

MODELAGEM P-ADAPTATIVA DA DINÂMICA DE PÓRTICOS PLANOS

Horacio Valadares Duarte

Departamento de Engenharia Mecânica- UFMG
Av. Antonio Carlos, 6627 - Campus Pampulha
CEP 31270-901 - Belo Horizonte, MG, Brasil

Renato Pavanello

Departamento de Mecânica Computacional - FEM - UNICAMP
C.P. 6122 - CEP 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

Resumo

Neste trabalho apresenta-se o equacionamento e os resultados obtidos para o problema de vibrações livres em pórticos planos. Foi usado o método p na aproximação por elementos finitos, desenvolvida uma família de funções de forma para os deslocamentos transversais e de rotação, e utilizada outra família de funções de forma para deslocamento longitudinal. Este procedimento possibilita o emprego do estimador de erro na norma da energia (Friberg et al., 1987) para problemas de autovalores. Desta forma os resultados são obtidos para um erro máximo aceitável previamente estipulado em uma faixa de frequências de interesse. Os resultados obtidos por este método são comparados aos resultados numéricos obtidos de programas de elementos finitos com elementos convencionais.

Palavras-chave: Método de Elementos Finitos, Pórticos, Autovalores e Autovetores, Estimador de Erros, Análise p-adaptativa

1. INTRODUÇÃO

O procedimento tradicional para estimar o erro em problemas de elementos finitos convencionais é o de variar a malha até que os valores para frequência não se alterem com o número de elementos, seja o problema estático ou dinâmico. Algumas estruturas se apresentam em configurações em que é difícil uma maior discretização como é o caso da treliça. Nestes casos o procedimento tradicional para verificar a convergência na faixa de frequências de interesse fica comprometido. A metodologia aqui descrita conhecida como método p -adaptativo pode ser aplicada a diferentes tipos de estruturas bidimensionais simples: barras, treliças, vigas e pórticos. Como o procedimento é adaptativo há a necessidade de se estimar o erro associado ao elemento de forma a aumentar a ordem do

polinômio hierárquico apenas nos elementos onde é realmente necessário.

Em problemas de autovalor e autovetor é usada a norma da energia como técnica de estimar o erro (Noor et al., 1987). Para minimizar o número de operações e viabilizar o processo p-adaptativo foi empregado o estimador proposto por (Friberg, 1986).

A família de funções de forma empregada na discretização das equações dinâmicas na direção longitudinal foi proposta por (Babuška e Sazbó, 1991). Para as funções de forma físicas na direção transversal foram usadas as funções tradicionais (Cook et al., 1989) que satisfazem as exigências de continuidade da função e de sua derivada nos nós. As funções de forma de ordem mais elevada para esta direção foram desenvolvidas objetivando satisfazer a continuidade nos nós e diagonalizar os termos hierárquicos ou de mais alta ordem na matriz de rigidez. Este procedimento permite maior rapidez no processamento do estimador de erro (Babuška e Sazbó, 1991).

Na seção de formulação são apresentados as equações que descrevem o comportamento dinâmico do pórtico bidimensional, as funções de forma empregadas, discutido o estimador sua formulação e implementação (Friberg et al., 1987). Em seguida são apresentados os resultados numéricos obtidos pelo método p e por elemento finitos convencionais. Na seção de análise de resultados é feita uma comparação entre os métodos.

2. FORMULAÇÃO PARA PÓRTICO

A equação que descreve a vibração de uma barra na direção longitudinal é escrita como:

$$AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

sendo A a área da seção do elemento de pórtico, E o módulo de elasticidade, ρ a densidade do material e u indica o deslocamento nesta mesma direção. A expressão que descreve a flexão é:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \right) + A\rho \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0; \quad (2)$$

sendo I o momento de inércia da seção transversal em relação a linha neutra. Aqui s representa o deslocamento na direção normal. Será considerado que os elementos têm área, densidade e momento de inércia constantes. Multiplicando as equações por uma função de ponderação v , integrando sobre o comprimento l e aplicando Green e considerando apenas as condições de Dirichlet do problema, obtém-se a forma fraca das equações diferenciais acima:

$$AE \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx - \omega^2 A\rho \int_0^l uv dx = 0; \quad (3)$$

$$EI \int_0^l \frac{d^2 s}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} dx - \omega^2 \int_0^l (A\rho sv) dx = 0. \quad (4)$$

O próximo passo é fazer a aproximação por elementos finitos. Para tal é necessário que se defina as funções de forma.

