

UM ESTUDO SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS (PARTE II)

Adriana Elisa Ladeira Pereira
Sebastião Cícero Pinheiro Gomes
Álvaro Luiz De Bortoli

Fundação Universidade Federal do Rio Grande, Dep. de Matemática, CEP: 96201-900, Rio Grande, RS, Brasil, E-mail: mmaaelp@super.furg.br, dmtscpg@super.furg.br
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PPGMAp, CEP: 91509-900, Porto Alegre, RS, Brasil, E-mail: dbortoli@mat.ufrgs.br

Resumo

Este trabalho é uma continuação da Parte I, constituindo-se num estudo sobre técnicas de modelagem de estruturas do tipo manipulador mecânico com elo flexível. A motivação para a sua realização é o conhecimento de um modelo dinâmico preditivo e realista que pode ser de grande auxílio ao projeto de controladores com condições reais de implementação prática. Este artigo contém a segunda parte do estudo sobre diversas técnicas de modelagem dinâmica de uma estrutura do tipo manipulador flexível. Duas técnicas de modelagem dinâmica utilizando o formalismo dos Modos Assumidos são desenvolvidas e analisadas, tendo-se utilizado funções de formas polinomiais e oriundas dos modos exatos da estrutura. Comparações de respostas em frequência entre as funções de transferência analíticas (Parte I) e as funções de transferência obtidas com as duas técnicas citadas são realizadas, extraíndo-se ao final conclusões sobre estes formalismos de modelagem.

Palavras Chave: Robótica, flexível, modelagem, dinâmica, controle.

1. INTRODUÇÃO

No presente artigo são desenvolvidas e analisadas mais duas técnicas de modelagem dinâmica para o manipulador flexível considerado na Parte I. Trata-se do Método dos Modos Assumidos com duas diferentes funções de forma: analíticas (modos exatos do problema) e polinomiais, confundindo-se neste último caso com o Método dos Elementos Finitos. No Método dos Modos Assumidos com funções de forma exatas, inicialmente toda a teoria é desenvolvida detalhadamente até a determinação das formas próprias para cada modo de vibração. O conhecimento das frequências naturais e das formas de cada modo possibilita a determinação das equações da dinâmica do sistema. As funções de transferência, nos casos colocado e não colocado, são obtidas e suas respostas frequenciais são, então, comparadas com as respostas obtidas das funções de transferência analíticas (Parte I). Ao utilizar-se funções de forma polinomiais faz-se, inicialmente, o desenvolvimento teórico. Posteriormente são realizadas comparações também com o estudo analítico apresentado anteriormente.

2. O MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS COM FUNÇÕES DE FORMAS EXATAS

Considere-se as equações diferenciais obtidas após a transformação de variáveis sugerida por Brakwel (Schmitz, 1985).

$$I_r \ddot{\theta}(t) + \rho \int_0^l x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx + m_c l \ddot{y}(l, t) = T_m \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (2)$$

com as respectivas condições de contorno:

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Big|_{x=0} + T_m - I_r \ddot{\theta} = 0$$

$$y(x, t) \Big|_{x=0} = y(0, t) = w(0, t) + 0\theta(t) = 0 \quad (3)$$

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \Big|_{x=l} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t) \Big|_{x=l} = m_c \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \Big|_{x=l}.$$

Uma forma de resolver as equações (1) e (2) é a partir da expansão da função $y(x, t)$ como uma série finita na forma (Meirovitch, 1967):

$$y(x, t) = \sum_{i=0}^n \phi_i(x) q_i(t), \quad (4)$$

sendo

$$\theta(t) = \sum_{i=0}^n \theta_i q_i(t); \quad \theta_i = \frac{d\phi_i}{dx} \Big|_{x=0} \quad (5)$$

Aqui $\phi_i(x)$ são as funções de forma exatas, $q_i(t)$ são as coordenadas generalizadas dependentes do tempo, $\theta_i(t)$ são as amplitudes modais do movimento rotacional da estrutura e n é um número finito igual ao número dos modos de vibração que se deseja incluir no modelo.

