

## O ELEMENTO FINITO QUADRILATERAL QUADRÁTICO DA FAMÍLIA LAGRANGEANA COM REFINAMENTO HIERÁRQUICO

### **Amarildo Tabone Paschoalini**

UNESP - Ilha Solteira - Departamento de Engenharia Mecânica  
Av. Brasil Centro, 56 - 15385-000 - Ilha Solteira, SP, Brasil

### **Loir Afonso Moreira**

Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Projeto Mecânico  
Cx. P. 6122 - 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

### **Fernando Iguti**

Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Mecânica Computacional  
Cx. P. 6122 - 13083-970 - Campinas, SP, Brasil

**Resumo.** *Este trabalho apresenta uma formulação do tipo hierárquica, baseada no conceito de aproximação  $p$ . O primeiro nível de aproximação da solução é obtido através do elemento isoparamétrico quadrilateral quadrático de 9 nós da família Lagrangeana, formulado a partir da teoria de Reissner-Mindlin, com integração numérica consistente. Para outros níveis de aproximação são realizados sucessivos refinamentos hierárquicos com o propósito de retirar a característica de rigidez excessiva do elemento isoparamétrico na análise de placas e cascas finas. São apresentados exemplos numéricos para mostrar a precisão, eficiência e vantagens da presente formulação, e os resultados obtidos são comparados com os disponíveis na literatura.*

**Palavras-chave:** *Elementos finitos, Versão  $p$ , Integração numérica, Casca.*

## 1. INTRODUÇÃO

Embora a análise de estruturas compostas por placas e cascas pelo Método dos Elementos Finitos já se estenda por mais de três décadas, o estabelecimento de um modelo que seja confiável, eficiente e aplicável a qualquer situação (placas e cascas finas ou placas e cascas moderadamente grossas) ainda continua a ser objeto de estudo de muitos autores.

Bathe & Dvorkin (1985 e 1986) resumiram os requisitos que devem ser encontrados no desenvolvimento de um elemento finito confiável e eficiente para análise de casca:

1. o elemento deve satisfazer os requisitos usuais de invariância e convergência (Zienkiewics, 1977);
2. o elemento deve ser formulado sem o uso de uma teoria específica, de maneira que possa ser aplicável em qualquer situação de placa ou casca;
3. o elemento deve ser simples, barato e utilizar, considerando a análise de cascas, cinco ou seis graus de liberdade por nó;
4. o elemento deve ser "numericamente seguro", isto é, não deve conter qualquer modo próprio nulo, e deve estar livre do efeito de bloqueio;

5. o elemento não deve ser baseado em fatores de ajuste numérico;
6. o elemento deve ser relativamente insensível às distorções geométricas;
7. o elemento deve ter a capacidade de proporcionar soluções precisas e eficientes.

A formulação para análise de casca baseada na degeneração de um elemento sólido tridimensional através da redução de sua dimensão na direção da espessura tem sido escolhida por um grande número de pesquisadores nos últimos anos com o objetivo de satisfazer os requisitos acima e, baseado nessa formulação, o elemento de nove nós da família Lagrangeana (Fig.1) tem sido usado como base para o desenvolvimento de muitos elementos finitos para análise de casca. Em parte, isto se deve às seguintes observações: na análise de tensões no plano o elemento isoparamétrico de nove nós é menos sensível a distorções geométricas que o elemento de oito nós (Cook, 1981 e Verheghe & Powell, 1986) e, para o caso geral de flexão de placas o elemento de nove nós tem um ótimo desempenho se comparado a outros elementos quadrilaterais lineares, quadráticos e cúbicos (Pugh *et al.*, 1978). Além disso, os elementos de nove nós para análise de cascas são geralmente considerados como vantajosos em casos onde existem grandes variações de tensões, onde as deformações por flexão dominam a solução, e onde a geometria é curva (Park & Stanley, 1986).

Entretanto, é bem conhecido que os resultados obtidos através do elemento de nove nós para análise de cascas apresentam diversas deficiências (Oñate, 1992). A integração exata do elemento quadrilateral quadrático de nove nós exige 3x3 pontos de integração na quadratura de Gauss-Legendre para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à flexão e 3x3 pontos de integração para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à cortante (*integração numérica consistente*). Os resultados obtidos são excelentes para situações de placas e cascas moderadamente grossas, contudo, com a redução da espessura o elemento torna-se excessivamente rígido e os resultados não tendem àqueles da teoria clássica de Kirchhoff para placas e cascas finas. A *integração numérica reduzida* (2x2 pontos de integração para a matriz de rigidez que contém os termos relativos à cortante) elimina em muitos casos o efeito de bloqueio na análise de placas e cascas finas, mas pode gerar elementos com modos próprios facilmente propagáveis em toda malha para várias condições de contorno, que distorcem a solução.

