

# COMPARAÇÃO ENTRE PREVISÕES DE ALGUNS MODELOS DE CHOQUE

## Edson Luiz Cataldo Ferreira

Universidade Federal Fluminense, Centro de Estudos Gerais, Departamento de Matemática Aplicada, 24020-140, Niterói, RJ, Brasil. E-mail: ecataldo@mec.puc-rio.br

## Rubens Sampaio

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Centro Tecnológico, Departamento de Engenharia Mecânica, 20543-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: rsampaio@mec.puc-rio.br

## Resumo

Ao estudar choque entre corpos rígidos nos deparamos com diversos modelos na literatura. Esses modelos fazem hipóteses simplificadoras que podem violar leis físicas ou mesmo não violando essas leis, os modelos podem prever dinâmicas diferentes. O objetivo desse trabalho é o de discutir as previsões de alguns desses modelos e compará-las, usando simulações e animações. Os modelos propostos por Newton, Kane-Levinson e Glocker-Pfeiffer adotam uma aproximação para o problema que consiste em formular as leis de comportamento a partir de velocidades e impulsos. O modelo proposto por Han-Gilmore usa o método sequencial; isto é, o problema é tratado como se fosse uma sucessão de choques. Os valores iniciais para uma etapa são os valores finais da etapa precedente. Frémond propõe um modelo que considera o sistema formado pelos dois corpos em colisão como deformável e usa a Mecânica dos Meios Contínuos para caracterizar as colisões. Discutiremos a aplicação desses modelos em dois problemas: colisões unidimensionais entre três moedas e colisões no plano de uma barra rígida contra uma barreira fixa.

**Palavras-chave:** Choque, Dinâmica, Simulação.

## 1. INTRODUÇÃO

Podemos dizer que a dinâmica de um corpo ou de um sistema com mais de uma partícula pode ser modelada propriamente se colisões são levadas em consideração. Nos trabalhos de Galileu e Descartes aparecem referências a choques (ou colisões), mas o primeiro modelo de colisões entre partículas parece ser devido a John Wallis e Christopher Wren em 1668. Alguns pesquisadores como Newton, Huygens, Coriolis, Darboux, Routh, Apple, Carnot e Poisson discutiram o problema. No começo do século o problema gerou algumas discussões, como podemos ver nos trabalhos de Painlevé (1905) e Klein (1910). Porém, até 1984, todos os trabalhos usavam a teoria desenvolvida por Newton ou Poisson e a dificuldade estava em incluir atrito na modelagem, que foi apontado por Painlevé no seu artigo *Sur les lois de frottement de glissement*.

Em 1984, Kane publicou um trabalho, num jornal de circulação limitada, onde ele apontou um paradoxo: a aplicação de teoria de Newton, universalmente aceita, num problema de colisões de um pêndulo duplo, conduziu à geração de energia nas colisões. O quê estava errado ?

Em 1986, Keller apresentou uma solução para o problema, mas esta solução não era fácil de generalizar. Este trabalho foi publicado num jornal de grande circulação e atraiu muito interesse. Nesses treze anos o interesse tem aumentado e há alguns livros totalmente dedicados ao tópico.

O problema a ser discutido quando tratamos da colisão entre corpos rígidos é: conhecida a dinâmica pré-colisão e as propriedades do corpo e da superfície de colisão queremos conhecer a dinâmica pós-colisão. Para isso vários modelos foram criados. Recentemente, um modelo que engloba alguns dos principais modelos da literatura e a discussão de uma proposta de sistematização da resolução de problemas envolvendo colisões foram tratados em (Cataldo, 1999).

Neste trabalho apresentaremos o problema de geração de energia (tal como observado por Kane) usando o problema de uma barra rígida em colisão com uma barreira fixa. Usaremos o coeficiente de restituição na direção normal dado por Newton e para a direção tangencial usaremos a lei de Coulomb modificada. Depois, usaremos o coeficiente de restituição de Poisson e não verificaremos mais o acréscimo de energia. Discutiremos, então, um caso de colisões múltiplas: colisões unidimensionais entre três moedas. Neste caso não consideraremos atrito e usaremos modelos diferentes para descrever o problema. Verificaremos que apesar de não violar leis físicas, cada modelo propõe uma dinâmica diferente.