2.1. Formulação das Funções de Forma para Pórtico

As funções de forma físicas para interpolação linear do deslocamento longitudinal no espaço isoparamétrico $-1 < \xi < 1$ são as expressões N_1^b e N_2^b na primeira coluna da Equação 5. Nas duas últimas colunas desta equação estão as funções de forma físicas empregadas na discretização Equação 4, respectivamente as funções de forma para deslocamento transversal e rotação (Cook et al., 1989).

$$\begin{aligned} N_1^b &= \frac{1}{2}(1 - \xi) & N_1^v &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) & N_2^v &= \frac{L}{8}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ N_2^b &= \frac{1}{2}(1 + \xi) & N_3^v &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) & N_4^v &= \frac{L}{8}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \quad (5)$$

As funções de forma de ordem mais elevada aqui usadas serão consideradas em dois grupos. Um para a equação que descreve a dinâmica do sistema na direção longitudinal e outro grupo para os movimentos transversais ou de flexão. Para a direção longitudinal foi empregada a família desenvolvida por (Babuška e Sazbó, 1991), obtida a partir dos polinômios de Legendre. Os polinômios de Legendre $P(\xi)$ pertencem a uma das famílias que exibem propriedades de ortogonalidade no domínio $-1 \leq P(\xi) \leq 1$ e são empregados na definição de funções de forma de ordem elevada. Para o caso específico as funções são definidas garantindo que sejam nulas em $\xi = -1$ e $\xi = 1$ onde os valores nodais já foram atribuídos pelas funções de forma físicas. Uma exigência adicional para reduzir o esforço computacional no processo de estimação do erro é que a integral do produto das derivadas entre funções hierárquicas de ordem ou graus diferentes se anulem. Esta exigência significa que a matriz de rigidez terá os termos convencionais gerados pelas funções de forma físicas, todos os outros elementos gerados pelas funções de forma hierárquicas são nulos, exceto na diagonal. Para a direção longitudinal:

$$N_k^b(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2(2j-1)}} [P_j(\xi) - P_{j-2}(\xi)]; \quad (6)$$

nesta expressão N_k^b é a k -ésima função de forma hierárquica de ordem ou grau j e P_j é o polinômio de Legendre de ordem $j \geq 2$.

Para a equação de flexão ou para direção transversal, as funções de forma internas e suas derivadas devem ser nulas em $\xi = \pm 1$, pontos onde já foram atribuídos valores pelas funções de forma físicas (condição de continuidade C^0 e C^1). Usando as propriedades dos polinômios de Legendre com as limitações impostas pelo problema físico propõe-se as seguintes funções de forma internas ou hierárquicas para o problema:

$$N_n^v(\xi) = \frac{1}{\sqrt{8(2j-3)}} \left[\frac{P_j(\xi) - P_{j-2}(\xi)}{(2j-1)} - \frac{P_{j-2}(\xi) - P_{j-4}(\xi)}{(2j-5)} \right] \quad (7)$$

A ordem do polinômio j deve ser $j \geq 4$. A família de funções de forma proposta também vai gerar uma matriz de rigidez que terá apenas termos hierárquicos nulos fora da diagonal principal. Outra consideração que deve ser feita é em relação à mudança de coordenadas do referencial local para o global. O procedimento de mudança de coordenadas é feito de maneira convencional sobre os termos físicos. Os termos resultantes da integração do produto de funções de forma físicas por funções de forma hierárquicas devem sofrer mudanças de coordenada. Os termos resultantes do produto de funções hierárquicas apenas não necessitam desta transformação.

