

ESCOAMENTO INTERNO EM CANAL DE PLACAS PLANAS COM PERFIL HIDRODINÂMICO PLENAMENTE DESENVOLVIDO NA ENTRADA E TERMICAMENTE EM DESENVOLVIMENTO COM VISCOSIDADE VARIÁVEL

Fábio da Silva e Oliveira Filho

Francesco Scofano Neto

Rodrigo Otávio de Castro Guedes

Instituto Militar de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais, Praça General Tibúrcio 80, 22290-270, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Resumo

O objetivo deste trabalho é realizar o estudo do problema de transferência de calor por convecção forçada interna de líquidos, escoando em canais de placas planas e paralelas. Para a sua solução, utiliza-se o procedimento híbrido numérico-analítico da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Neste estudo, considera-se que o perfil de velocidade encontra-se plenamente desenvolvido na entrada do duto e termicamente em desenvolvimento. Considera-se também que as propriedades termofísicas permanecem constantes, variando-se somente a viscosidade dinâmica.

Palavras-chave: Convecção forçada, Viscosidade variável, Dutos, Velocidade axial, Número de Nusselt

1. INTRODUÇÃO

O estudo do problema de convecção forçada interna em dutos, considerando a hipótese de propriedades termofísicas constantes é amplamente explorado na literatura. Porém, para que tal hipótese seja válida, deve-se admitir que as diferenças de temperatura envolvidas no problema são bastante pequenas, o que restringe muito o campo de aplicação da solução deste problema.

Por outro lado, sabe-se que as propriedades termofísicas variam com a pressão e a temperatura e, particularmente, para o caso do fluido ser líquido, essas propriedades mantêm forte dependência com a temperatura, sendo que a viscosidade apresenta o maior percentual de variação em relação às demais propriedades (Kakaç et al.,1987). No entanto, se as velocidades envolvidas forem relativamente pequenas e o fluido em estudo for um líquido não-metálico, pode-se considerar as propriedades termofísicas massa específica, calor específico e condutividade térmica praticamente constantes, dentro de uma determinada faixa de temperatura, sendo somente a viscosidade função da temperatura.

Assim, nesta contribuição pretende-se estudar o problema de transferência de calor por convecção forçada interna em líquidos escoando em canais de placas planas paralelas, utilizando-se o procedimento híbrido analítico-numérico da Técnica da Transformada Integral Generalizada (Cotta, 1993). O escoamento é modelado como possuindo um perfil de velocidade plenamente desenvolvido na entrada do canal e termicamente em desenvolvimento com viscosidade variável em função da temperatura somente, enquanto as demais propriedades termofísicas são tomadas como constantes.

Tal formulação foi adotada por Yang (1962) ao resolver este problema através de métodos integrais aproximados e posteriormente retomada por Gryglaszewski et al. (1980) que utilizaram soluções numéricas para a resolução da equação final. O presente trabalho busca uma alternativa às soluções acima através de um enfoque de caráter híbrido analítico-numérico com vantagens nítidas sobre os esquemas puramente numéricos, como por exemplo diferenças finitas, usualmente utilizados na solução das equações que governam este tipo de fenômeno.

2. ANÁLISE

Considera-se um canal de comprimento semi-infinito, formado por duas placas planas e paralelas, fixas no espaço, separadas por uma distância $2L^*$, submetido à temperatura prescrita T_w na parede, dentro do qual escoa um fluido líquido. Na entrada do duto, o perfil de temperatura T_e é constante e o perfil de velocidade está plenamente desenvolvido. O escoamento é laminar e incompressível, simétrico em relação ao eixo axial e em regime permanente. Os efeitos de convecção natural, difusão de calor axial, dissipação viscosa e geração de calor são desprezados. Ademais, supõe-se que a viscosidade apresenta uma dependência com relação à temperatura enquanto que as demais propriedades termofísicas permanecem constantes. Além disso, a velocidade na direção radial, resultante da variação de viscosidade, possui valor muito pequeno em comparação a velocidade na direção axial e é conseqüentemente abandonada.

