

## ANÁLISE DOS EFEITOS DE BORDA EM VISCOSÍMETROS DE QUEDA DE CILINDRO COM FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS COM COMPORTAMENTO TIPO LEI DE POTÊNCIA

Mauricio Araujo Zanardi, [mzanardi@feg.unesp.br](mailto:mzanardi@feg.unesp.br)<sup>1</sup>  
Fabio Eduardo Ferraz de Carvalho, [fabioeduardo@bol.com.br](mailto:fabioeduardo@bol.com.br)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>DEN/FEG/UNESP-Univ. Estadual Paulista, Av Ariberto Pereira da Cunha 333, 12516-410 - Guaratinguetá-SP

**Resumo:** *Existem diversos tipos de dispositivos que se prestam a medir as propriedades reológicas dos fluidos. Os mais comuns são os viscosímetros capilares ou de orifícios, os de cilindros ou cones rotativos, os de queda ou de rolamento de esferas e os de queda de agulha, cilindro ou tubo. As formulações matemáticas para cada um destes dispositivos vêm sendo estudadas há bastante tempo, sendo bem estabelecidas quando se trata de fluidos newtonianos. Mais recentemente, estes estudos estão sendo direcionados para os vários tipos de fluidos não newtonianos. No caso específico de viscosímetros de queda de cilindro, os trabalhos encontrados normalmente na literatura tratam com cilindros longos para os quais os efeitos das bordas do cilindro são pequenos. Neste trabalho se estuda a queda de cilindros em fluidos newtonianos e não newtonianos com comportamento do tipo "power-law", considerando o escoamento bidimensional e se compara os resultados com aqueles para cilindros infinitos.*

**Palavras-chave:** *fluidos viscoplásticos, viscosímetro de queda de cilindro, propriedades reológicas*

### 1. INTRODUÇÃO

O viscosímetro de queda de cilindros consiste de um tubo vertical longo preenchido com um fluido no qual o tempo de queda de um cilindro é medido com a finalidade de se determinar as características reológicas do fluido. O desenvolvimento deste dispositivo, com a formulação matemática para a queda de um cilindro infinito foi realizado por Lorenz et al. (1960). Os efeitos de borda, existentes devido ao cilindro ser finito, exigiam a correção dos resultados através da calibração dos instrumentos. Um estudo dos efeitos de entrada e saída do escoamento ao redor do cilindro foi apresentado por Chen e Swift (1972).

Mais recentemente, Gui e Irvine (1994) apresentam um estudo para um viscosímetro de queda de cilindro em fluidos newtonianos, utilizando as equações de conservação para a determinação dos escoamentos ao redor do cilindro. São apresentados resultados numéricos e experimentais para cilindros com relação comprimento do cilindro/raio do tubo igual a 10, para diversas relações de raio do cilindro/raio do tubo.

O desenvolvimento de modelos para uso deste tipo de equipamento com fluidos não newtonianos foi primeiramente realizado por Ashare et al (1965) para fluidos do tipo "lei de potência". Eichstadt e Swift (1966), utilizando a mesma metodologia, estenderam o estudo para fluidos do tipo "lei de potência" e plásticos de Bingham.

O objetivo do presente trabalho é determinar os efeitos de borda devido ao comprimento finito do cilindro em viscosímetros de queda quando utilizado em medidas de propriedades reológicas de fluidos não newtonianos. Para isso foram utilizadas formulações bidimensionais para o escoamento laminar de fluidos não newtonianos com modelo do tipo lei de potência. Os modelos bidimensionais formulados foram utilizados para o desenvolvimento de um procedimento numérico para solução das equações de movimento do fluido utilizando uma formulação do tipo volumes finitos para determinar os campos de velocidade e a distribuição de pressões, sendo o acoplamento entre velocidade e pressão feito utilizando o algoritmo SIMPLE proposto por Patankar (1980).

Os escoamentos encontrados foram utilizados para a determinação do número de geometria, definido por Gui e Irvine (1994), através do balanço de forças agindo sobre o cilindro em uma condição de queda com velocidade terminal. O programa foi validado comparando-se os resultados obtidos com aqueles reportados por Gui e Irvine para fluidos newtonianos.

São apresentados os efeitos de borda variando-se o expoente do modelo do fluido, sendo que os valores para  $n < 1$  correspondem àqueles para fluidos pseudo plásticos e  $n > 1$  para fluidos dilatantes. São ainda consideradas variações no comprimento e diâmetro do cilindro.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

A geometria utilizada para o desenvolvimento do modelo matemático é a mesma proposta em Gui e Irvine (1994) e apresentada na Fig. 1. No modelo matemático é considerada a queda concêntrica de um cilindro em um tubo preenchido por um fluido não newtoniano.

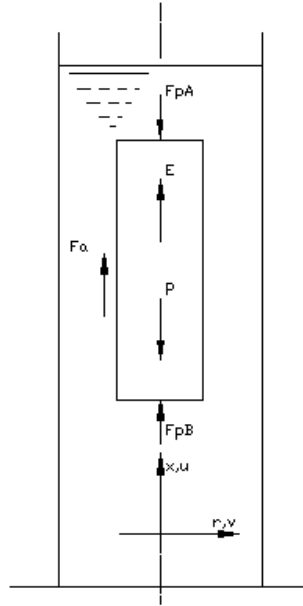


Figura 1 - Modelo geométrico do viscosímetro

Para um fluido newtoniano, considerando as equações de conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento para um escoamento unidimensional (cilindro infinito) em regime permanente, bem como a análise do fluxo de massa através da área anular e procedendo o balanço de forças sobre o cilindro Gui e Irvine (1994) definiram o “Número de Geometria” ideal,  $Ge_{ideal}$ , que representa um parâmetro adimensional envolvendo a velocidade terminal de queda, através da expressão:

$$Ge_{ideal} = R_s^2 g \frac{(\rho_c - \rho_f)}{\mu u_t} = \frac{-(1-k^4)}{k^2 \left[ (1-k^2)^2 + \ln(k)(1-k^4) \right]} \quad (1)$$

sendo  $k$  a relação entre os raios do cilindro e do tubo,  $R_s$  o raio do tubo,  $u_t$  a velocidade terminal de queda,  $\rho_c$  e  $\rho_f$  as massas específicas do cilindro e do fluido respectivamente. O nome número de geometria foi utilizado porque ele só é função das características geométricas do dispositivo.