2.2. Formulação do Estimador de Erro para Pórtico

Uma vez discretizado o domínio e aplicada a aproximação por elementos finitos a solução do sistema passa a ser o problema de autovalor:

$$[[K] - \omega^2[M]] \{u\} = \{0\}$$

onde $u = \{u_1, w_1, \theta_1, u_2, w_2, \theta_2, a_1, \dots, a_i\}^T$, sendo u o deslocamento longitudinal, w o deslocamento transversal e θ a rotação no nó, a_i o coeficiente do i -ésimo termo hierárquico, $[M]$ a matriz de massa e $[K]$ a matriz de rigidez. A solução deste tipo de problema leva aos chamados autovalores $\omega^2 = [\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_n^2]^T$ e aos vetores de deslocamento relativo chamados de modos de vibrar do sistema $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n]$.

Para a i -ésima frequência pode-se mostrar que (Babuška et al., 1989)

$$\frac{\omega_n^2 - \omega_{\epsilon x}^2}{\omega_{\epsilon x}^2} = \|\varepsilon_n\|_E^2 \quad (8)$$

sendo $\|\varepsilon_n\|_E$ o erro na norma da energia para um elemento com funções de forma definidas por polinômios hierárquicos de ordem n . Define-se também

$$\varepsilon_{n,m} = (\|\phi(n, m) - \phi(n)\|_E)^{\frac{1}{2}}$$

$$\varepsilon_{n,m}^2 = \|\phi_{\epsilon x} - \phi(n)\|_E^2 - \|\phi_{\epsilon x} - \phi(n, m)\|_E^2$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\varepsilon_{n,m})^2 = \|\phi_{\epsilon x} - \phi(n)\|_E^2 = \|\varepsilon_n\|_E^2$$

uma vez que formalmente:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\phi_{\epsilon x} - \phi(n, m)\|_E^2 = 0$$

Isto é, o modo próprio genérico $\phi(n, m)$ é a solução do problema considerando apenas um elemento particular que teve o grau hierárquico elevado de n para $n+m$. O refinamento p é equivalente à prática de refinar a malha, sendo a dirença básica que para o refinamento p a matriz original é preservada, acrescentando-se apenas as linhas e colunas contendo as equações dos graus hierárquicos adicionais do elemento. Portanto, o procedimento é de elevar o grau hierárquico n de um elemento para $n+m$ e comparar a solução obtida com a solução anterior representada pelo modo próprio por $\phi(n)$. Quando $m \rightarrow \infty$ a solução é a exata para o elemento. Caso a solução esteja muito distante da exata uma pequena alteração no grau hierárquico implica em um drástica mudança nas soluções do problema $\phi(n, m)$ e $\phi(n)$. É nesta constatação que se baseia o método.

Um dos problemas que surgem com o estimador de erro como o delineado acima, é o cálculo dos autopares. O método baseia-se no cálculo do erro para cada elemento pela alteração no grau hierárquico. Para uma malha com k elementos a estimativa de erro para a i -ésima frequência será o somatório da estimativa de erro de cada elemento para esta frequência alterando o grau hierárquico de n_i para $n_i + m_i$. Isto significa que para a i -ésima frequência os autopares serão calculados tantas vezes quanto forem os elementos ou k vezes. Como o interesse é estimar o erro em uma faixa de frequências, este procedimento será repetido tantas vezes quantas forem as frequências. Como a determinação de autovalores é uma operação que toma muito tempo de processamento o procedimento se tornaria

inviável mesmo para uma malha pequena. O processo de estimar o erro só é factível se for factível estimar os autopares. O estimador implementado foi o de (Friberg, 1986), neste estimador o incremento do grau hierárquico m é de 1 o que simplifica muito na manipulação das matrizes. O erro estimado para a i -ésima frequência de um elemento genérico é dado então por:

$$\eta_{n+1} = \frac{\{[K_{n+1,n} - \lambda_i(n)M_{n+1,n}]\{\phi_n\}\}^T \{[K_{n+1,n} - \lambda_i(n)M_{n+1,n}]\{\phi_n\}\}}{k_i [K_{n+1,n+1} - \lambda_i(n)M_{n+1,n+1}]} \quad (9)$$

sendo $K_{n+1,n}$ e $M_{n+1,n}$ a matriz de rigidez e de massa acrescidas de uma linha com os termos hierárquicos $n + 1$ para o elemento em consideração. $K_{n+1,n+1}$ e $M_{n+1,n+1}$ são matrizes 1×1 contendo os termos hierárquicos da diagonal, $\lambda_i(n)$ e ϕ_n é o i -ésimo autopar para o elemento em questão. O termo k_i é definido como $k_i = \phi_i^T K_{n,n} \phi_i$. Observa-se desta forma que o problema de autovalor e autovetor será resolvido uma única vez por iteração, o que torna o processo adaptativo viável.

3. RESULTADOS NUMÉRICOS OBTIDOS

Inicialmente o programa foi testado para problemas simples com resultados teóricos disponíveis: barra e viga engastadas em uma das extremidades. Para a barra empregou-se as seguintes propriedades físicas, módulo de elasticidade $E = 1.0N/m^2$, densidade $\rho = 1.0Kg/m^3$ com dimensões físicas $l = 1m$, $A = 1m^2$. As 8 primeiras frequências naturais calculadas com erro relativo máximo $1,0 \times 10^{-2}$ são confrontados com resultados teóricos na Tabela 1. Para este caso foi empregado um único elemento. Na segunda coluna estão os resultados usando a técnica de elementos finitos, na terceira coluna encontram-se os resultados teóricos exatos, na quarta coluna apresenta-se o erro estimado e na quinta o erro absoluto calculado. Resultados obtidos após 7 iterações.

Tabela 1: Frequências em Hertz para os 8 primeiros modos da barra.

índice i	frequências MEF versão p	frequências teóricas	erro(%) η_i	erro(%) ε_i
1	2.5000e-01	2.5000e-01	0	0
2	7.5000e-01	7.5000e-01	0	0
3	1.2500e+00	1.2500e+00	0	0
4	1.7501e+00	1.7500e+00	0.007	0.003
5	2.2505e+00	2.2500e+00	0.043	0.022
6	2.7533e+00	2.7500e+00	0.233	0.119
7	3.2533e+00	3.2500e+00	0.147	0.103
8	3.7672e+00	3.7500e+00	0.741	0.459

As mesmas propriedades, dimensões físicas e número de elementos são usadas no caso da viga. O momento de inércia empregado foi $I = 1m^4$ uma vez que aqui estamos interessados apenas na validação teórica. Os resultados estão na Tabela 2 para erro relativo máximo $1,0 \times 10^{-2}$. Na segunda coluna estão os resultados usando a técnica de elementos finitos, na terceira coluna encontram-se os resultados teóricos exatos, na quarta coluna apresenta-se o erro estimado e na quinta o erro absoluto calculado.

Tabela 2: Primeiras 8 Frequências naturais em Hertz para viga.

índice i	frequências MEF versão p	frequências teóricas	erro(%) η_i	erro(%) ε_i
1	5.5959e-01	5.5959e-01	0	-0
2	3.5069e+00	3.5069e+00	0	0
3	9.8194e+00	9.8194e+00	0	0
4	1.9242e+01	1.9242e+01	0	0
5	3.1809e+01	3.1809e+01	0.001	0
6	4.7519e+01	4.7517e+01	0.011	0.006
7	6.6385e+01	6.6366e+01	0.052	0.028
8	8.8407e+01	8.8357e+01	0.085	0.057