## 2. EQUAÇÕES UTILIZADAS

Consideremos a posição do sistema, formado pelos corpos que irão colidir, por  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^t$ . A dinâmica do sistema é dada pelas equações de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + r_i \quad (1)$$

sendo  $Q_i$  a contribuição das forças externas generalizadas,  $r_i$  a força generalizada devido à reação no contato e  $T$  a energia cinética do sistema.

Consideremos o contato entre dois corpos, digamos  $C_1$  e  $C_2$  e  $\mathbf{R}$  a força de reação de  $C_1$  sobre  $C_2$ . Escrevemos  $\mathbf{R} = (R_N, R_T)^t$ . Temos  $n$  parâmetros de posição desconhecidos e duas reações no contato  $R_N$  e  $R_T$  também desconhecidas. Considerando  $\mathbf{r}$  o vetor cujas componentes são dadas por  $r_i$  com  $i = 1, \dots, n$ ,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{R}$  estão relacionadas por  $\mathbf{r} = [W]\mathbf{R}$ , sendo  $[W]$  uma matriz  $n \times 2$ . Integramos a Eq. 1 no intervalo  $(t - \epsilon, t + \epsilon)$ , sendo  $t$  o instante da colisão e consideramos  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ao invés da força de reação  $\mathbf{R}$  usaremos o impulso causado por essa força e dado por

$$\mathbf{I} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \mathbf{R} d\tau = \begin{pmatrix} I_N \\ I_T \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Considerando o índice  $A$  representando o momento pré-colisão e  $E$  o índice representando o momento pós-colisão e usando  $T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}[M]\dot{\mathbf{q}}^t$  chegamos à equação

$$[M](\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_A) = [W]\mathbf{I} \quad (3)$$

Assim, nosso problema é encontrar  $\dot{\mathbf{q}}_E$  e  $\mathbf{I}$  sendo dados  $[M]$ ,  $[W]$  e  $\dot{\mathbf{q}}_A$ . Para isso, usamos uma estratégia que consiste em definir um processo chamado de *Processo Virtual*.



Figura 1: Esquema do processo virtual.

Esse processo não tem relação com o tempo pois modelamos a colisão como instantânea. Mostramos um esquema do processo virtual na Fig. 1.

Observamos que temos  $n$  equações, dadas pelas equações de Lagrange, mas queremos encontrar  $n + 2$  incógnitas. Assim, precisamos, a princípio, de duas equações a mais. Essas equações serão dadas pelas leis de restituição. A união das  $n$  equações dadas com as 2 obtidas pelas leis de restituição formam o que chamamos de um *modelo de colisão*. Vários modelos de colisão têm sido criados desde a época de Newton até os dias de hoje. Cada modelo tem vantagens e desvantagens que têm sido discutidas em (Cataldo, E. & Sampaio, R., 1998).

Ao invés de usar o vetor de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$  podemos usar o vetor  $\mathbf{D}$  que representa a distância entre os pontos de contato ( $P_1$  e  $P_2$ ) dos corpos ( $C_1$  e  $C_2$ ) que irão colidir como mostra esquematicamente a Fig. 2.

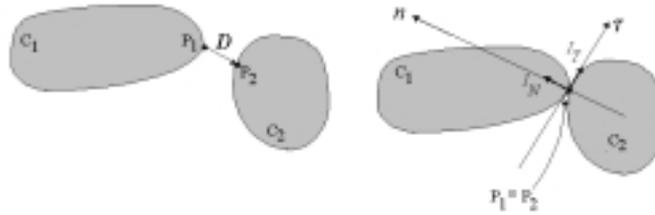


Figura 2: Colisão de dois corpos.