As equações de governo na forma dimensional, levando-se em consideração as hipóteses simplificadoras mencionadas acima, são dadas por:

$$0 = -\frac{dp(x)}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu^*(T) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$u(x, y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \quad (2)$$

As condições de entrada e de contorno para este problema são:

$$u(0, r) = -\frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \Big|_{x=0} (L^{*2} - y^2); \quad T(0, y) = T_e \quad -L^* < y < L^* \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad ; \quad u(x, \pm L^*) = 0; \quad T(x, \pm L^*) = T_w \quad x > 0 \quad (4)$$

Considerando-se a simetria do problema e integrando-se a equação da quantidade de movimento (1) duas vezes em relação a variável longitudinal y , utilizando-se a formulação para a velocidade média, Shah and London (1978), obtém-se a seguinte expressão para a velocidade axial na forma adimensional:

$$U(X, Y) = \frac{\int_Y^1 \frac{Y'}{\mu(\theta)} dY'}{\int_0^1 \left(\int_Y^1 \frac{Y'}{\mu(\theta)} dY' \right) dY} \quad (5)$$

onde as variáveis adimensionais são definidas como:

$$Y = \frac{y}{L^*}; X = \frac{\alpha x}{L^{*2} u_M}; U = \frac{u}{u_M}; \quad \theta = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}; \quad \mu = \frac{\mu^*(T)}{\mu_w^*} \quad (6)$$

A seguinte expressão, formulada por Yang (1962), será adotada para a viscosidade como função da temperatura :

$$\mu(\theta) = \frac{1}{1 + \gamma \theta(X, Y)} \quad (7)$$

onde γ é um parâmetro de viscosidade característico do fluido, de valor negativo, para aquecimento do fluido, e positivo, para resfriamento.

Em termos da expressão para a viscosidade (7), a expressão (5) pode ser reescrita como:

$$U(X, Y) = \frac{\int_Y^1 Y' [1 + \gamma \theta(X, Y)] dY'}{\int_0^1 \left(\int_Y^1 Y' [1 + \gamma \theta(X, Y)] dY' \right) dY} \quad (8)$$

Com isso as equações de governo (1) e (2) , em sua forma adimensional, podem ser reduzidas a uma única equação em termos do campo de temperatura $\theta(X, Y)$, conforme proposto por Yang (1962):

$$\frac{\int_Y^1 Y' [1 + \gamma \theta(X, Y)] dY'}{\int_0^1 \left(\int_Y^1 Y' [1 + \gamma \theta(X, Y)] dY' \right) dY} \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} = \frac{\partial^2 \theta(X, Y)}{\partial Y^2} \quad (9)$$

Sujeita às seguintes condições de entrada e de contorno:

$$\theta(0, Y) = 1 \quad 0 < Y < 1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y}(X, 0) = 0 \quad ; \quad \theta(X, 1) = 0 \quad X > 0 \quad (11)$$

De acordo com os preceitos da Técnica da Transformada Integral Generalizada, o campo de temperatura será expandido através de uma base de autofunções e, de modo a fazer uma representação adequada, o problema de autovalor deve ser escolhido de tal forma que ele contenha grande parte das características da formulação matemática do problema físico. Assim, através de uma inspeção das equações (9) - (11), escolhe-se o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \phi_i(Y)}{dY^2} + \mu_i^2 \phi_i(Y) = 0 \quad 0 < Y < 1 \quad (12)$$

$$\frac{d\phi_i(0)}{dY} = 0 \quad ; \quad \phi_i(1) = 0 \quad (13)$$

cuja solução em termos dos autovalores, e respectivas autofunções e normas (Boyce e Diprima, 1992) é dada por:

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)\pi}{2}; \quad \phi_i(Y) = \cos(\lambda_i Y); \quad N_i = \frac{1}{2} \quad i = 1,2,3,\dots \quad (14)$$

Utilizando-se a propriedade de ortogonalidade das autofunções, pode-se facilmente determinar o par de transformação e inversão (Cotta, 1993) por:

$$\bar{\theta}_i(X) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \phi_i(Y) \theta(X, Y) dY \quad (\text{Transformada}) \quad (15)$$

$$\theta(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^{1/2}} \phi_i(Y) \bar{\theta}_i(X) \quad (\text{Inversa}) \quad (16)$$