Para fluidos não newtonianos, as equações não podem ser resolvidas de forma analítica, nem para o caso unidimensional, devido à não linearidade da equação da conservação da quantidade de movimento, não possibilitando a determinação de uma expressão analítica para o número de geometria. Entretanto, os resultados de Eichstadt e Swift (1966), mostraram que a velocidade terminal de queda de um cilindro em um fluido do tipo lei de potência poderia ser expressa através de:

$$u_t = \phi_t R_s \left[ \frac{g R_s}{2.m} \left( \frac{k}{\lambda} \right)^2 (\rho_c - \rho_f) \right]^{\frac{1}{n}} \quad (2)$$

com  $\phi_t$  e  $\lambda$  parâmetros determinados numericamente, em função dos parâmetros geométricos e do coeficiente  $m$  e do expoente  $n$  do fluido. Os valores destes parâmetros são apresentados nas Tabs. (1) e (2) nas quais  $s=1/n$ .

Rearranjando a Eq. (1) pode-se definir o número de Geometria para essa nova situação através de:

$$Ge_i = \left( \frac{1}{\phi_t} \right)^n \left( \frac{\lambda}{k} \right)^2 .2 = \left[ \frac{g R_s}{m} (\rho_c - \rho_f) \left( \frac{R_s}{u_t} \right)^n \right] \quad (3)$$

Tabela 5 – Valores de  $\lambda$  para o modelo da lei de potência

s \ k	0,50	0,53	0,55	0,58	0,60	0,63	0,65	0,68	0,70	0,73	0,75	0,78	0,80	0,83	0,85	0,88	0,90	0,93	0,95	0,98
0	0,825	0,830	0,835	0,841	0,847	0,854	0,861	0,868	0,876	0,884	0,893	0,902	0,911	0,921	0,931	0,942	0,953	0,964	0,976	0,988
1	0,791	0,799	0,807	0,816	0,825	0,834	0,843	0,853	0,863	0,873	0,884	0,895	0,906	0,917	0,928	0,940	0,951	0,963	0,975	0,988
2	0,771	0,781	0,791	0,802	0,812	0,823	0,834	0,845	0,857	0,868	0,879	0,891	0,903	0,915	0,927	0,939	0,951	0,963	0,975	0,988
3	0,758	0,770	0,781	0,793	0,805	0,817	0,829	0,841	0,853	0,865	0,877	0,889	0,901	0,913	0,926	0,938	0,950	0,963	0,975	0,988
4	0,749	0,762	0,775	0,787	0,800	0,812	0,825	0,837	0,850	0,862	0,875	0,887	0,900	0,912	0,925	0,937	0,950	0,962	0,975	0,987
5	0,743	0,757	0,770	0,783	0,796	0,809	0,822	0,835	0,848	0,861	0,874	0,886	0,899	0,912	0,925	0,937	0,950	0,962	0,975	0,987
6	0,739	0,753	0,766	0,780	0,793	0,807	0,820	0,833	0,847	0,860	0,873	0,886	0,899	0,911	0,924	0,937	0,950	0,962	0,975	0,987
7	0,735	0,749	0,764	0,778	0,791	0,805	0,819	0,832	0,846	0,859	0,872	0,885	0,898	0,911	0,924	0,937	0,950	0,962	0,975	0,987
9	0,730	0,745	0,759	0,774	0,788	0,802	0,816	0,830	0,844	0,857	0,871	0,884	0,897	0,911	0,924	0,937	0,949	0,962	0,975	0,987

Tabela 6 – Valores de  $\phi_t$  para o modelo da lei de potência

s \ k	0,50	0,53	0,55	0,58	0,60	0,63	0,65	0,68	0,70	0,73
0	1,510E-01	1,355E-01	1,210E-01	1,072E-01	9,433E-02	8,230E-02	7,113E-02	6,082E-02	5,137E-02	4,277E-02
1	5,822E-02	4,879E-02	4,059E-02	3,349E-02	2,736E-02	2,211E-02	1,764E-02	1,387E-02	1,072E-02	8,121E-03
2	2,376E-02	1,871E-02	1,460E-02	1,127E-02	8,599E-03	6,469E-03	4,788E-03	3,477E-03	2,468E-03	1,706E-03
3	1,002E-02	7,443E-03	5,467E-03	3,965E-03	2,833E-03	1,989E-03	1,369E-03	9,197E-04	6,009E-04	3,797E-04
4	4,330E-03	3,040E-03	2,106E-03	1,437E-03	9,631E-04	6,321E-04	4,048E-04	2,520E-04	1,517E-04	8,771E-05
5	1,905E-03	1,266E-03	8,284E-04	5,323E-04	3,349E-04	2,056E-04	1,227E-04	7,080E-05	3,928E-05	2,079E-05
6	8,499E-04	5,352E-04	3,310E-04	2,005E-04	1,185E-04	6,809E-05	3,787E-05	2,026E-05	1,036E-05	5,025E-06
7	3,836E-04	2,290E-04	1,339E-04	7,649E-05	4,249E-05	2,286E-05	1,185E-05	5,883E-06	2,775E-06	1,232E-06
8	1,747E-04	9,894E-05	5,475E-05	2,949E-05	1,540E-05	7,760E-06	3,751E-06	1,728E-06	7,519E-07	3,059E-07
9	8,023E-05	4,310E-05	2,257E-05	1,147E-05	5,632E-06	2,658E-06	1,198E-06	5,122E-07	2,056E-07	7,663E-08