Em seguida foi feito um teste empregando como exemplo um pórtico simples tipo portal como mostrado na Figura 1-a. Usou-se as mesmas propriedades físicas empregadas para viga e para barra com área A da seção transversal de $1m^2$ e momento de inércia $I = 1m^4$ constantes ao longo das seções com dimensão $1m \times 1m \times 1m$. Foram empregando 12 elementos uniformes. Os resultados são mostrados na Tabela 3 para erro relativo máximo $1,0 \times 10^{-2}$. Os resultados são comparados aos resultados obtidos pelo método de elementos finitos convencional com 160 elementos uniformes. Na segunda coluna estão os resultados usando a técnica de elementos finitos p-adaptativo após 2 iterações. Na terceira coluna encontram-se os resultados empregando a técnica de elementos finitos com 160 elementos. Na quarta coluna apresenta-se o erro obtido do estimador e na quinta o erro relativo percentual a partir dos valores tabelados.

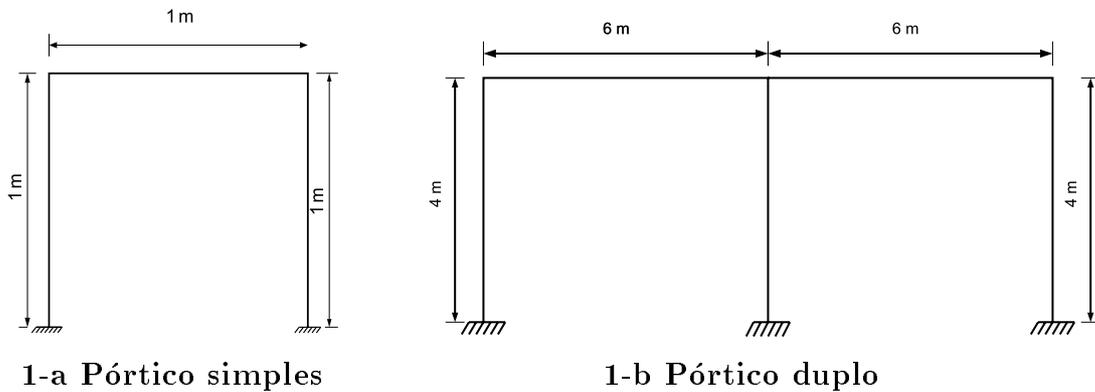


Figura 1: Dimensões Principais dos Pórticos Empregados nos Exemplos.

O último teste compara os resultados obtidos do programa MEFLAB¹ para um pórtico duplo com as seguintes características: $A = 0.04m^2$, $I = 1.3333 \times 10^{-4}m^4$, $\rho = 2500 Kg/m^3$, $E = 7.8 \times 10^{10}$. As dimensões são dadas na Figura 1-b. O programa com o estimador empregou malha com 12 elementos uniformes, o programa MEFLAB usou elementos convencionais e uma malha uniforme com 176 elementos. Na segunda coluna estão os resultados usando a técnica de elementos finitos adaptativo após 4 iterações para

¹MEFLAB é um programa de Elementos finitos escrito em Matlab e desenvolvido no Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp

Tabela 3: Primeiras 8 Frequências naturais em Hertz para pórtico simples.

índice i	frequências MEF versão p	frequências MEF-160e	erro(%) η_i	erro(%) relativo
1	1.7108e-01	1.7108e-01	0.001	-0.004
2	2.6952e-01	2.6952e-01	0.002	-0.004
3	4.5804e-01	4.5804e-01	0.029	0.021
4	5.7089e-01	5.7075e-01	0.081	0.024
5	6.2839e-01	6.2830e-01	0.058	0.015
6	7.4360e-01	7.4298e-01	0.214	0.081
7	9.3928e-01	9.3791e-01	0.364	0.147
8	1.0437e+00	1.0399e+00	0.866	0.372

um erro máximo aceitável de $1,0 \times 10^{-2}$. Na terceira coluna encontram-se os resultados para o mesmo pórtico empregando o programa MEFLAB com 176 elementos. Na quarta coluna apresenta-se o erro obtido do estimador e na quinta o erro relativo calculado a partir dos valores tabelados.