De modo a promover a transformação integral do problema original uma série de operações matemáticas deverão ser feitas resultando ao final um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias para a variável $\bar{\theta}_i(x)$. Assim, inicialmente integra-se a equação (9) em relação à coordenada longitudinal no intervalo (0,Y). Realiza-se uma nova integração ao longo do intervalo (Y,1), e com o auxílio das condições de contorno descritas em (11), tem-se uma equação explícita para o campo de temperatura local dada por:

$$\theta(X, Y) = - \int_Y^1 \left(\int_0^{Y''} U(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} dY' \right) dY'' \quad (17)$$

Utilizando a relação acima na equação de transformação, equação (15), tem-se que a temperatura transformada pode ser expressa como :

$$\bar{\theta}_i(X) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \phi_i(Y) \left[- \int_Y^1 \left(\int_0^{Y''} U(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} dY' \right) dY'' \right] dY \quad (18)$$

Neste estágio, utiliza-se a o perfil de velocidades, equação (8), e efetuando uma integração por partes chega-se a:

$$\lambda_i^2 \bar{\theta}_i(X) = - \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 \phi_i(Y) \frac{\int_Y^1 Y' [1 + \gamma \theta(X, Y)] dY'}{\int_0^1 \left(\int_{Y''}^1 Y' [1 + \gamma \theta(X, Y)] dY' \right) dY''} \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} dY \quad (19)$$

Substituindo-se a fórmula de inversão (16) na expressão acima e realizando-se algumas manipulações algébricas convenientes, obtém-se:

$$-\lambda_i^2 \bar{\theta}_i(X) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\bar{\theta}_j(X)}{dX} \frac{1}{(N_i N_j)^{1/2}} \int_0^1 \left[\frac{1-Y^2}{2} + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} F_k^*(Y) \cdot \bar{\theta}_k(X) \right] \psi_i(Y) \cdot \psi_j(Y) \cdot dY \quad (20)$$

onde,

$$F_k^*(Y) = \frac{1}{N_k^{1/2}} \int_Y^1 Y' \phi_k(Y') dY' = \frac{\sqrt{2}}{\mu_k} \left[\text{sen } \lambda_k - Y \text{sen}(\lambda_k Y) + \frac{\cos(\lambda_k) - \cos(\lambda_k Y)}{\lambda_k} \right] \quad (21)$$

$$M_k^* = \int_0^1 F_k^*(Y) dY = \frac{\sqrt{2}}{\lambda_k} \left[\text{sen}(\lambda_k) - 2 \frac{\text{sen}(\lambda_k)}{\lambda_k^2} + 2 \frac{\cos(\lambda_k)}{\lambda_k} \right] \quad (22)$$

Como se pode perceber da análise da equação (20), as manipulações descritas acima resultaram em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias para a temperatura transformada. Sob um ponto de vista prático, a expansão em (16) deve ser truncada em um número suficientemente grande de termos para que um critério de convergência pré-estabelecido seja atingido. Assim, ao se trabalhar com uma expansão genérica de N termos em (16), o sistema de equações diferenciais ordinárias pode ser colocado no arranjo matricial abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} [A] \left[\frac{d\bar{\theta}(X)}{dX} \right] = -[B] [\bar{\theta}(X)] \\ \bar{\theta}_i(0) = \frac{\sqrt{2} \text{sen}(\lambda_i)}{\lambda_i} \end{array} \right. \quad (23)$$

onde,

$$[A] = \{a_{i,j}\}; \quad a_{i,j} = \sum_{j=1}^N \left[I_{ij}^* + \gamma \sum_{k=1}^N L_{ijk}^* \bar{\theta}_k(X) \right] \quad (24)$$

$$[B] = \{b_{i,j}\}; \quad b_{i,j} = \sum_{j=1}^N \Delta_{ij} \lambda_i^2 \left[\frac{1}{3} + \gamma \sum_{k=1}^N M_k^* \bar{\theta}_k(X) \right] \quad (25)$$

$$I_{ij}^* = \frac{1}{(N_i N_j)^{1/2}} \int_0^1 \frac{(1-Y^2)}{2} \phi_i(Y) \phi_j(Y) dY, \quad (26)$$

$$L_{ijk}^* = \frac{1}{(N_i N_j)^{1/2}} \int_0^1 F_k^*(Y) \phi_i(Y) \phi_j(Y) dY \quad (27)$$

Cabe neste ponto mencionar que os coeficientes integrais descritos em (21), (22), (26), (27), (30) e (31) foram calculados analiticamente com o auxílio de expressões contidas em Gradshteyn e Ryzhik (1994). Além disto, a condição de entrada para a temperatura transformada é facilmente obtida, inserindo-se a equação (10) em (15).