Tabela 6 (cont) – Valores de  $\phi_t$  para o modelo da lei de potência

s \ k	0,75	0,78	0,80	0,83	0,85	0,88	0,90	0,93	0,95	0,98
0	3,501E-02	2,807E-02	2,195E-02	1,663E-02	1,208E-02	8,297E-03	5,249E-03	2,918E-03	1,281E-03	3,164E-04
1	6,002E-03	4,306E-03	2,978E-03	1,965E-03	1,219E-03	6,957E-04	3,513E-04	1,462E-04	4,275E-05	5,275E-06
2	1,142E-03	7,352E-04	4,507E-04	2,596E-04	1,378E-04	6,543E-05	2,640E-05	8,232E-06	1,604E-06	9,891E-08
3	2,306E-04	1,333E-04	7,251E-05	3,650E-05	1,659E-05	6,556E-06	2,114E-06	4,943E-07	6,417E-08	1,978E-09
4	4,834E-05	2,512E-05	1,213E-05	5,338E-06	2,078E-06	6,839E-07	1,764E-07	3,091E-08	2,674E-09	4,122E-11
5	1,040E-05	4,861E-06	2,085E-06	8,023E-07	2,675E-07	7,334E-08	1,513E-08	1,988E-09	1,146E-10	8,833E-13
6	2,284E-06	9,597E-07	3,657E-07	1,230E-07	3,515E-08	8,028E-09	1,324E-09	1,305E-10	5,015E-12	1,932E-14
7	5,089E-07	1,923E-07	6,512E-08	1,916E-08	4,691E-09	8,925E-10	1,177E-10	8,699E-12	2,229E-13	4,294E-16
8	1,148E-07	3,902E-08	1,174E-08	3,021E-09	6,338E-10	1,005E-10	1,060E-11	5,873E-13	1,003E-14	9,583E-18
9	2,613E-08	7,992E-09	2,136E-09	4,810E-10	8,647E-11	1,142E-11	9,638E-13	4,005E-14	4,560E-16	2,186E-19

Os modelos matemáticos para um viscosímetro de queda de cilindro, considerando um fluido newtoniano, foram apresentados por Gui e Irvine (1994). Inicialmente eles estudaram o modelo ideal considerando o cilindro tendo um comprimento grande o bastante para que efeitos de bordas fossem desprezados, ou seja, um modelo que considera um cilindro infinito em queda, de forma concêntrica, dentro do tubo contendo um fluido newtoniano

O modelo bidimensional foi construído utilizando-se as equações de conservação de massa e quantidade de movimento para a geometria mostrada na Fig. (2). Neste modelo, o cilindro é considerado estacionário e o fluido longe do cilindro possui uma velocidade uniforme igual à velocidade terminal de queda. As equações resultantes, após a devida adimensionalização são as mostradas na sequência do trabalho. Como domínio de cálculo é considerada uma região de um tubo com comprimento igual ao comprimento do cilindro acrescido de quatro vezes o raio do tubo, sendo que o cilindro fica centrado no domínio. Este tamanho de esteira se mostrou adequado para valores baixos de velocidade terminal. Para velocidades maiores, foi necessário se aumentar a esteira do cilindro para até 12 vezes o raio do tubo para valores de número de Reynolds da ordem de 10 ou acima.

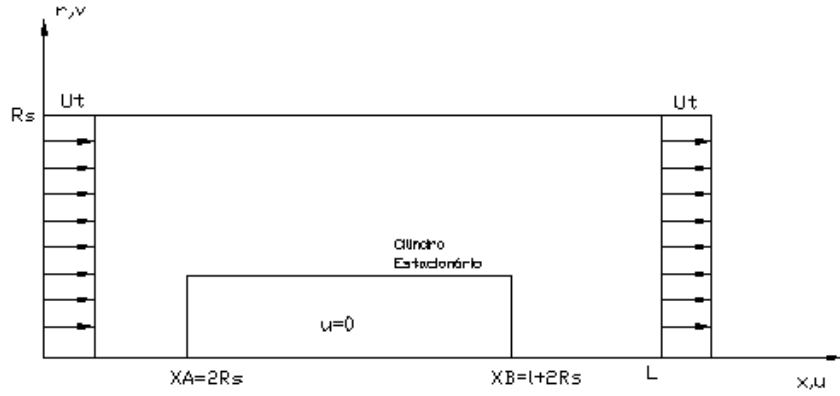


Figura 2: Modelo Matemático.

- conservação da massa

$$\frac{\partial(u^+)}{\partial x^+} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial(r^+ \cdot v^+)}{\partial r^+} = 0 \quad (4)$$

- conservação da quantidade de movimento na direção x

$$\left( \frac{1}{r^+} \frac{\partial(r^+ \cdot v^+ \cdot u^+)}{\partial r^+} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial(r^+ \cdot u^+ \cdot u^+)}{\partial x^+} \right) = - \frac{\partial p^+}{\partial x^+} + \frac{1}{r^+ R_s \cdot \rho \cdot u_t} \left[ \frac{\partial}{\partial r^+} \left( \eta \cdot r^+ \frac{\partial u^+}{\partial r^+} \right) + \frac{\partial}{\partial x^+} \left( \eta \cdot r^+ \frac{\partial u^+}{\partial x^+} \right) \right] \quad (5)$$

- conservação da quantidade de movimento na direção r

$$\left( \frac{1}{r^+} \frac{\partial(r^+ \cdot v^+ \cdot v^+)}{\partial r^+} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial(r^+ \cdot v^+ \cdot u^+)}{\partial x^+} \right) = - \frac{\partial p^+}{\partial r^+} + \frac{1}{r^+ R_s \cdot \rho \cdot u_t} \left[ \frac{\partial}{\partial r^+} \left( \eta \cdot r^+ \frac{\partial v^+}{\partial r^+} \right) - \eta \frac{v^+}{r^+} + \frac{\partial}{\partial x^+} \left( \eta \cdot r^+ \frac{\partial v^+}{\partial x^+} \right) \right] \quad (6)$$

Nestas equações se tem:

$$\eta = m \left( \frac{u_t}{R_s} \right)^{n-1} \sqrt[2]{ \left[ \left( \frac{\partial v^+}{\partial r^+} \right)^2 + \left( \frac{v^+}{r^+} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^+}{\partial x^+} \right)^2 \right] + \left[ \frac{\partial v^+}{\partial x^+} + \frac{\partial u^+}{\partial r^+} \right]^2 }^{n-1} \quad (7)$$

e as variáveis adimensionais utilizadas são definidas por

$$u^+ = \frac{u}{u_t} \quad v^+ = \frac{v}{u_t} \quad r^+ = \frac{r}{R_s} \quad x^+ = \frac{x}{R_s} \quad p^+ = \frac{p}{\rho u_t^2} \quad Re_{R_s} = \frac{(\rho_f u_t R_s)}{\mu}$$