Podemos escrever

$$\dot{\mathbf{D}}_E - \dot{\mathbf{D}}_A = [\mathbf{W}]^T [\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{W}] \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{I} = [\mathbf{M}_L] (\dot{\mathbf{D}}_E - \dot{\mathbf{D}}_A) \quad (4)$$

sendo  $[\mathbf{M}_L]$  chamada de matriz de massa local.

### 3. FASE DE COMPRESSÃO E FASE DE EXPANSÃO

A colisão entre dois corpos é modelada como um processo instantâneo. As velocidades são descontínuas e as posições são contínuas. Para descrever alguns dos modelos de colisão pensamos, formalmente, que a mudança de velocidade do momento pré-colisão para o pós-colisão é realizado em duas fases: a fase de compressão e a fase de expansão. O processo virtual será composto por essas duas fases e está mostrado esquematicamente na Fig. 3.

Usando o índice  $A$  para representar o momento pré-colisão, o índice  $C$  para representar o fim da fase de compressão e o índice  $E$  para representar o fim da fase de expansão podemos escrever as equações

$$[\mathbf{M}] (\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) = [\mathbf{W}] \mathbf{I}_C \quad \text{e} \quad [\mathbf{M}] (\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C) = [\mathbf{W}] \mathbf{I}_E. \quad (5)$$



Figura 3: Fase de compressão e fase de expansão.

Considerando a velocidade relativa entre os pontos de contato,  $\dot{\mathbf{D}}$ , escrevemos

$$\dot{\mathbf{D}}_C - \dot{\mathbf{D}}_A = [W]^t(\dot{\mathbf{q}}_C - \dot{\mathbf{q}}_A) \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{D}}_E - \dot{\mathbf{D}}_C = [W]^t(\dot{\mathbf{q}}_E - \dot{\mathbf{q}}_C). \quad (6)$$

## 4. MODELOS DE COLISÃO

### 4.1 Modelos usados no caso da colisão de uma barra

Como dissemos, um modelo de colisão é formado pelas equações da dinâmica dadas pelas equações de Lagrange e equações a mais dadas pelas leis de restituição. Nesse trabalho queremos comparar alguns desses modelos. Começaremos discutindo dois modelos que chamamos de modelo de Kane-Levinson e modelo de Glocker-Pfeiffer (sem considerar as porções reversíveis do impulso tangencial). Aplicaremos esses dois modelos ao caso de uma barra rígida colidindo com uma superfície fixa como ilustra a Fig. 4.

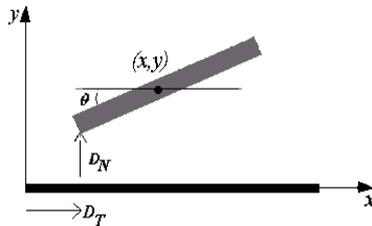


Figura 4: Barra rígida em colisão com barreira fixa.

Uma discussão mais ampla deste problema, usando outros modelos pode ser encontrada em (Cataldo & Sampaio, 1998, 1999).

O modelo de Kane-Levinson usa as equações da dinâmica considerando apenas os momentos pré e pós-colisão; isto é, não considera a fase de compressão. A lei de restituição usada na direção normal é a lei proposta por Newton definindo um coeficiente chamado de coeficiente de restituição de Newton e dado por

$$e_n = -\frac{\dot{D}_{NE}}{\dot{D}_{NA}} \quad (7)$$

relacionando a velocidade relativa normal no momento pós-colisão  $\dot{D}_{NE}$  com a velocidade relativa normal no momento pré-colisão  $\dot{D}_{NA}$ .

Na direção tangencial é usada a lei de Coulomb modificada dada por

$$\begin{cases} |I_T| < \mu I_N \Rightarrow \dot{D}_T = 0 \\ I_T = \mu I_N \Rightarrow \dot{D}_T \leq 0 \\ I_T = -\mu I_N \Rightarrow \dot{D}_T \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

$I_N$  e  $I_T$  são as componentes normal e tangencial do impulso e  $\dot{D}_T$  é a velocidade tangencial relativa.