De posse da solução do sistema, uma série de variáveis de interesse deste problema podem agora ser avaliadas. Por exemplo, uma expressão para o perfil de velocidade $U(X,Y)$ pode ser obtida substituindo-se (16) em (8). A expressão final em termos da temperatura transformada é:

$$U(X, Y) = \frac{\frac{1 - Y^2}{2} + \gamma \sum_{k=1}^N \frac{\sqrt{2} \bar{\theta}_k}{\lambda_k} \left[\text{sen}(\lambda_k) - Y \text{sen}(\lambda_k Y) + \frac{\cos(\lambda_k)}{\lambda_k} - \frac{\cos(\lambda_k Y)}{\lambda_k} \right]}{\frac{1}{3} + \gamma \sum_{k=1}^N \frac{\sqrt{2} \bar{\theta}_k}{\lambda_k} \left[\text{sen}(\lambda_k) - 2 \frac{\text{sen}(\lambda_k)}{\lambda_k^2} + 2 \frac{\cos(\lambda_k)}{\lambda_k} \right]} \quad (28)$$

A avaliação da temperatura média do fluido (Shah and London, 1978), em termos das variáveis transformadas, é feita através de:

$$\theta_M(X) = \sum_{j=1}^N \left[I_j^{**} \bar{\theta}_j(X) + \gamma \sum_{k=1}^N L_{jk}^{**} \bar{\theta}_j(X) \bar{\theta}_k(X) \right] / \left[\frac{1}{3} + \gamma \sum_{k=1}^N M_k^* \bar{\theta}_k(X) \right] \quad (29)$$

onde,

$$I_j^{**} = \frac{1}{N_j^{1/2}} \int_0^1 \frac{(1 - Y^2)}{2} \phi_j(Y) dY; \quad L_{jk}^{**} = \frac{1}{N_j^{1/2}} \int_0^1 F_k^*(Y) \phi_j(Y) dY \quad (30,31)$$

Finalmente, o número de Nusselt local é calculado através de

$$Nu(X) = \frac{4 \cdot \left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1}}{\theta(X, 1) - \theta_M(X)} \quad (32)$$

onde o fluxo de calor junto à parede é:

$$\left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} = \sum_{j=1}^N \frac{\phi_j'(1) \bar{\theta}_j(X)}{N_j^{1/2}} = - \sum_{j=1}^N \sqrt{2} \lambda_j \text{sen}(\lambda_j) \bar{\theta}_j(X) \quad (33)$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

De modo a analisar os efeitos da variação da viscosidade nos perfis hidrodinâmico e térmico em um escoamento com perfil de velocidade plenamente desenvolvido na entrada e térmicamente em desenvolvimento, com temperatura prescrita na parede do duto, simulações numéricas foram realizadas, tendo como base o modelo proposto por Yang (1962).

Todos os algoritmos confeccionados neste trabalho foram escritos em linguagem FORTRAN, e implementados em um PC PENTIUM 200 MMX e para a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (23) foi utilizada a subrotina DIVPAG, da biblioteca do IMSL, que faz um controle automático de erro local, mantendo-o dentro da tolerância desejada, sendo especialmente recomendada para sistemas de “rígidos”. Uma precisão prescrita de 10^{-6} foi estabelecida em todos os casos testados. O sistema de equações diferenciais ordinárias foi truncado, considerando-se os primeiros trinta termos da série, quantidade que se mostrou suficiente para garantir a convergência em pelo menos três dígitos. Para as simulações realizadas, foram escolhidos os valores do parâmetro γ iguais a 9.0, 6.0 e 3.0 para o caso de resfriamento do fluido e os valores -0.9, -0.6 e -0.3 para o caso de aquecimento.