As condições de contorno para o modelo são as de não deslizamento e impermeabilidade das superfícies sólidas:

$$\begin{aligned} u^+(0, r^+) &= 1.0 & v^+(0, r^+) &= 0 \\ u^+(L^+, r^+) &= 1.0 & v^+(L^+, r^+) &= 0 \\ u^+(x^+, 1.0) &= 1.0 & v^+(x^+, 1.0) &= 0 \\ \frac{\partial u^+}{\partial r^+}(x^+, 0) &= 0 & v^+(x^+, 0) &= 0 \\ u^+(x_A^+, 0 \leq r^+ \leq k) &= 0 & v^+(x_A^+, 0 \leq r^+ \leq k) &= 0 \\ u^+(x_B^+, 0 \leq r^+ \leq k) &= 0 & v^+(x_B^+, 0 \leq r^+ \leq k) &= 0 \\ u^+(x_A^+ \leq x^+ \leq x_B^+, k) &= 0 & v^+(x_A^+ \leq x^+ \leq x_B^+, k) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Fazendo-se então o balanço de forças sobre o cilindro determina-se uma relação para o cálculo do número de geometria a partir dos valores encontrados para os campos de velocidade e pressão expressa pela Eq. (9).

$$\frac{R_s \cdot g(\rho_c - \rho_f)}{2.m} \left(\frac{R_s}{u_t}\right)^n = \frac{1}{k.l^+} \cdot \int_{x_A^+}^{x_B^+} \sqrt{2 \left[ \left(\frac{\partial v^+}{\partial r^+}\right)^2 + \left(\frac{v^+}{r^+}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^+}{\partial x^+}\right)^2 \right] + \left[ \frac{\partial v^+}{\partial x^+} + \frac{\partial u^+}{\partial r^+} \right]^2}^{n-1} \left[ \frac{\partial u^+}{\partial r^+} + \frac{\partial v^+}{\partial x^+} \right]_k . dx^+ + \frac{u_t^2 \cdot \rho_f}{k^2 \cdot l^+ \cdot m} \left(\frac{R_s}{u_t}\right)^n \cdot \int_0^k (p_B^+ - p_A^+) \cdot r^+ \cdot dr^+ \quad (9)$$

### 3. PROCEDIMENTO NUMÉRICO

De uma forma geral, todas estas equações do modelo desenvolvido podem ser escritas na forma :

$$\frac{1}{r^+} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^+} (\rho r^+ u^+ \phi) + \frac{\partial}{\partial r^+} (\rho r^+ v^+ \phi) \right\} = \frac{1}{r^+} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^+} \left( \Gamma r^+ \frac{\partial \phi}{\partial x^+} \right) + \frac{\partial}{\partial r^+} \left( \Gamma r^+ \frac{\partial \phi}{\partial r^+} \right) \right\} + S \quad (10)$$

o que permite generalizar o processo de discretização e de solução.

Para realizar a discretização das equações foi utilizado o esquema “power-law” sugerido por Patankar (1980). As equações governantes ainda serem escritas na forma :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r J_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r J_r}{\partial r} = S \quad (11)$$

com  $J_x = \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}$  and  $J_r = \rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r}$  e S o termo fonte.

Pela utilização do método de volumes finitos, as equações discretizadas foram obtidas pela integração da Eq. (11) sobre volumes de controle definidos ao redor de cada ponto da grade, resultando em equações algébricas do tipo

$$J_x^e A_e + J_y^n A_n = J_x^w A_w + J_y^s A_s + \bar{S} V \quad (12)$$

sendo os A's as áreas das faces dos volumes de controle, V o volume e  $\bar{S}$  o valor médio do termo fonte no volume considerado.

A avaliação dos termos J da Eq. (12) através do método de discretização “power-law” resulta em sistemas de equações algébricas, para cada variável, com a forma geral :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (13)$$

com  $\frac{a}{D} = \max \left( 0, \left( (1 - 0.1 |P|)^5 \right) + \max(-P, 0) \right)$ ,  $P = \frac{\rho u \Delta L}{\Gamma}$  o número de Peclet local,  $D = \frac{\Gamma A}{\Delta L}$  que representa os termos de difusão e  $\Delta L$  o comprimento característico do volume de controle na direção de integração.

A solução destes sistemas exige um algoritmo para determinação do campo de diferenças de pressões. Optou-se pela utilização do algoritmo SIMPLE descrito por Patankar (1980), que utiliza a equação da conservação da massa para descrever o acoplamento pressão-velocidade.

O processo de solução das equações algébricas escolhido foi um processo iterativo do tipo “line-by-line” que combina um método direto, que é o algoritmo de Thomas para matrizes tridiagonais, com um método iterativo de Gauss-Siedel.

Foram consideradas grades deslocadas para as variáveis u, v e p, conforme sugerido por Patankar (1980) como uma forma de evitar soluções não realistas. Como o problema apresenta superfícies sólidas no interior do domínio de cálculo, as condições de interface no interior do domínio foram garantidas pela escolha adequada do coeficiente difusivo impondo-se valores elevados para a viscosidade na região sólida, conforme discutido em Patankar (1980).

A convergência de sistemas de equações diferenciais não lineares é difícil de ser garantida. Para conseguir convergência foram utilizados fatores de subrelaxação da ordem de 0,5 para as componentes de velocidade e 0,7 para a pressão, sendo conseguido com estes valores uma convergência com característica pouco oscilante.