As funções $\phi_i(x)$ utilizadas nesta parte do trabalho devem satisfazer às condições de contorno e à equação diferencial associada ao problema. Com a equação (4), a equação (2) pode ser escrita na forma:

$$\frac{l^4}{\phi_i(x)} \frac{d^4 \phi_i}{dx^4} = - \frac{\rho l^4}{EI} \frac{1}{q_i(t)} \frac{d^2 q_i}{dt^2} = \lambda_i^4. \quad (6)$$

Dessa forma, separa-se o problema original em dois problemas desacoplados, um somente temporal e o outro espacial.

O Problema temporal pode ser escrito como:

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} + w_i^2 q_i(t) = 0, \quad (7)$$

onde $w_i^2 = \frac{EI}{\rho l^4} \lambda_i^4$, sendo que este problema admite solução na forma:

$$q_i(t) = C e^{j w_i t}, \quad (8)$$

sendo C uma constante.

O problema espacial pode ser escrito como:

$$\frac{d^4 \phi_i}{dx^4} - \beta_i^4 \phi_i(x) = 0, \quad (9)$$

onde $\beta_i = \frac{\lambda_i}{l}$, sendo que este problema admite solução na forma:

$$\phi_i(x) = C_{1i} \text{sen}(\beta_i x) + C_{2i} \text{cos}(\beta_i x) + C_{3i} \text{senh}(\beta_i x) + C_{4i} \text{cosh}(\beta_i x), \quad (10)$$

sendo as constantes C_{1i} , C_{2i} , C_{3i} e C_{4i} determinadas pelas condições de contorno (3), expressas agora na variável $\phi_i(x)$.

Das condições de contorno, obtém-se:

$$\begin{cases} EI\beta_i(C_{4i} - C_{2i}) + I_r w_i^2 (C_{1i} + C_{3i}) = 0 \\ C_{2i} + C_{4i} = 0 \\ -C_{1i} \sin(\beta_i l) - C_{2i} \cos(\beta_i l) + C_{3i} \sinh(\beta_i l) + C_{4i} \cosh(\beta_i l) = 0 \\ C_{1i} (-EI\beta_i^3 \cos(\beta_i l) + m_c w_i^2 \sin(\beta_i l)) + C_{2i} (EI\beta_i^3 \sin(\beta_i l) + m_c w_i^2 \cos(\beta_i l)) + \\ + C_{3i} (EI\beta_i^3 \cosh(\beta_i l) + m_c w_i^2 \sinh(\beta_i l)) + C_{4i} (EI\beta_i^3 \sinh(\beta_i l) + m_c w_i^2 \cosh(\beta_i l)) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Resolvendo-se este sistema, encontram-se as constantes C_{1i} , C_{2i} e C_{3i} em função da constante C_{4i} , resultando na equação:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{2EI\beta_i \sin(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l))}{I_r w_i^2 (\sin(\beta_i l) + \sinh(\beta_i l))} - \frac{2EI\beta_i}{I_r w_i^2} \right) (-EI\beta_i^3 \cos(\beta_i l) + m_c w_i^2 \sin(\beta_i l)) + \right. \\ & \left. - \left(\frac{2EI\beta_i \sin(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l))}{I_r w_i^2 (\sin(\beta_i l) + \sinh(\beta_i l))} \right) (EI\beta_i^3 \cosh(\beta_i l) + m_c w_i^2 \sinh(\beta_i l)) + \right. \\ & \left. + EI\beta_i^3 (\sinh(\beta_i l) - \sin(\beta_i l)) + m_c w_i^2 (\cosh(\beta_i l) - \cos(\beta_i l)) \right] C_{4i} = \Phi(\beta_i) C_{4i} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Portanto, para que C_{4i} seja diferente de zero (solução não trivial) é necessário que os termos entre colchetes sejam nulos, ou seja:

$$\Phi(\beta_i) = 0, \quad (13)$$

sendo esta equação usada para determinar os valores dos β_i e, a partir destes valores, determinam-se os λ_i , pois $\lambda_i = \beta_i l$. As primeiras três raízes não nulas desta equação foram encontradas utilizando-se o Método Numérico da Bissecção, com oito dígitos significativos de precisão:

$$\beta_1 = 1.522638; \beta_2 = 2.615733; \beta_3 = 4.432305,$$

o que implica em

$$\lambda_1 = 2.45144718; \lambda_2 = 4.21133013; \lambda_3 = 7.13601105.$$

As demais constantes presentes na equação (10) são relativas aos parâmetros estruturais, tendo-se utilizado os mesmos valores numéricos da Parte I. Como

$$w_i = \pm \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}} \lambda_i^2, \quad (14)$$

as frequências dos três primeiros modos de vibração são:

$$w_1 = 17.50942188 \text{ rd/s}; w_2 = 51.67329338 \text{ rd/s}; w_3 = 148.36715 \text{ rd/s}.$$

Pode-se escrever então:

$$\phi_i(x) = C_{4i} [M \sin(\beta_i x) - \cos(\beta_i x) + N \sinh(\beta_i x) + \cosh(\beta_i x)] \quad (15)$$

sendo:

$$\begin{aligned} M &= \frac{(2EI\beta_i \sin(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l)))}{I_r w_i^2 (\sin(\beta_i l) + \sinh(\beta_i l))} - \frac{2EI\beta_i}{I_r w_i^2} \\ N &= -\frac{(2EI\beta_i \sin(\beta_i l) + I_r w_i^2 (\cos(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l)))}{I_r w_i^2 (\sin(\beta_i l) + \sinh(\beta_i l))}. \end{aligned}$$

Porém, $\phi_i(x)$ deve satisfazer à seguinte condição de ortogonalidade (Pereira, 1999):

$$\int_0^l [\phi_i(x)]^2 \rho dx + I_r \left[\frac{d\phi_i}{dx}(0) \right]^2 + m_c [\phi_i(l)]^2 = I_T, \quad (16)$$

onde :

$$I_T = I_r + I_B + m_c l^2 \text{ e } I_B = \frac{\rho l^3}{3},$$

sendo I_T correspondente à inércia total de corpo rígido da estrutura. Portanto, aplicando-se a condição (16), chega-se à equação:

$$\begin{aligned}
C_{4i}^2 \left\{ \rho \left[M^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{sen}(2\beta_i l) \right) - \frac{M}{2\beta_i} (1 - \cos(2\beta_i l)) + \frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{sen}(2\beta_i l) + \right. \right. \\
+ \frac{MN}{\beta_i} (\cosh(\beta_i l) \operatorname{sen}(\beta_i l) - \operatorname{senh}(\beta_i l) \cos(\beta_i l)) + \frac{M}{\beta_i} (1 + \operatorname{senh}(\beta_i l) \operatorname{sen}(\beta_i l) - \cosh(\beta_i l) \cos(\beta_i l)) + \\
- \frac{N}{\beta_i} (\operatorname{senh}(\beta_i l) \operatorname{sen}(\beta_i l) + \cos(\beta_i l) \cosh(\beta_i l) - 1) - \frac{1}{\beta_i} (\operatorname{sen}(\beta_i l) \cosh(\beta_i l) + \operatorname{senh}(\beta_i l) \cos(\beta_i l)) + \\
+ N^2 \left(-\frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{senh}(2\beta_i l) \right) + \frac{N}{2\beta_i} (\cosh(2\beta_i l) - 1) + \frac{l}{2} + \frac{1}{4\beta_i} \operatorname{senh}(2\beta_i l) \left. \right] + I_T \beta_i^2 (M + N)^2 + \\
+ m_c (M \operatorname{sen}(\beta_i l) - \cos(\beta_i l) + N \operatorname{senh}(\beta_i l) + \cosh(\beta_i l))^2 \left. \right\} = C_{4i}^2 K_i(\beta_i) = I_T
\end{aligned} \quad (17)$$

Portanto, a partir da equação acima, pode-se determinar analiticamente o valor da constante C_{4i} na forma:

$$C_{4i}^2 K_i(\beta_i) = I_T \Rightarrow C_{4i} = \pm \sqrt{\frac{I_T}{K_i(\beta_i)}}, \quad (18)$$

ou seja, para cada β_i tem-se um K_i e uma conseqüente constante C_{4i} .