As figuras 1 e 2 mostram, respectivamente, a evolução do perfil da velocidade $U(X, Y)$ ao longo da posição axial X , para os casos de aquecimento e resfriamento do fluido. Observa-se que, para o caso de aquecimento do fluido, a variação da viscosidade provoca uma deformação no perfil inicialmente parabólico, achatando-o na região de entrada do duto. Já

para o caso de resfriamento, a influência da variação da viscosidade faz alongar o perfil enquanto que na região assintótica, o mesmo recupera a condição de perfil parabólico.

As figuras 3 e 4 apresentam a evolução da velocidade axial na linha de centro do duto em relação à coordenada X para os casos de aquecimento e resfriamento do fluido, respectivamente. Estas figuras permitem observar que, quanto maior o valor absoluto do parâmetro de viscosidade, maior o desvio da velocidade axial em relação à velocidade plenamente desenvolvida ($\gamma=0$). Nota-se, também, que o comprimento de entrada aumenta proporcionalmente ao aumento do valor absoluto deste parâmetro de viscosidade.

As figuras 5 e 6 permitem analisar o comportamento do número de Nusselt local para os casos de aquecimento e resfriamento do fluido, respectivamente. Para o caso de aquecimento do fluido, a figura 5 mostra que, para uma determinada posição X, à medida que o valor absoluto do parâmetro γ decresce, o valor do número de Nusselt decresce proporcionalmente. Isto é explicado, tendo em vista que, com o aquecimento do fluido no escoamento, a viscosidade próxima à parede diminui, acelerando conseqüentemente o escoamento neste ponto quando comparado com o caso isotérmico ($\gamma = 0$). Quanto maior o valor absoluto de γ , maior a influência da viscosidade no número de Nusselt e na velocidade do escoamento. Nesta figura, também pode-se observar o comportamento assintótico do número de Nusselt, tendendo para o valor característico de 7.54 encontrado na literatura (Shah & London, 1978).

O comprimento de entrada térmica também é influenciado, de uma forma menos acentuada do que no caso do perfil de velocidade axial, pela variação da viscosidade, sendo que quanto maior o grau de variação da viscosidade medido pelo parâmetro γ , maior o comprimento de entrada térmica.

Para o caso de resfriamento do fluido, a figura 6 ilustra o comportamento do número de Nusselt local com a variação do parâmetro de viscosidade γ . Este comportamento é similar ao caso de aquecimento do fluido onde o decréscimo do número de Nusselt é proporcional à diminuição do valor absoluto do parâmetro γ e percebe-se a tendência assintótica ao valor característico de 7.54.

Da análise dos gráficos observa-se também que, enquanto, para o caso de aquecimento do fluido, o número de Nusselt decresce monotonicamente; no caso de resfriamento, o número de Nusselt decresce até um valor mínimo e depois aumenta até o valor assintótico. Esta característica é devido à influência da variação da viscosidade, influência esta sentida principalmente nas vizinhanças da parede do duto, causando a alteração da velocidade neste ponto e a conseqüente propagação deste efeito para os demais pontos até a linha de centro.

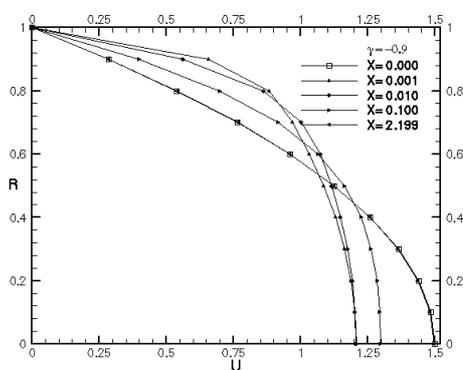


Figura 1. Evolução do perfil de velocidade axial para o caso de aquecimento do fluido

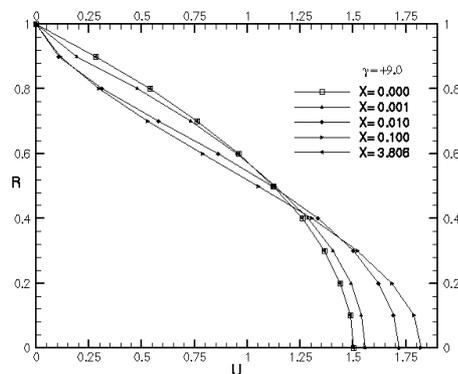


Figura 2. Evolução do perfil de velocidade axial para o caso de resfriamento do fluido