Como critério de parada foi escolhido o valor médio do erro em cada volume de controle, ou seja :

$$\frac{\|r_p\|^k}{n_p} = \varepsilon \quad (14)$$

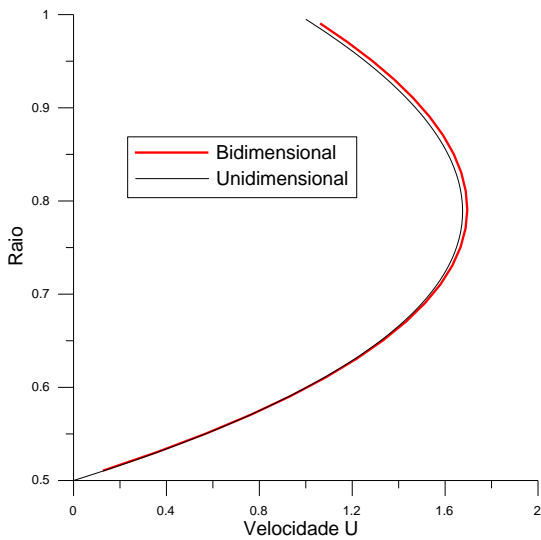
sendo  $\|r_p\|^k$  a norma euclidiana do resíduo na iteração k e  $n_p$  o número de volumes de controle do domínio real. O parâmetro de convergência  $\varepsilon$  tomado como padrão foi  $10^{-7}$  para todas as variáveis. Para evitar resíduos locais grandes nas soluções consideradas convergidas, foi ainda estabelecido que o resíduo máximo, em qualquer volume de controle do domínio não poderia ser maior que  $10^{-6}$ .

O programa computacional desenvolvido foi testado comparando as soluções com as soluções apresentadas por Gui e Irvine (1994) para fluidos newtonianos.

#### 4. RESULTADOS

Como para fluidos não newtonianos não existem soluções analíticas para o problema tratado, como uma forma de verificar a consistência da implementação dos coeficientes difusivos se realizou-se a comparação com resultados usando modelo unidimensional. No caso unidimensional, o cálculo da taxa de deformação é mais simples e depende somente de uma derivada de u em relação a r. Resolveu-se então o problema 1D numericamente (cilindro infinito) e o problema 2D com um cilindro com  $L^+ = 10$ . Considerou-se então o perfil de velocidade u na seção central do cilindro e comparou-se com a solução unidimensional, para fluidos com  $n=0,5$  e  $n=1,0$  (fluido newtoniano, cuja solução exata é conhecida), conforme apresentado na Fig.3, notando-se a boa concordância entre os valores encontrados.

Comparação Modelo Unidimensional e Bidimensional - n = 1,0



Comparação Modelo Unidimensional e Bidimensional - n=0,5

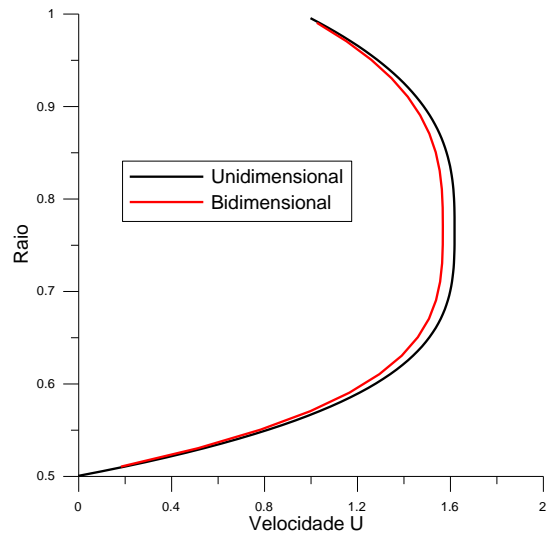


Figura 3 -Comparação entre resultados para perfis de velocidade com modelos 1-D e 2-D

Outro parâmetro preliminarmente investigado foi o tamanho do domínio de cálculo. Para valores baixos de número de Reynolds, um comprimento de esteira igual a 2 vezes o raio do tubo se mostrou adequado porém para valores mais elevados, as distribuições de pressão na vizinhança do cilindro era bastante afetada pela condição de saída. Como exemplo, na Fig. (4) são apresentadas as linhas de corrente e distribuições de pressão para dois diferentes comprimentos de cilindro para o escoamento de um fluido com  $n=0,333$  e  $Re=100$ .

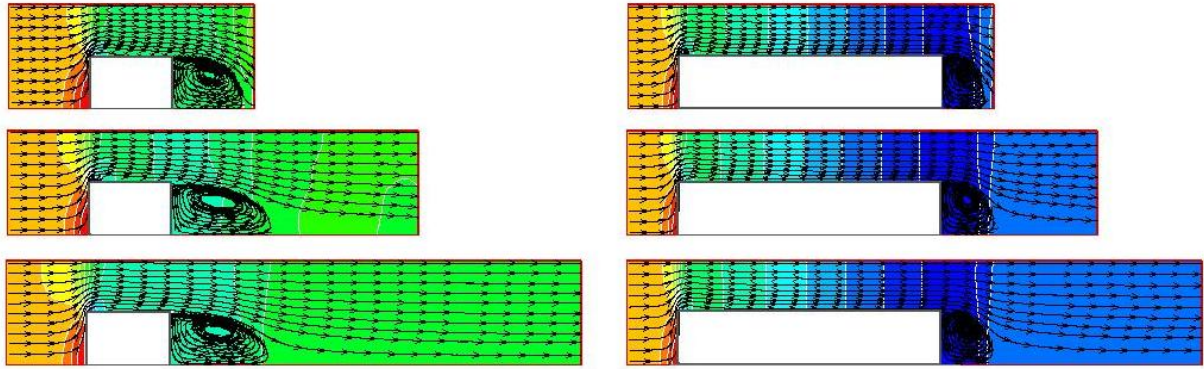


Figura 4 - Comparação dos escoamentos pra um cilindro com  $L=2$  e  $L=10$ ,  $k=0,5$ ,  $Re=100$ ,  $L_c= 2, 6$  e  $10$  e  $n=0,333$

Uma vez que os resultados produzidos pelo programa computacional se mostraram coerentes com os existentes na literatura passou-se a se analisar a influência dos efeitos das variáveis geométricas sobre os valores do número de geometria. Para a padronização dos resultados, definiu-se  $Ge^+ = \frac{Ge}{Ge_\infty}$  sendo  $Ge_\infty$  o valor do número de geometria para um cilindro infinito, calculado através da Eq. (3).