O modelo de Glocker-Pfeiffer usa as equações da dinâmica considerando as fases de compressão e de expansão. A lei de restituição na direção normal é a proposta por Poisson definindo o coeficiente de restituição de Poisson dado por

$$e_{np} = \frac{I_{NE}}{I_{NC}} \quad (9)$$

relacionando os impulsos normais no fim da fase de expansão ( $I_{NE}$ ) e no fim da fase de compressão ( $I_{NC}$ ). Na direção tangencial é usada também a lei de Coulomb modificada em cada uma das duas fases: compressão e expansão.

## 4.2 Simulações

Para comparar os modelos apresentados faremos simulações considerando o caso da barra. Consideremos os seguintes valores dos parâmetros e as seguintes condições iniciais:  $e_n = e_{np} = 0.9$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 2$ ,  $y_0 = 1$ ,  $\dot{y}_0 = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\dot{\theta}_0 = 0$  e  $\mu = 1$ .

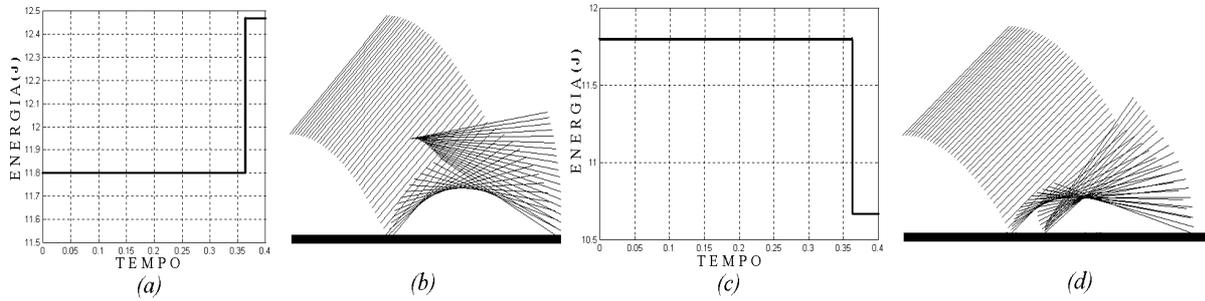


Figura 5: Barra rígida em colisão com barreira fixa. (a) e (b) Kane-Levinson; (c) e (d) Glocker-Pfeiffer.

Podemos observar que ao usarmos o modelo de Kane-Levinson obtivemos acréscimo de energia. Esse caso ilustra a situação de colisão em um único ponto e mostramos, assim, como um modelo pode falhar. No caso, contrariando uma lei física.

Porém, há casos em que consideramos modelos diferentes e mesmo não contrariando leis físicas podem apresentar previsões diferentes. Além disso, quando não há atrito, os coeficientes de restituição de Newton e de Poisson são equivalentes, quando tratamos de um único ponto de colisão (Cataldo, 1999). Quando tratamos de colisões múltiplas isso não é verdade. Discutiremos esses resultados considerando o caso da colisão entre três moedas, tratado na seção a seguir.

### 4.3 Modelos de colisão usados no caso de colisão entre três moedas

Consideremos a colisão entre três moedas como ilustra a Fig. 6.

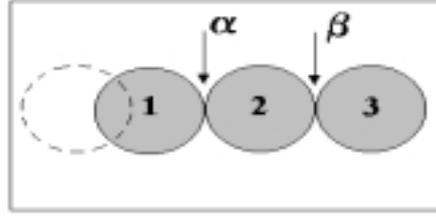


Figura 6: Colisão de moedas.

No momento da colisão dois contatos estão ativos: haverá colisão entre as moedas 1 e 2 no ponto  $\alpha$  e as moedas 2 e 3 estão em contato no ponto  $\beta$ . As velocidades normais relativas iniciais são:  $\dot{D}_{NA(\alpha)} < 0$  e  $\dot{D}_{NA(\beta)} = 0$  e o movimento é unidimensional. Não consideramos atrito e a colisão é frontal. Consideremos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  as posições das moedas 1, 2 e 3 respectivamente. As moedas 2 e 3 têm a mesma velocidade:  $\dot{x}_{2A} = \dot{x}_{3A}$ . Os coeficientes de restituição associados a esses contatos são  $e_\alpha$  e  $e_\beta$ . Consideraremos a mesma notação para os modelos de Newton, Glocker-Pfeiffer e Han-Gilmore.

