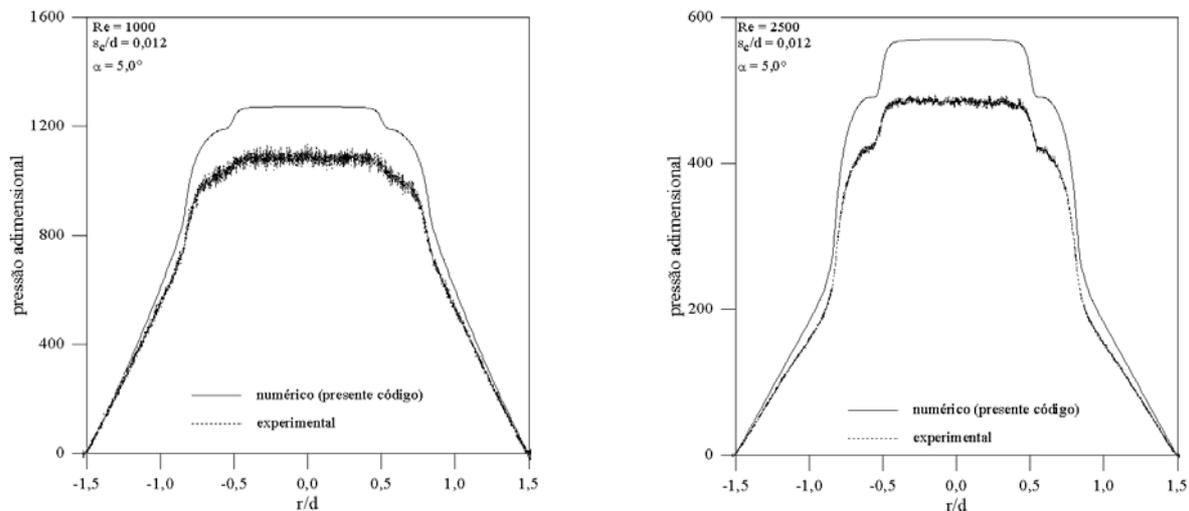


Figura 16. Comparação da distribuição de pressão adimensional sobre a palheta obtida pelo presente código e pelo experimento para  $Re = 1000$  e  $2500$ ,  $s_c/d = 0,012$  e  $\alpha = 5,0^\circ$ .

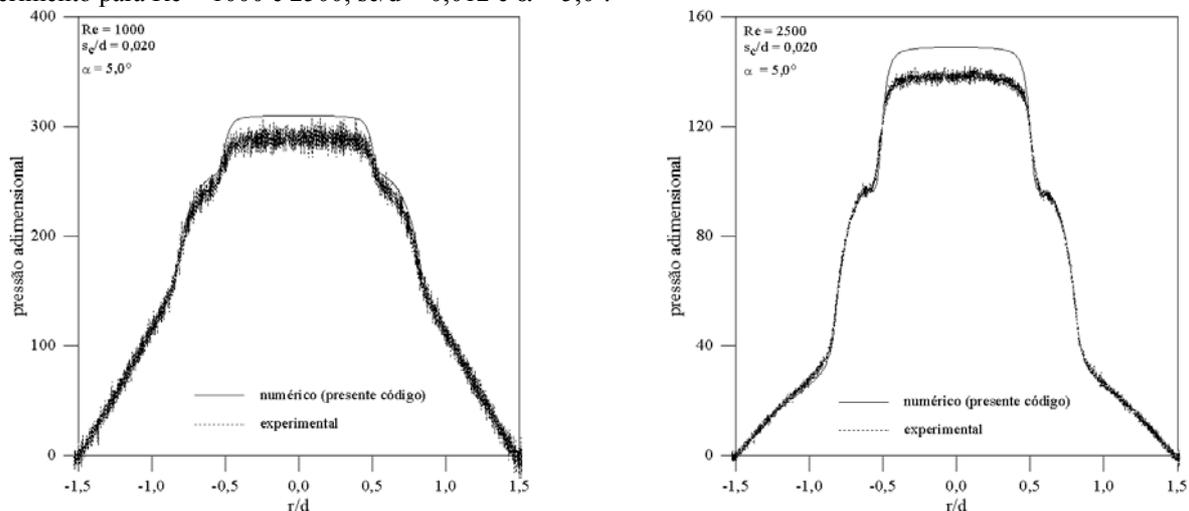


Figura 17. Comparação da distribuição de pressão adimensional sobre a palheta obtida pelo presente código e pelo experimento para  $Re = 1000$  e  $2500$ ,  $s_c/d = 0,020$  e  $\alpha = 5,0^\circ$ .