Nas Figs. (5a) e (5b) estão os resultados para  $Ge^+$  em função do número de Reynolds para diferentes fluidos (obtidos com um cilindro com  $k=0,5$  e  $L^+=10$ ) e para diferentes diâmetros de cilindro com o mesmo comprimento anterior e  $n=1,4$ .

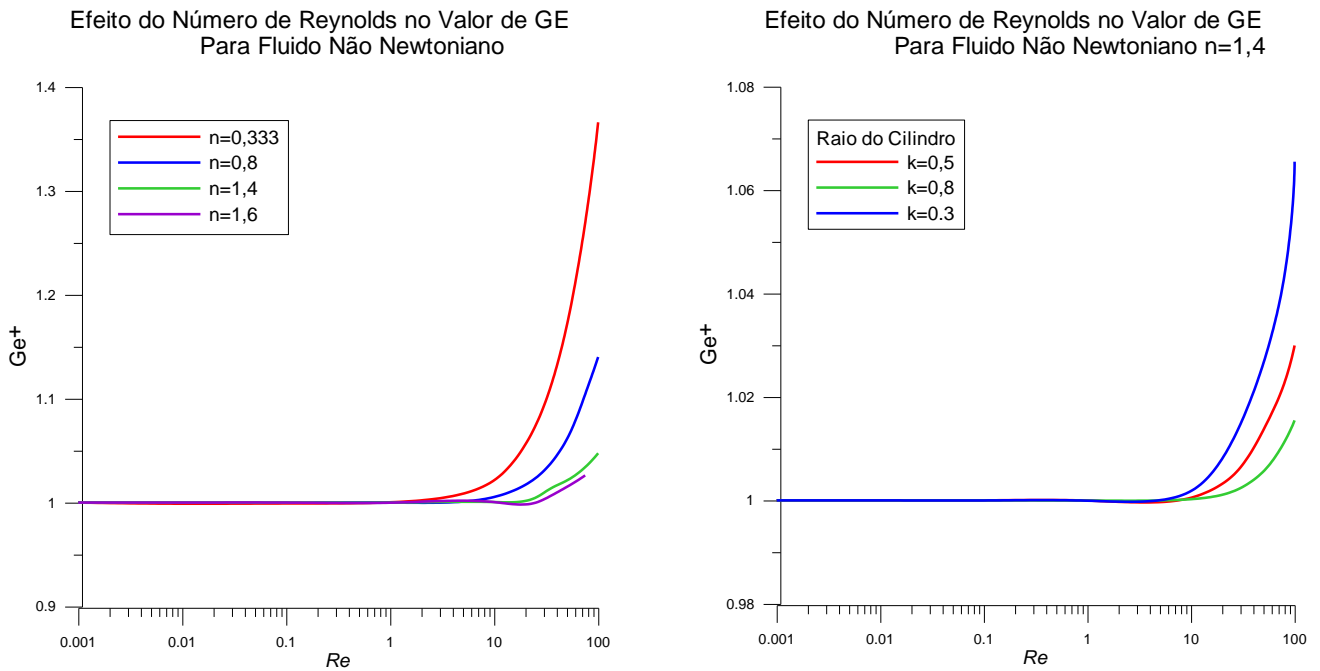


Figura 5 - Variação de  $Ge^+$  em função do número de Reynolds variando-se (a) as características do fluido e (b) o diâmetro do cilindro.

O comportamento das curvas pode ser compreendido pela observação dos padrões de escoamento. Na Fig. (6) estão representadas as linhas de corrente e as distribuições de pressão para valores de Reynolds iguais a 0,1, 10 e 100 e para fluidos com  $n=0,333$  e 1,4. a 67 estão representadas as linhas de corrente e as distribuições de pressão, considerando números de Reynolds iguais a 0,1, 10 e 100 para fluidos com  $n=0,333$ ,  $n=0,8$  e  $n=1,4$  respectivamente, sendo que, para melhor visualização, a direção radial foi ampliada. Como o comportamento do escoamento está fortemente afetado pelas bordas do cilindro, na Fig. (7) são mostradas ampliações dos perfis de velocidade nestas regiões.

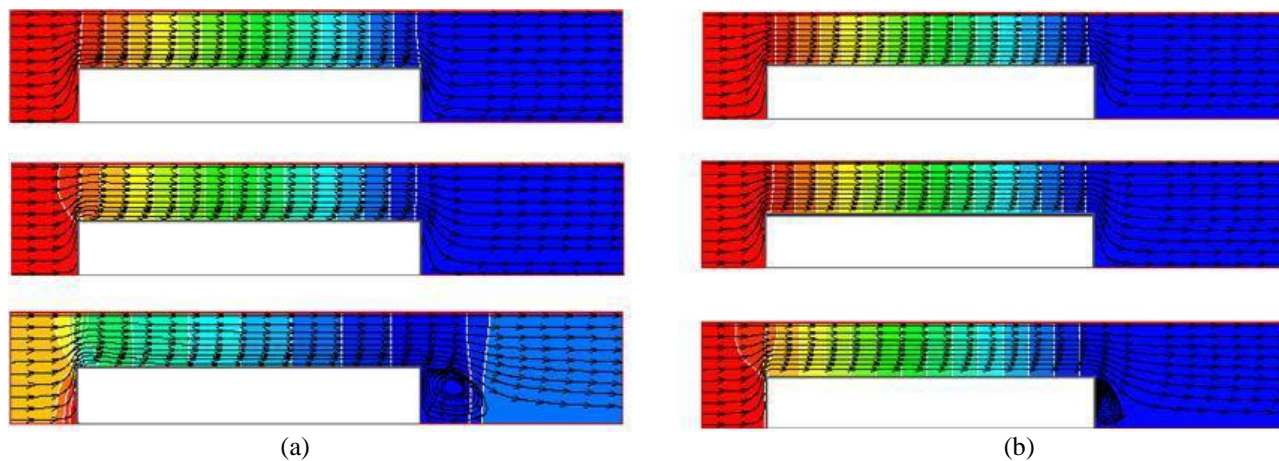


Figura 6- Padrões de escoamento para  $Re = 0, 1, 100$  e  $k=0,5$ , para fluido com (a)  $n=0,333$  e (b)  $n=1,4$