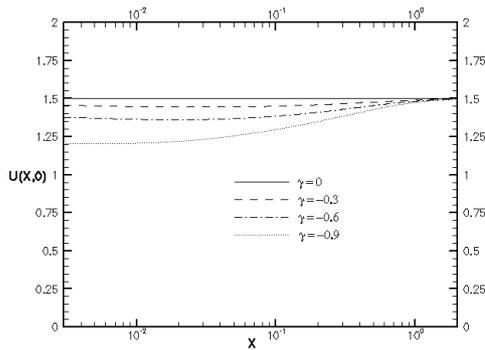


Figura 3. Velocidade axial na linha de centro para o caso de aquecimento do fluido

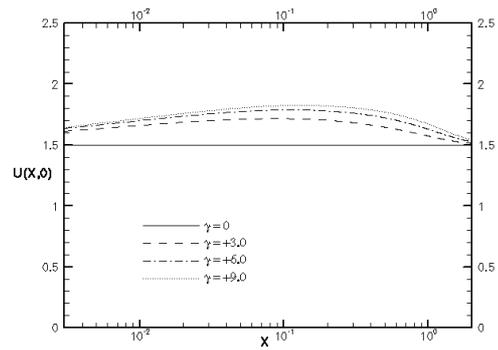


Figura 4. Velocidade axial na linha de centro para o caso de resfriamento do fluido

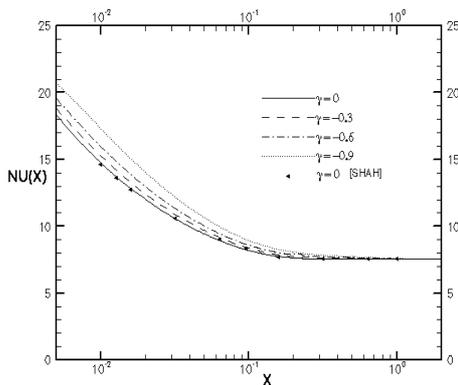


Figura 5. Variação do Número de Nusselt local para o caso de aquecimento do fluido

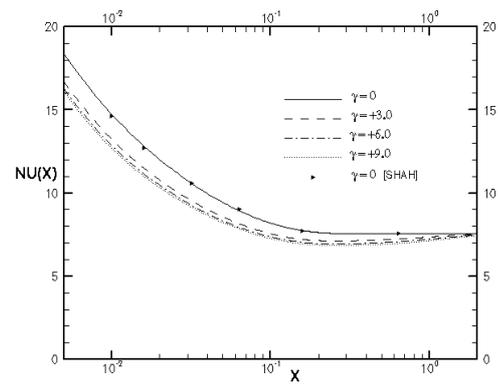


Figura 6. Variação do Número de Nusselt local para o caso de resfriamento do fluido

Concluindo, a discussão acima revela que a TTIG provou ser uma ferramenta eficiente para a solução do problema de convecção forçada interna em canais com viscosidade dependente da temperatura. Em função da grande precisão na solução do sistema de equações para as temperaturas transformadas, este procedimento analítico-numérico permite estabelecer com o refinamento desejado a entrada hidrodinâmica e térmica do problema em questão.

4. REFERÊNCIAS

- Boyce, W. E. e Di Prima, R. C., 1992, “Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems”, Ed. John Wiley, NY, USA.
- Cotta, R. M., 1993, “Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow, CRC Press, Boca Raton.
- Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M., 1994, “Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, Inc., San Diego, USA.
- Gryglaszewski, P., Nowak, Z. e Stacharskatargosz, J., 1980, “The Effects of Viscous Dissipation on Laminar Heat Transfer to Power-Law Fluids in Tubes”, *Warme-und-Stoffubertragung*. Vol. 14, pp. 81-89.
- Kakaç, S. , Shah, R. K. e Aung, W., 1987, “Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer, John Wiley & Sons, NY, USA.
- Shah, R. K., e London, A. L., 1978, “Laminar Flow Forced Convection in Ducts, Academic Press, NY, USA.
- Yang, K. T., 1962, “Laminar Forced Convection of Liquids in Tubes with Variable Viscosity” , *ASME – Journal of Heat Transfer*, Vol. 84, pp. 353 – 362.