## 5. Conclusões

Este trabalho apresentou e descreveu um método misto Euleriano-Lagrangeano, aplicando-o na resolução do escoamento incompressível, laminar, isotérmico e em regime permanente, em domínios que apresentam fronteiras irregulares entre o fluido e o sólido. Três problemas envolvendo escoamentos foram resolvidos com o objetivo de demonstrar a precisão e eficiência desta metodologia.

Na resolução do escoamento em cavidades quadradas com base inferior deformada os resultados obtidos foram idênticos aos obtidos por Shyy *et al.* (1996). Já os resultados do escoamento na cavidade triangular são bastante promissores e bastante semelhantes aos obtidos por Jyotsna e Vanka (1995). A solução numérica do escoamento no difusor radial com assento inclinado foi comparada com a solução experimental, por não haver resultados disponíveis na literatura. Notou-se que para ambos afastamentos utilizados os resultados apresentaram boa concordância na região de aceleração e uma leve discordância na região de estagnação do fluido. Esta diferença deve-se principalmente pela dificuldade da medição experimental para afastamentos pequenos entre palheta e assento.

## 6. Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio recebido da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Empresa Brasileira de Compressores (EMBRACO S. A.).

## 7. Referências

- Glowinski, R., Pan, T. S. e Periaux, J., 1994, "A Fictitious Domain Method for Dirichlet Problem and Applications", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 111, pp. 283-303.
- Jyotsna, R. e Vanka, P., 1995, "Multigrid Calculation of Steady, Viscous Flow in a Triangular Cavity", *Journal of Computational Physics*, Vol. 122, pp. 107-117.
- Mariani, V. C. e Prata, A. T., 2001, "Análise Numérica do Escoamento em Cavidades Irregulares", XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Uberlândia, Minas Gerais, Vol. 8, pp. 652-661.
- Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill.
- Peskin, C. S., 1977, "Numerical-Analysis of Blood-Flow in Heart", *Journal of Computational Physics*, Vol. 25, no. 3, pp. 220-252.
- Prata, A. T., Pilichi, C. D. M. and Ferreira, R. T. S., "Local Heat Transfer in Axially Feeding Radial Flow Between Parallel Disks", *Journal of Heat Transfer*, Vol. 117, pp. 47-53, 1995.
- Quirk, J. J., 1994, "A Cartesian Grid Approach with Hierarchical Refinement for Compressible Flows", ICASE Report, n°. 94-51, NASA Langley Research Center, Hampton.
- Shyy, W., Udaykumar, H. S., Rao, M. M. e Smith, R. W., 1996, "Computational Fluid Dynamics with Moving Boundaries", Taylor & Francis, Bristol, PA.
- Udaykumar, H. S. e Shyy, W., 1995, "Simulation of Interfacial Instabilities during Solidification- I. Conduction and Capillarity Effects", *International Journal Heat Mass Transfer*, Vol. 38, no. 11, pp. 2057-2073.
- Udaykumar, H. S., Mittal, R. e Shyy, W., 1999, "Computation of Solid-Liquid Phase Fronts in the Sharp Interface Limit on Fixed Grids", *Journal of Computational Physics*, Vol. 153, no. 2, pp. 535-574.
- Udaykumar, H. S., Shyy, W. e Rao, M. M., 1996, "ELAFINT: A Mixed Eulerian-Lagrangian Method for Fluid Flows with Complex and Moving Boundaries", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, pp. 691-712.
- Ye, T., Mittal R., Udaykumar, H. S. e Shyy, W., 1999, "An Accurate Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries", *Journal of Computational Physics*, Vol. 156, pp.209-240.

## AN EULERIAN-LAGRANGIAN METHOD FOR SOLVING FLOWS IN DOMAINS WITH IRREGULAR BOUNDARIES

### Viviana Cocco Mariani

Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Campus Torres, Universidade Tuiuti do Paraná – UTP,  
Av. Comendador Franco, 1860, CEP 80215-090, Curitiba, PR - Brasil.  
[viviana.mariani@utp.br](mailto:viviana.mariani@utp.br)

### Alvaro Toubes Prata

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, CEP 88040-900, Florianópolis, SC, Brasil.  
[prata@nrva.ufsc.br](mailto:prata@nrva.ufsc.br)

**Abstract.** *In the present work a mixed Eulerian-Lagrangian method is described and applied to solve steady incompressible laminar isothermal flows in domains presenting irregular boundaries between fluid and solid. The governing equations are solved in fixed non-staggered grids. The irregular boundary between fluid and solid is treated explicitly by markers particles, using the cut-cell technique. The finite volume method is used in conjunction with a second order procedure to evaluate flows in the interfacial volumes. Accuracy and efficiency of the Eulerian-Lagrangian method is shown solving three representative problems.*

**Keywords.** *Eulerian-Lagrangian methodology, lid-driven cavity, triangular cavity, radial diffuser, finite volume methodology.*