As velocidades relativas nos pontos de contato têm por expressão:  $\dot{D}_{N(\alpha)} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$  e  $\dot{D}_{N(\beta)} = \dot{x}_2 - \dot{x}_3$ .

Apresentaremos as equações de cada um dos três modelos e depois mostraremos uma tabela com os resultados. Uma discussão mais ampla deste problema pode ser encontrada em (Cataldo, 1999).

Usando o modelo de Newton temos

$$\begin{cases} m(\dot{x}_{1E} - \dot{x}_{1A}) = I_\alpha \\ m(\dot{x}_{2E} - \dot{x}_{2A}) = -I_\alpha + I_\beta \\ m(\dot{x}_{3E} - \dot{x}_{3A}) = -I_\beta \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{D}_{NE(\alpha)} = -e_\alpha \dot{D}_{NA(\alpha)} \\ \dot{D}_{NE(\beta)} = -e_\beta \dot{D}_{NA(\beta)} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Usando o modelo de Glocker-Pfeiffer temos, na fase de compressão

$$\begin{cases} m(\dot{x}_{1C} - \dot{x}_{1A}) = I_{NC(\alpha)} \\ m(\dot{x}_{2C} - \dot{x}_{2A}) = -I_{NC(\alpha)} + I_{NC(\beta)} \\ m(\dot{x}_{3C} - \dot{x}_{3A}) = -I_{NC(\beta)}. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{D}_{NC(\alpha)} = 0 \\ \dot{D}_{NC(\beta)} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

E na fase de expansão temos

$$\begin{cases} m(\dot{x}_{1E} - \dot{x}_{1C}) = I_{NE(\alpha)} \\ m(\dot{x}_{2E} - \dot{x}_{2C}) = -I_{NE(\alpha)} + I_{NE(\beta)} \\ m(\dot{x}_{3E} - \dot{x}_{3C}) = -I_{NE(\beta)} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} I_{NE(\alpha)} = e_\alpha I_{NC(\alpha)} \\ I_{NE(\beta)} = e_\beta I_{NC(\beta)} \end{cases} \quad (12)$$

O modelo de Han e Gilmore trata o problema como uma sucessão de colisões.

Introduzimos coeficientes para indicar as soluções de cada etapa. O expoente 1 corresponde às velocidades da primeira colisão, o expoente 2 da segunda colisão e assim sucessivamente. Por exemplo,  $\dot{x}_{1A}^1$  é a velocidade da primeira moeda antes da primeira colisão,  $\dot{x}_{3E}^2$  é a velocidade da terceira moeda após a segunda colisão.

Para a colisão no ponto  $\alpha$  as equações do movimento são

$$\begin{cases} m(\dot{x}_{1E}^1 - \dot{x}_{1A}^1) = I_\alpha^1 \\ m(\dot{x}_{2E}^1 - \dot{x}_{2A}^1) = -I_\alpha^1 \\ m(\dot{x}_{3E}^1 - \dot{x}_{3A}^1) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

A lei de colisão no ponto  $\alpha$  usada é  $\dot{D}_{NE(\alpha)}^1 = -e_\alpha \dot{D}_{NA(\alpha)}^1$ .

As velocidades generalizadas e relativas obtidas são dadas por

$$\begin{cases} \dot{x}_{1E}^1 = \frac{1}{2}(1 - e_\alpha)\dot{x}_{1A}^1 + \frac{1}{2}(1 + e_\alpha)\dot{x}_{2A}^1 \\ \dot{x}_{2E}^1 = \frac{1}{2}(1 + e_\alpha)\dot{x}_{1A}^1 + \frac{1}{2}(1 - e_\alpha)\dot{x}_{2A}^1 \\ \dot{x}_{3E}^1 = \dot{x}_{3A}^1. \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{D}_{NE(\alpha)}^1 = -e_\alpha \dot{D}_{NA(\alpha)}^1 \\ \dot{D}_{NE(\beta)}^1 = \frac{1}{2}(e_\alpha + 1)\dot{D}_{NA(\alpha)}^1 \end{cases} \quad (14)$$