Este trabalho apresenta uma formulação do tipo hierárquica, baseada no conceito de aproximação  $p$ . O primeiro nível de aproximação da solução é obtido através do elemento isoparamétrico quadrilateral quadrático de 9 nós da família Lagrangeana, formulado a partir da teoria de Reissner-Mindlin, com integração numérica consistente. Para outros níveis de aproximação são realizados sucessivos refinamentos hierárquicos (3º, 4º e 5º graus) com o propósito de retirar a característica de rigidez excessiva do elemento isoparamétrico na análise de placas e cascas finas.

No processo de refinamento  $h$  a malha de elementos é refinada através da diminuição sucessiva do tamanho dos elementos. Neste processo o número e o tipo de funções de interpolação sobre cada elemento permanecem fixos. A utilização deste tipo de refinamento tende a aumentar o custo da análise (novos nós e elementos têm de ser gerados) e produzir erros associados à subdivisão excessiva da malha de discretização.

Ao contrário, no processo de refinamento  $p$  hierárquico o número e a distribuição de nós e elementos sobre a malha discretizada permanecem fixos, no entanto, o número e o grau das funções de interpolação são aumentados progressivamente. As matrizes de rigidez produzidas nos estágios anteriores àquele da aproximação pretendida reocorrem e não precisam ser recalculadas. A qualidade de aproximação da solução e o custo computacional são vantagens que a versão  $p$  hierárquica de refinamento oferece em relação à versão  $h$ .

## 2. FORMULAÇÃO

De acordo com Zienkiewicz *et al.* (1971), o campo de deslocamento do elemento de casca é interpolado a partir das funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$  quadrilaterais quadráticas, e é dado por:

$$\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i \quad (1)$$

onde o deslocamento  $\bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta)$  é um vetor coluna de componentes  $u, v$  e  $w$  nas direções X, Y e Z, respectivamente, de um sistema de referência global associado ao elemento e, da mesma maneira  $u_i, v_i$  e  $w_i$ , as componentes do deslocamento  $\bar{\delta}_i$ . Neste trabalho o campo de deslocamento do elemento de casca será interpolado a partir das funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$  quadrilaterais quadráticas de nove nós da família Lagrangeana, portanto  $n=9$ .

O refinamento da expansão quadrática especificada pela Eq.(1) pode ser conseguido adicionando-se a ela funções de forma hierárquicas  $M_{kj}(\xi, \eta)$  e  $M_k(\xi, \eta)$  de ordem superior a dois (Babuska *et al.*, 1981). As funções  $M_{kj}(\xi, \eta)$  são polinômios de grau  $k$  associados a cada um dos lados  $j$  do elemento, com  $k$  variando de 3 a 5 e  $j$  variando de 1 a 4. As funções  $M_k(\xi, \eta)$  são polinômios de grau  $k$ , do tipo bolha, associados ao elemento e com  $k$  variando de 4 a 5. Desta forma o deslocamento  $\bar{\Delta}$  dado pela Eq.(1) para o caso do elemento isoparamétrico, torna-se:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(\xi, \eta, \zeta) = & \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{\delta}_i + \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{1i} \cdot \alpha_i - \zeta \cdot \sum_{i=1}^9 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{t_i}{2} \bar{v}_{2i} \cdot \beta_i \\ & + \sum_{k=3}^5 \sum_{j=1}^4 M_{kj}(\xi, \eta) \cdot \bar{\delta}_{kj} + \sum_{k=4}^5 M_k(\xi, \eta) \cdot \bar{\delta}_k \end{aligned} \quad (2)$$

para o caso de elemento paramétrico do tipo hierárquico. Nesta expressão  $\bar{\delta}_{kj}$ , de componentes  $a_{kj}, b_{kj}$  e  $c_{kj}$  segundo os eixos X, Y e Z do sistema de referência global, é o vetor constituído dos parâmetros hierárquicos associados aos lados do elemento e  $\bar{\delta}_k$ , de componentes  $a_k, b_k$  e  $c_k$  segundo os eixos X, Y e Z do sistema de referência global, é o vetor constituído dos parâmetros hierárquicos associados ao elemento. As funções  $M_{kj}(\xi, \eta)$  e  $M_k(\xi, \eta)$  quando inseridas na Eq.(1) não modificam o nível de aproximação do elemento, mas, no entanto, as incógnitas  $\bar{\delta}_{kj}$  e  $\bar{\delta}_k$  deixam de ter o significado físico de variável nodal. Na realidade,  $\bar{\delta}_{kj}$  e  $\bar{\delta}_k$  são parâmetros dependentes das incógnitas nodais  $\bar{\delta}$ ,  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ .

As funções de forma hierárquicas de terceiro grau devem ser tais que transformam a expansão quadrática em um polinômio completo de terceiro grau, as funções de quarto grau devem ser tais que transformam a expansão cúbica em um polinômio completo de quarto grau e as funções de quinto grau devem ser tais que transformam a expansão de quarto grau em um polinômio completo de quinto grau. As funções de forma hierárquicas utilizadas foram definidas em termos das integrais dos polinômios de Legendre (Zienkiewicz *et al.*, 1986) e consistem de quatro funções de forma associadas aos lados do elemento para os refinamentos de 3º, 4º e 5º graus e mais duas funções de forma, do tipo bolha, associadas ao elemento para o refinamento de 5º grau.

De uma maneira compacta, a Eq.(2) pode, ainda, ser dada por:

$$\{u\} = [N] \cdot \{a\} \quad (3)$$

onde  $\{u\}$  é uma matriz coluna (3×1) constituída dos deslocamentos  $u(\xi, \eta, \zeta), v(\xi, \eta, \zeta)$  e  $w(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $[N]$  é uma matriz (3×87) constituída das funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$ ,  $M_{kj}(\xi, \eta)$  e  $M_k(\xi, \eta)$ , e  $\{a\}$  é uma matriz (87×1) constituída dos deslocamentos nodais  $u_i, v_i, w_i, \alpha_i$  e  $\beta_i$  e dos parâmetros hierárquicos  $a_{kj}, b_{kj}, c_{kj}, a_k, b_k$  e  $c_k$ .

De acordo com as hipóteses básicas da teoria de placa e casca (Timoshenko *et al.*, 1959) e em função da solicitação do elemento, um ponto genérico vai apresentar, segundo o sistema de referência local ( $x', y', z'$ ), a ele associado, o seguinte estado de deformação específica:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y'} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z'} & \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & \frac{\partial}{\partial x'} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ou ainda,

$$\{\varepsilon'\} = [L] \cdot \{u'\} \quad (5)$$

onde,  $\{u'\}$  corresponde aos deslocamentos segundo o sistema de referência local e  $[L]$  é o operador linear. Os deslocamentos  $\{u'\}$  podem ser dados em função dos deslocamentos globais  $\{u\}$  de acordo com a seguinte expressão:

$$\{u'\} = [\theta]^T \cdot \{u\} \quad (6)$$

sendo que  $[\theta]$  é uma matriz (3×3) constituída dos cossenos diretores do sistema de referência local com relação ao sistema de referência global. Pode-se rescrever a Eq.(6) como:

$$\{\varepsilon'\} = [L] \cdot [\theta]^T \cdot \{u\} = [L] \cdot [\theta]^T \cdot [N] \cdot \{a\} \quad (7)$$

Definindo-se como  $[B]$  a matriz que relaciona as deformações específicas com os deslocamentos e as rotações nodais, tem-se que:

$$[B] = [L] \cdot [\theta]^T \cdot [N] \quad (8)$$

ou, de uma maneira compacta,

$$\{\varepsilon'\} = [B] \cdot \{a\} \quad (9)$$

onde  $\{\varepsilon'\}$  é uma matriz coluna (5×1), constituída das deformações específicas e distorções em um ponto genérico do elemento segundo o sistema de referência local,  $[B]$  uma matriz (5×87) constituída das derivadas das funções de forma e  $\{a\}$  uma matriz coluna (87×1) constituída dos deslocamentos nodais e dos parâmetros hierárquicos.