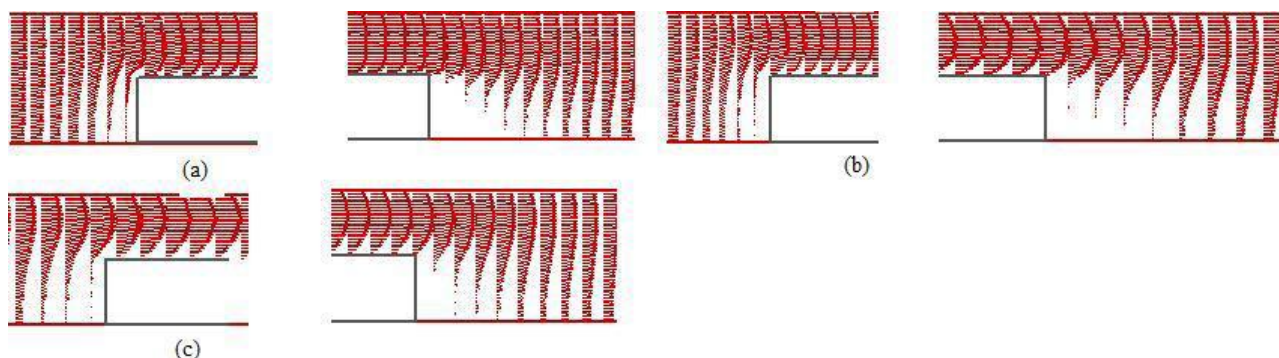


Figura 7- Perfis de velocidade:  $Re = 10$  e  $k=0,5$ , para fluido com (a)  $n=0,333$ , (b)  $n= 0,8$  e (c)  $n=1,4$ .

Nos dois primeiros casos  $n < 1$ , ou seja, os fluidos são classificados como pseudoplásticos cuja característica é a diminuição da viscosidade com o aumento da taxa de deformação. Assim, a medida que o número de Reynolds aumenta a diminuição da viscosidade aparente faz com que os perfis sejam bastante mais achatados, ocorrendo um aumento relativo do gradiente da velocidade próximo ao cilindro. Quanto menor o expoente do fluido mais sensível é este comportamento. Assim verifica-se que as alterações nos padrões de escoamento são maiores para o fluido com  $n=0,333$  do que para aquele com  $n=0,8$ , e isso também é o verificado na Fig. (5).

No terceiro conjunto  $n=1,4$ , ou seja o fluido é caracterizado como dilatante ou seja, sua viscosidade aparente aumenta com a taxa de deformação. Desta forma os perfis de velocidade tendem a apresentar velocidades mais altas na região central do anel e as variações do número de Reynolds, dentro da faixa utilizada, causam poucas alterações nos perfis junto à parede do cilindro. As distribuições de pressão sofrem então poucas alterações, em relação ao caso unidimensional, devido aos efeitos de borda.

Foram também verificadas as influências do comprimento do cilindro sobre o número de geometria, e o resultado está apresentado na Fig. (8), para um cilindro com  $k=0,5$ . Os resultados para outros valores de relação de raios são similares a estes. Nestas simulações foram consideradas aproximações de 2ª ordem para as derivadas junto ao cilindro. Como era de se esperar, o aumento do comprimento do cilindro faz com que a solução se aproxime daquela para um cilindro infinito.

Finalmente, se realizou um experimento preliminar para efeito de verificação de coerência dos resultados obtidos. A curva tensão-deformação para um suco de laranja concentrado a  $26,5^\circ\text{C}$  foi levantada utilizando-se um reômetro de rotação de estrutura RHEOTEST 2 de fabricação alemã com precisão de  $\pm 3\%$  nos terços iniciais e finais de escala e  $\pm 1\%$  no terço médio. A partir dos valores medidos se obteve, por regressão, a curva representativa para um modelo de lei de potência sendo que o resultado obtido está representado na Fig. (9a). Foram então realizados ensaios com um viscosímetro de queda de tubo construído a partir de um tubo de vidro com  $18,1$  mm de diâmetro interno e um conjunto de cilindros construídos com  $L^+ = 8$  e  $k=0,875$ . Os cilindros são ocios, com diferentes espessuras de parede de forma a se variar a massa específica aparente dos mesmos. Os resultados obtidos são então apresentados na Fig. (9b). Nota-se uma boa coerência entre os resultados experimentais e teóricos para baixos valores do número de Reynolds. Para Reynolds maiores os desvios foram maiores devido ao fato de não se conseguir um movimento com velocidade terminal de queda para o comprimento do tubo do viscosímetro utilizado.



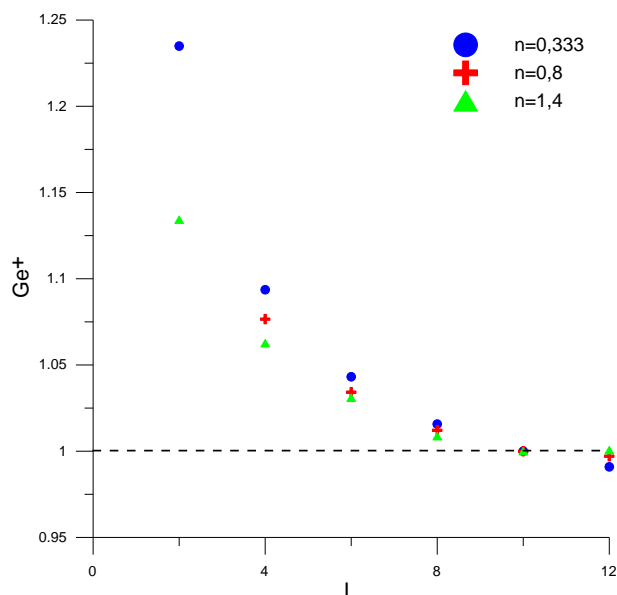


Figura 8- Perfis Influência do comprimento do cilindro sobre o número de geometria,  $Re=0,1$