Como  $\dot{D}_{NA(\alpha)}^1 < 0 \Rightarrow \dot{D}_{NE(\alpha)}^1 > 0$ . Logo,  $\dot{D}_{NE(\beta)}^1 = \frac{1}{2}(e_\alpha + 1)\dot{D}_{NA(\alpha)}^1 < 0$ . Esse resultado é incompatível. Assim, houve colisão no ponto  $\beta$ .

As equações para a colisão em  $\beta$  são dadas por

$$\begin{cases} m(\dot{x}_{1E}^2 - \dot{x}_{1A}^2) = 0 \\ m(\dot{x}_{2E}^2 - \dot{x}_{2A}^2) = I_\beta^2 \\ m(\dot{x}_{3E}^2 - \dot{x}_{3A}^2) = -I_\beta^2 \end{cases} \quad (15)$$

com  $\dot{D}_{NE(\beta)}^2 = -e_\beta \dot{D}_{NA(\beta)}^2$ .

As velocidades generalizadas e relativas obtidas em  $\beta$  são dadas por

$$\begin{cases} \dot{x}_{1E}^2 = \dot{x}_{1A}^2 \\ \dot{x}_{2E}^2 = \frac{1}{2}(1 - e_\beta)\dot{x}_{2A}^2 + \frac{1}{2}(1 + e_\beta)\dot{x}_{3A}^2 \\ \dot{x}_{3E}^2 = \frac{1}{2}(1 + e_\beta)\dot{x}_{2A}^2 + \frac{1}{2}(1 - e_\beta)\dot{x}_{3A}^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{D}_{NE(\alpha)}^2 = \dot{D}_{NA(\alpha)}^2 + \frac{(e_\beta + 1)\dot{D}_{NA(\beta)}^2}{2} \\ \dot{D}_{NE(\beta)}^2 = -e_\beta \dot{D}_{NA(\beta)}^2 \end{cases} \quad (16)$$

Se  $\dot{D}_{NE(\alpha)}^2 < 0$  então se produz um novo contato. E assim sucessivamente.

Para o modelo de Frémond (Frémond, 1995) as equações do movimento são dadas por

$$\begin{cases} m(\dot{x}_{1E} - \dot{x}_{1A}) = I_{12} + I_{13} \\ m(\dot{x}_{2E} - \dot{x}_{2A}) = -I_{12} + I_{23} \\ m(\dot{x}_{3E} - \dot{x}_{3A}) = -I_{23} - I_{13} \end{cases} \quad (17)$$

sendo  $I_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq 3$ , o impulso causado pela moeda  $i$  sobre a moeda  $j$ . Quando  $I_{13} = 0$  chegamos nas equações obtidas classicamente com os impulsos agindo localmente nos pontos de contato. Escolheremos a lei de comportamento no caso mais simples: linear. Temos,

$$\begin{cases} I_{12} = k_{12}(\dot{x}_{2E} - \dot{x}_{1E} + \dot{x}_{2A} - \dot{x}_{1A}) + I_{12}^{reac} \quad , \quad I_{12}^{reac} \in \partial I_R^+(\dot{x}_{2E} - \dot{x}_{1E}) \\ I_{23} = k_{23}(\dot{x}_{3E} - \dot{x}_{2E} + \dot{x}_{3A} - \dot{x}_{2A}) + I_{23}^{reac} \quad , \quad I_{23}^{reac} \in \partial I_R^+(\dot{x}_{3E} - \dot{x}_{2E}) \\ I_{13} = k_{13}(\dot{x}_{3E} - \dot{x}_{1E} + \dot{x}_{3A} - \dot{x}_{1A}) \end{cases} \quad (18)$$

sendo  $\partial I_R^+$  a sub-diferencial da indicatriz de  $R$ .