A partir destas constantes e dos valores dos $\beta_i, i = 1, 2, 3$, são determinadas as funções de forma, cujos gráficos são mostrados na Figura 1.

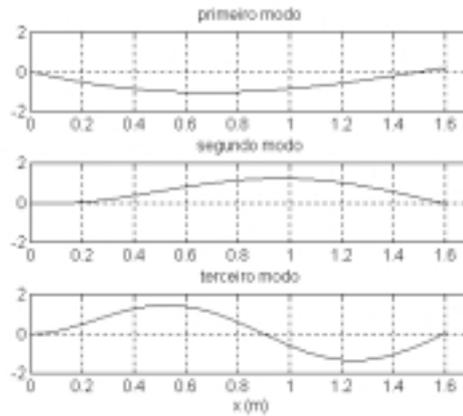


Figura 1 Gráficos das funções de forma

2.1 Obtenção do modelo dinâmico

O Lagrangeano do sistema pode ser escrito sob a forma (Pereira, 1999):

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 I_T \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 I_T w_i^2 q_i^2 + T_m \left(\sum_{i=0}^3 \frac{d\phi_i(0)}{dx} q_i \right), \quad (19)$$

aplicando-se então as equações de Euler-Lagrange, chega-se ao sistema:

$$\dot{\vec{X}} = A\vec{X} + BT_m, \quad (20)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w_1^2 & 0 & 0 & 0 & -2\xi_1 w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w_2^2 & 0 & 0 & 0 & -2\xi_2 w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w_3^2 & 0 & 0 & 0 & -2\xi_3 w_3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{d\phi_1}{dx}(0) & \frac{d\phi_2}{dx}(0) & \frac{d\phi_3}{dx}(0) \end{bmatrix}^T,$$

$$X = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dot{q}_0 \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]^T$$

e $\xi_i, i=1,2,3$, correspondem às razões de amortecimento, as quais serão diferentes de zero caso se considere o amortecimento natural da estrutura (estes valores podem ser identificados a partir de experimentos em malha aberta).

A matriz de observação, para o caso colocado, possui a seguinte forma (observa-se a velocidade do rotor):

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{d\phi_1}{dx}(0) & \frac{d\phi_2}{dx}(0) & \frac{d\phi_3}{dx}(0) \end{bmatrix},$$

Para o caso não colocado, observa-se a posição $y(l,t)$ da carga terminal e portanto, a matriz de observação será:

$$C_{nc} = [l \quad \phi_1(l) \quad \phi_2(l) \quad \phi_3(l) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

A Figura 2 contém as respostas em frequência das funções de transferência analítica (Parte I) e por Modos Assumidos com Funções de Forma Exatas, para o caso colocado. A fim de garantir uma comparação mais efetiva com o resultado analítico, o amortecimento estrutural foi negligenciado, assumindo-se as razões de amortecimento ($\xi_i, i=1,2,3$) nulas. Analisando-se esta figura, observa-se a perfeita coincidência com o resultado analítico, ou seja, os três primeiros zeros e pólos são idênticos nos dois resultados. Deve-se ressaltar que se utilizou, como funções de forma, os modos exatos do problema e apenas neste caso, o método dos modos assumidos se confunde com a solução exata apresentada na Parte I.

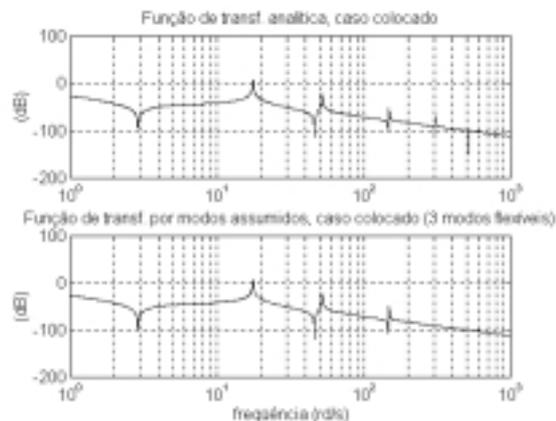


Figura 2 Funções de Transferência Analítica e por Modos Assumidos (caso colocado).