Aplicando o princípio do trabalho virtual, o qual estabelece a igualdade entre o trabalho virtual e a energia de deformação virtual ( $\delta W = \delta U$ ), chega-se à determinação da matriz de rigidez do elemento e do seu vetor de carga:

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (10)$$

$$\{f_b^e\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \cdot \{b\} \cdot |J(\xi, \eta)| \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (11)$$

$$\{f_q^e\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \cdot \{q\} \cdot r_3(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (12)$$

onde,  $[D]$  é uma matriz quadrada ( $5 \times 5$ ), simétrica, constituída das constantes elásticas do material,  $|J(\xi, \eta)|$ , o determinante da matriz jacobiano da transformação global-local,  $r_3(\xi, \eta)$ , o módulo do vetor  $\vec{r}_3(\xi, \eta)$  normal à superfície média. De uma forma compacta, pode-se escrever que:

$$[K^e] \cdot \{a\} = \{f_q^e\} + \{f_b^e\} + \{f_r^e\} \quad (13)$$

onde  $[K^e]$  é a matriz de rigidez do elemento,  $\{a\}$  é um vetor coluna constituído dos deslocamentos nodais e dos parâmetros hierárquicos,  $\{f_q^e\}$  é o vetor de carga correspondente às cargas distribuídas nas faces externas do elemento,  $\{f_b^e\}$  é o vetor de carga correspondente à ação das forças de corpo e  $\{f_r^e\}$  o vetor de carga correspondente às cargas concentradas.

A Equação (10) uma vez resolvida, leva à matriz de rigidez do elemento, que é dada por:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{ij}] & [K_{i,mn}] & [K_{im}] \\ [K_{kl,j}] & [K_{kl,mn}] & [K_{kl,m}] \\ [K_{k1}] & [K_{k,mn}] & [K_{km}] \end{bmatrix} \quad (14)$$

A submatriz  $[K_{ij}]$  está relacionada com os nós  $i$  e  $j$ , sendo que tanto  $i$  quanto  $j$  variam de 1 a 9; e caracteriza o elemento isoparamétrico. A submatriz  $[K_{i,mn}]$  está relacionada com o nó  $i$ , o grau  $m$  e o lado  $n$ , sendo que  $i$  varia de 1 a 9,  $m$  de 3 a 5 e  $n$  de 1 a 4; e caracteriza o acoplamento entre o elemento isoparamétrico e a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados. A submatriz  $[K_{im}]$  está relacionada com o nó  $i$  e o grau  $m$ , sendo que  $i$  varia de 1 a 9 e  $m$  de 3 a 5; e caracteriza o acoplamento entre o elemento isoparamétrico e a parte do elemento hierárquico correspondente ao refinamento do elemento. A submatriz  $[K_{kl,mn}]$  está relacionada com o grau  $k$ , o lado  $l$ , o grau  $m$  e o lado  $n$ , sendo que  $k$  e  $m$  variam de 3 a 5 e  $l$  e  $n$  variam de 1 a 4; e caracteriza o elemento hierárquico correspondente ao refinamento de seus lados. A submatriz  $[K_{kl,m}]$  está relacionada com o grau  $k$ , o lado  $l$  e o grau  $m$ , sendo que  $k$  varia de 3 a 5,  $l$  de 1 a 4 e  $m$  de 4 a 5; e caracteriza o acoplamento entre o e o elemento hierárquico correspondente ao refinamento do elemento. A submatriz  $[K_{km}]$  está relacionada com o grau  $k$  e o grau  $m$ , sendo que  $k$  e  $m$  variam de 4 a 5; e caracteriza o elemento hierárquico correspondente ao refinamento do elemento.

O número de pontos de integração utilizados neste trabalho para interpolar as submatrizes de rigidez, são os seguintes: 3×3 para  $[K_{ij}]$ ,  $[K_{i,3n}]$ ,  $[K_{i,4n}]$ ,  $[K_{3l,3n}]$  e  $[K_{3l,4n}]$ , 4×4 para  $[K_{i,5n}]$ ,  $[K_{4l,4n}]$ ,  $[K_{3l,5n}]$  e  $[K_{4l,5n}]$ , e 5×5 para  $[K_{5l,5n}]$ .

Encontradas as equações algébricas que descrevem as características de cada elemento do sistema estrutural, o próximo passo é combiná-las para formar um conjunto completo de equações, que governe a reunião de todos os elementos. O procedimento de montagem deste conjunto de equações é baseado na necessidade de que o *equilíbrio* se verifique por todo o sistema. Pode-se, portanto, escrever que:

$$[K] \cdot \{a\} = \{f\} \quad (15)$$

onde,  $[K]$  é a matriz de rigidez global do sistema,  $\{a\}$ , o vetor relacionado com os deslocamentos nodais e  $\{f\}$  é o vetor de carga global do sistema.