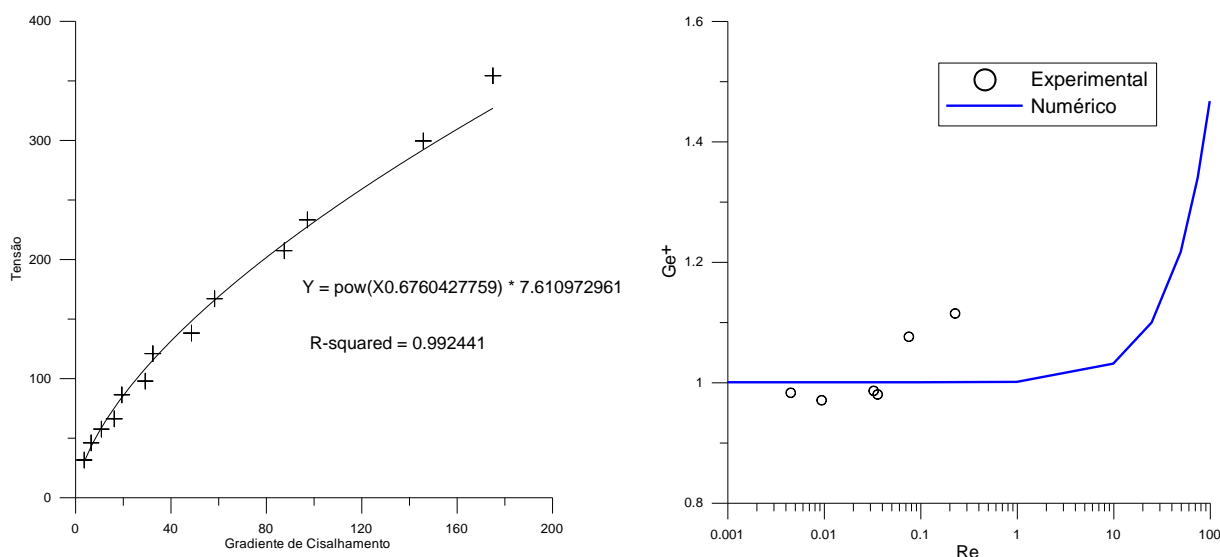


Figura 9 - Resultados experimentais

## 5. CONCLUSÕES

Neste trabalho se estudou o uso de viscosímetro de queda de cilindro em fluido não newtoniano avaliando-se os efeitos de borda devidos ao comprimento finito do cilindro. Estes efeitos foram avaliados através do desenvolvimento de um modelo bidimensional utilizando as equações de conservação de massa e quantidade de movimento sendo que o modelo foi validado através de comparações com casos limites encontrados na literatura aberta.

Pelos resultados obtidos, conclui-se que é necessário utilizar cilindros com comprimentos  $L^+$  da ordem de 10 para se evitar grandes desvios no cálculo das propriedades.

Um conjunto de experimentos preliminares foi realizado, e os dados obtidos mostram haver uma boa concordância entre os valores teóricos e experimentais para os ensaios nos quais se conseguiu atingir a velocidade terminal de queda antes da região de medição.

## 6. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer o apoio financeiro da FAPESP, processo # 2008/06051-8.

## 7. REFERÊNCIAS

Ashare, E., Bird, R.B., Lescarbours, J. A., 1965, "Falling Cylinder Viscometer for Non Newtonian Fluids, A.I.Ch.E. Journal, Vol 11, No. 5, pp 910 – 916.

- Chen, M.C.S., Swift, G.W., 1972, "Analysis of Entrance and Exit Effects in a Falling Cylinder Viscometer", AICHE Journal, Vol 18, No.1, pp146-149.
- Eichstadt, F.J., Swift, G.W., 1966, "Theoretical Analysis of the Falling Cylinder Viscometer for Power-Law and Bingham Plastic Fluids", AICHE J., Vol. 12, N° 6, pp. 1179-1183.
- Gui F., Irvine, T.F., 1994, "Theoretical and Experimental Study of The Falling Cylinder Viscometer", Int. J. Heat Mass Transfer, Suppl. 1, pp. 41-50.
- Lorenz, J., Swift, G.W., Kurata, F., 1960, "An Experimentally Verified Theoretical Study of Falling Cylinder Viscometer", AICHE Journal, Vol. 6, No. 4, pp.547-550.
- Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corporation, New York.

## 8. DIREITOS AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo do material impresso incluído no seu trabalho.

# END EFFECTS ANALYSIS FOR FALLING-CYLINDER VISCOMETERS WITH POWER-LAW NON-NEWTONIAN FLUIDS

Mauricio Araujo Zanardi, [mzanardi@feg.unesp.br](mailto:mzanardi@feg.unesp.br)<sup>1</sup>  
Fabio Eduardo Ferraz de Carvalho, [fabioeduardo@bol.com.br](mailto:fabioeduardo@bol.com.br)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>DEN/FEG/UNESP-Univ. Estadual Paulista, Av Ariberto Pereira da Cunha 333, 12516-410 - Guaratinguetá-SP

**Abstract.** *There are many devices used to measure the rheological properties of the fluids. The most common are the capillary, rotational cylinder and cones and falling spheres, cylinder or needle viscometers. The mathematical formulation for each of them have been presented for a long time and are very well known especially when concerning to newtonian fluids. Recently uses of such devices with non newtonian fluids are being reported. Specifically for the for the falling cylinder viscometer the reported formulations normally consider long cylinders for which the ends effects are neglected. The aim of this work is to verify the ends effects when a falling cylinder viscometer is used to determine the characteristics of a power-law non newtonian fluid. A two-dimensional model is constructed in order to determine the flow velocity and pressure fields around the cylinder. Effects of the cylinder length over the terminal velocity are determined.*

**Keywords:** *viscoplastic fluids, falling cylinder viscometer, rheological properties*

## RESPONSIBILITY NOTICE

The authors are the only responsible for the printed material included in this paper.