3. O MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS (FUNÇÕES DE FORMA POLINOMIAIS)

Neste caso, as funções de forma são polinômios, confundindo-se assim com o método dos elementos finitos. No caso clássico, o elemento geralmente é de terceira ordem. Esta técnica é inconveniente por necessitar de um número grande de elementos, a fim de minimizar o efeito de uma modelagem incorreta das deformações correspondentes ao primeiro elemento finito (conectado ao rotor) e ao último (conectado à carga), ampliando assim a complexidade do modelo (Pereira, 1999).

3.1 Utilização de uma aproximação polinomial do quinto grau

Para superar as dificuldades do método clássico citado anteriormente, Chrétien (Chrétien, 1990) propôs a utilização de um único elemento, mas com uma deformação aproximada por um polinômio do quinto grau. Considere-se uma estrutura elementar, conforme mostrada na Figura 3. Este elemento possui o comprimento total da estrutura flexível, pois se considera um único elemento finito. Dois parâmetros cinemáticos são introduzidos:

$$q_3(t) = \frac{M_{fA}}{EI}; q_6(t) = \frac{M_{fB}}{EI},$$

onde M_{fA} e M_{fB} são os momentos fletores nas extremidades da estrutura elementar.

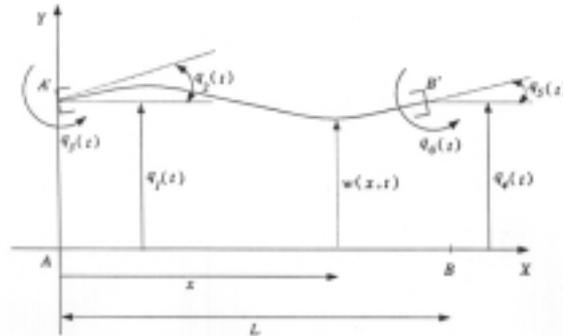


Figura 3 Estrutura elementar com a representação de seis parâmetros cinemáticos.

A expressão para a deformação da estrutura possui a forma:

$$w(x,t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 + a_4(t)x^4 + a_5(t)x^5, \quad (21)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$a) w(0,t) = q_1(t); b) \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = q_2(t);$$

$$c) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = q_3(t); d) w(l,t) = q_4(t);$$

$$e) \frac{\partial w}{\partial x}(l,t) = q_5(t); f) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = q_6(t).$$

Aplicando-se as condições de contorno, obtém-se a deformação na forma:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^6 \phi_i(x)q_i(t), \quad (22)$$

onde

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{10x^3}{l^3} + \frac{15x^4}{l^4} - \frac{6x^5}{l^5}; \phi_2(x) = x - \frac{6x^3}{l^2} + \frac{8x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4}; \phi_3(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{2l} + \frac{3x^4}{2l^2} - \frac{x^5}{2l^3};$$

$$\phi_4(x) = \frac{10x^3}{l^3} - \frac{15x^4}{l^4} + \frac{6x^5}{l^5}; \phi_5(x) = -\frac{4x^3}{l^2} + \frac{7x^4}{l^3} - \frac{3x^5}{l^4}; \phi_6(x) = \frac{x^3}{2l} - \frac{x^4}{l^2} + \frac{x^5}{2l^3}.$$

As expressões para calcular as energias cinética e potencial são as mesmas do caso analítico (Parte I), mas considerando que $\theta = q_2$. A aplicação das equações de Euler-Lagrange possibilita a obtenção do modelo dinâmico na forma:

$$[m][\dot{q}] + [k][q] = [S], \quad (23)$$

onde os elementos da matriz $[m]$ são dados por (Pereira, 1999):

$$m_{ij} = \int_0^l \rho \phi_i(x) \phi_j(x) dx + m_c \phi_i(l) \phi_j(l), (i, j) \neq 2;$$

$$m_{i2} = m_{2i} = \int_0^l \rho [\phi_2(x) + x] \phi_i(x) dx + m_c [\phi_2(l) + l] \phi_i(l), i \neq 2;$$

$$m_{22} = \int_0^l \rho \{[\phi_2(x) + 2x] \phi_2(x) + x^2\} dx + m_c \{[\phi_2(l) + 2l] \phi_2(l) + l^2\} + I_T.$$

os elementos da matriz $[k]$ são:

$$k_{ij} = \int_0^l EI \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} dx, i = 1, \dots, 6 \quad j = 1, \dots, 6.$$

e $[S]$ é o vetor com os esforços externos.