Tabela 4: Primeiras 15 Frequências naturais em Hertz para pórtico duplo.

índice i	frequências MEF versão p	frequências MEFLAB 176e	erro(%) η_i	erro(%) relativo
1	7.8661e+00	7.8651e+00	0	0.012
2	2.0551e+01	2.0548e+01	0.002	0.012
3	2.6085e+01	2.6081e+01	0.002	0.012
4	5.4204e+01	5.4190e+01	0.029	0.026
5	5.7257e+01	5.7241e+01	0.034	0.028
6	6.3218e+01	6.3190e+01	0.067	0.045
7	8.0627e+01	8.0574e+01	0.107	0.065
8	8.1475e+01	8.1442e+01	0.059	0.040
9	1.3687e+02	1.3677e+02	0.107	0.076
10	1.4706e+02	1.4692e+02	0.145	0.091
11	1.7327e+02	1.7307e+02	0.169	0.111
12	1.8068e+02	1.8035e+02	0.268	0.183
13	1.8874e+02	1.8836e+02	0.260	0.203
14	2.2710e+02	2.2672e+02	0.277	0.168
15	2.4091e+02	2.3975e+02	0.868	0.484

4. ANÁLISE DE RESULTADOS

Aqui será considerado que o estimador de erro consegue captar corretamente o erro real se o erro estimado for maior que o erro real mantendo-se dentro da mesma ordem. Este comportamento é exibido nas tabelas da seção anterior para modos de ordem mais elevada, onde os erros maiores são esperados. Também chama a atenção a incapacidade

do estimador de prever corretamente o erro para baixas frequências cujos erros relativos são muito menores do que erro máximo aceitável. Parte deste comportamento pode ser explicado pelo método se basear em uma série de simplificações para torna-lo operacional. Obviamente isto não é exatamente um problema se o objetivo do estimador é manter o erro abaixo de um determinado valor prescrito e não conhecer o seu valor exato.

5. CONCLUSÕES

Pelos dados apresentados o estimador funcionou corretamente e as funções de forma propostas foram aprovadas nos testes numéricos realizados. Deve-se ponderar que as malhas empregadas eram uniformes e que a relação entre o número de elementos da malha original e o número de iterações não foi analisado. Entretanto chama a atenção a diferença entre o número de iterações que foram realizadas para que fosse alcançado o erro arbitrado na faixa de interesse entre os diferentes problemas. Para a viga e a barra ambas com 1 elemento foram necessárias 7 iterações, no caso do pórtico simples e duplo(ambos com 12 elementos) foram necessárias apenas 2 e 4 iterações respectivamente. Estes dados indicam que há uma relação ótima entre discretização da malha e a ordem do grau hierárquico p e ou o número de iterações.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES e a FAPESP pelo apoio parcial a realização deste trabalho.

7. REFERÊNCIAS

- Babuška, I., Guo, B. Q., Osborn, J. E., 1989, Regularity and Numerical Solutions of Eigenvalue Problems with Piecewise Analytic Data & SIAM J. Numer. Anal., vol. 26 No.6 , pp. 1534-1560.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., 1989, Concepts and Application of Finite Element Analysis, McGraw-Hill, London.
- Friberg, O., 1986, An Error Indicator for the Generalized Eigenvalue Problem Using The Hierarchical Finite Element Method & Intern. J. N. Methods in Eng., vol. 23, pp. 91-98.
- Friberg, O., Möller P., Makovička, D., Wiberg N. E., 1987, An Adaptive Procedure for Eigenvalue Problems Using The Hierarchical Finite Element Method & Intern. J. N. Methods in Eng., vol. 24, pp. 319-335.
- Noor, A. K., Babuška , I., 1987, Quality Assessment and Control of Finite Element Solutions & Finite Elements Analysis and Desing, vol. 3, pp. 01-26.
- Sazbó, B., Babuška, I., 1991, The Finite Element Analysis, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Zienkiewicz, O. C., 1971, The Finite Element Method, McGraw-Hill, London.