Como a ação entre 1 e 3 é à distância, temos  $I_{13}^{reac} = 0$ .

#### 4.4 Comparação dos resultados

Consideremos o caso particular em que  $\dot{x}_{2A} = 0$ ,  $\dot{x}_{3A} = 0$ ,  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  e os coeficientes  $e_\alpha$ ,  $e_\beta$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{13}$  e  $k_{23}$  são iguais a 1. Mostramos na Tab. 1 os resultados obtidos.

Tabela 1: Comparação dos valores para a colisão das moedas.

Modelo	Velocidades Finais		
	$\dot{x}_{1E}$	$\dot{x}_{2E}$	$\dot{x}_{3E}$
Han-Gilmore	0	0	$\dot{x}_{1A}$
Newton e Glocker-Pfeiffer	$-\frac{1}{3}\dot{x}_{1A}$	$\frac{2}{3}\dot{x}_{1A}$	$\frac{2}{3}\dot{x}_{1A}$
Frémond	0	$0.5 \dot{x}_{1A}$	$0.5 \dot{x}_{1A}$

Podemos observar diferentes valores para as velocidades no momento pós-colisão, quando usamos diferentes modelos.

No primeiro caso (Han-Gilmore) duas moedas ficam paradas enquanto a terceira parte com a velocidade igual à velocidade da primeira moeda antes da colisão. No segundo caso (Newton e Glocker-Pfeiffer), a primeira moeda desloca-se no sentido contrário ao imediatamente antes da colisão, a segunda e a terceira moedas partem juntas com a mesma velocidade. No terceiro caso (Frémond) a primeira moeda fica parada e a segunda e a terceira moedas partem com a mesma velocidade.

#### 5. CONCLUSÕES

Ao considerarmos o choque entre corpos rígidos podemos verificar que alguns dos modelos usados podem falhar. Discutimos esse caso ao tratarmos do choque de uma barra rígida contra uma barreira fixa usando os modelos de Kane-Levinson e de Glocker-Pfeiffer. Observamos que mesmo quando não contrariam leis físicas os modelos podem prever dinâmicas diferentes. Constatamos este fato usando alguns modelos no caso da colisão unidimensional entre três moedas.

#### 6. REFERÊNCIAS

Cataldo, E. , Sampaio, R. , 1998, "Comparação entre modelos de colisão de corpos", Anais do VIII Congresso de Ingenieria Mecanica, Chile, pp. 345-348.

Cataldo, E., 1999, "Modelagem e Simulação de Colisões Planas entre Corpos Rígidos", Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 385p.

Cataldo, E. , Sampaio, R. , 1999, "Comparing some models of collisions between rigid bodies", Proceedings PACAM VI/DINAME, Rio de Janeiro, RJ, Vol. 8, pp. 1301-1304

Cataldo, E. , Sampaio, R. , 1999, "Uma análise crítica de modelos de colisão entre corpos", Anais do COBEM99 em CD-Rom, S23, Águas de Lindóia, SP.

Frémond, M. , 1995, "Collisions of rigid bodies", Contact Mechanics, Edited by M. Raous et al. , Plenum Press, New York, pp. 397-404.

Han, I. , Gilmore, B. J. , 1993, "Multi-body impact motion with friction - analysis, simulation and experimental validation", Transactions of the ASME, Vol. 115, pp. 412-422.

Kane, T. R. , 1984, "A dynamic puzzle ", Stanford Mechanics Alumni Club Newsletter, pp. 6,

Keller, J. B. , 1986, "Impact with friction ", ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, pp. 1-4.

Klein, F. , 1910, "Zu Painlevés kritik des Coulombschenreibungsgesetze ", Zeitsch Math. Phys., Vol. 58, pp. 186-191.

Painlevé, P. , 1905, "Sur les lois de frottement de glissement ", C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 121, pp. 112-115, Vol. 141, pp. 401-405, Vol. 141, pp. 546-552, 1905.

Pfeiffer, F. ; Glocker, C. , 1996, "Multibody dynamics with unilateral contacts", John Wiley & Sons, New York.