Na Figura 4 mostra-se os três primeiros modos de vibração no gráfico da função de transferência do Método dos Modos Assumidos com funções de forma polinomiais. Verifica-se ainda que os zeros são muito próximos dos três primeiros zeros encontrados na função de transferência analítica. Percebe-se também que os dois primeiros pólos encontram-se deslocados para a direita com relação aos dois primeiros pólos analíticos e que o terceiro pólo coincide aproximadamente com o terceiro pólo analítico.

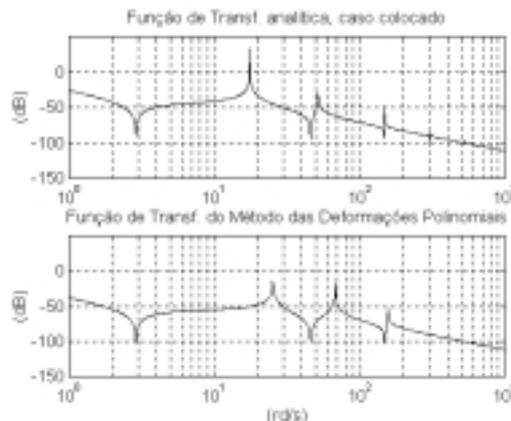


Figura 4 Funções de Transferência Analítica e do Método dos Modos Assumidos com Funções de Forma Polinomiais (caso colocado).

4. CONCLUSÕES

Sobre o Método dos Modos Assumidos (modos exatos)

- Trata-se da técnica que apresentou o melhor desempenho pois, conforme já esperado, não há erros com relação ao resultado exato (funções de transferência analíticas);
- Encontrar as funções de forma, neste caso dos modos exatos, não é um processo exatamente simples, principalmente porque o mesmo não depende somente das condições geométricas de contorno e há a necessidade também da utilização de uma condição de ortogonalidade;
- Ao contrário do formalismo discreto, este método deve apresentar grande complexidade na determinação do modelo de estruturas com vários elos flexíveis, principalmente em razão de dificuldades na obtenção das funções de forma, dificuldades estas oriundas da complexidade envolvida no trabalho com as condições de contorno.

Sobre o Método dos Modos Assumidos (funções de forma polinomiais)

- Esta técnica apresenta um bom desempenho quando um grande número de elementos clássicos de terceira ordem é considerado. Porém, este elevado número de elementos amplia em muito a complexidade do modelo;
- Testou-se, então, qual seria o desempenho de um modelo obtido a partir de um único elemento de quinta ordem. Os resultados mostraram erros muito pequenos nos zeros, mas erros significativos nos pólos;
- Algum erro já era esperado uma vez que as funções de forma (analiticamente constituídas de funções trigonométricas do tipo seno, seno hiperbólico, etc.) são aproximadas por funções polinomiais.

5. REFERÊNCIAS

- Chrétien, J. P. 1990 “Modélisation des Chaînes Polyarticulés Flexibles: Synthèse Bibliographique”, Rapport D. R. E. T./ D. E. R. ^a n-1/7735, Toulouse, França.
- Meirovitch, L., 1967 “Analytical Methods in Vibrations”, The Macmillan Company, New York.
- Pereira, A. E. L., 1999, “Um Estudo Sobre Modelagem Matemática de Estruturas Flexíveis”, Dissertação de Mestrado, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil.
- Schimtz, E., 1985, “Experiments on the End-Point Control of a very Flexible One-Link Manipulator”, PhD. Thesis, Satnford, california, Unite States.