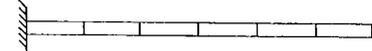
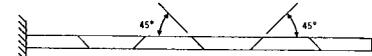
### 3. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos a partir do elemento finito hierárquico proposto para placas e cascas com algumas configurações de condições de contorno e relações entre espessura e dimensão característica. Procurou-se avaliar a característica do elemento quanto à convergência com o refinamento da malha de discretização e sua sensibilidade quanto à distorção da malha. Foi feito, ainda, além da comparação dos resultados obtidos nas análises isoparamétrica ( $p=2$ ) e hierárquica de 3° ( $p=3$ ), 4° ( $p=4$ ) e 5° graus ( $p=5$ ), a comparação com os resultados obtidos analítica ou experimentalmente disponíveis na literatura. Os resultados apresentados foram normalizados dividindo-se o deslocamento calculado pelo deslocamento "exato" (obtido na literatura).

#### 3.1 Viga reta

A viga reta proposta por MacNeal *et al.* (1985) é um teste simples frequentemente utilizado para avaliar a sensibilidade do elemento quanto à distorção da malha. As características da viga são: comprimento=6.0, largura=0.2, espessura  $t=0.1$ ,  $E=1.0 \times 10^7$ ,  $\nu=0.30$  e carregamento unitário no lado livre. Foram utilizadas três malhas 6x1 distintas: malha regular, malha trapezoidal e malha paralelograma; e impostas quatro condições de carregamento: flexão no plano, flexão fora do plano, torção e flexão pura. Os resultados obtidos (Tabela 1) foram normalizados utilizando a solução analítica para vigas.

Tabela 1. Deslocamento normalizado da viga reta com malhas e carregamentos variados.

MALHA	CARREGAMENTO	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
	Flexão no plano	0.9901	1.0048	1.0048	1.0058
	Flexão fora do plano	0.9883	0.9941	0.9941	0.9941
	Torção	0.8756	0.8782	0.8804	0.8704
	Flexão pura	0.9312	0.9371	0.9371	0.9382
	Flexão no plano	0.4052	0.9792	0.9991	0.9093
	Flexão fora do plano	0.4358	0.7042	0.7206	0.7244
	Torção	1.2373	0.8686	1.1003	1.1676
	Flexão pura	0.6618	0.9229	0.9318	0.9554
	Flexão no plano	0.9397	1.0047	1.0053	1.0073
	Flexão fora do plano	0.9360	0.9940	0.9940	0.9940
	Torção	0.8477	0.8699	0.8933	0.8528
	Flexão pura	0.9310	0.9460	0.9477	0.9687

### 3.2. Casca cilíndrica submetida à ação de seu peso próprio

O problema da casca cilíndrica "Scordelis Lo roof", mostrado na Fig.1, representa um teste crítico para avaliar a habilidade do elemento finito de casca representar estados complexos de tensão axial (tensão de membrana). Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um quarto da casca, utilizando malhas de discretização de  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$ ,  $5 \times 5$ ,  $6 \times 6$ ,  $7 \times 7$  e  $8 \times 8$  elementos. Apresentam-se, de acordo com o sistema de referência global apresentado na Fig.1, as curvas de convergência para os

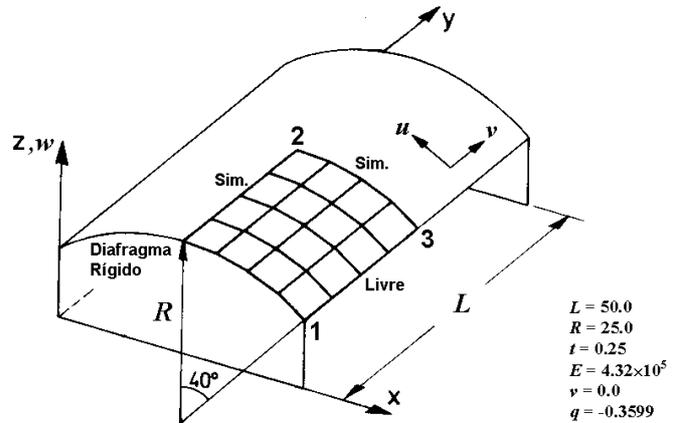


Figura 1 - Casca cilíndrica submetida à ação do seu peso próprio

deslocamentos normalizados  $v_1$  do nó 1 (Fig.2),  $w_2$  do nó 2 (Fig.3) e  $w_3$  do nó 3 (Fig.4). Os gráficos têm na ordenada o deslocamento normalizado e na abscissa o número de graus de liberdade correspondente a cada malha de discretização. A solução analítica (Scordelis *et al.*, 1964) é:  $v_1=0.0125$ ,  $w_2=0.04051$  e  $w_3=-0.3081$ .

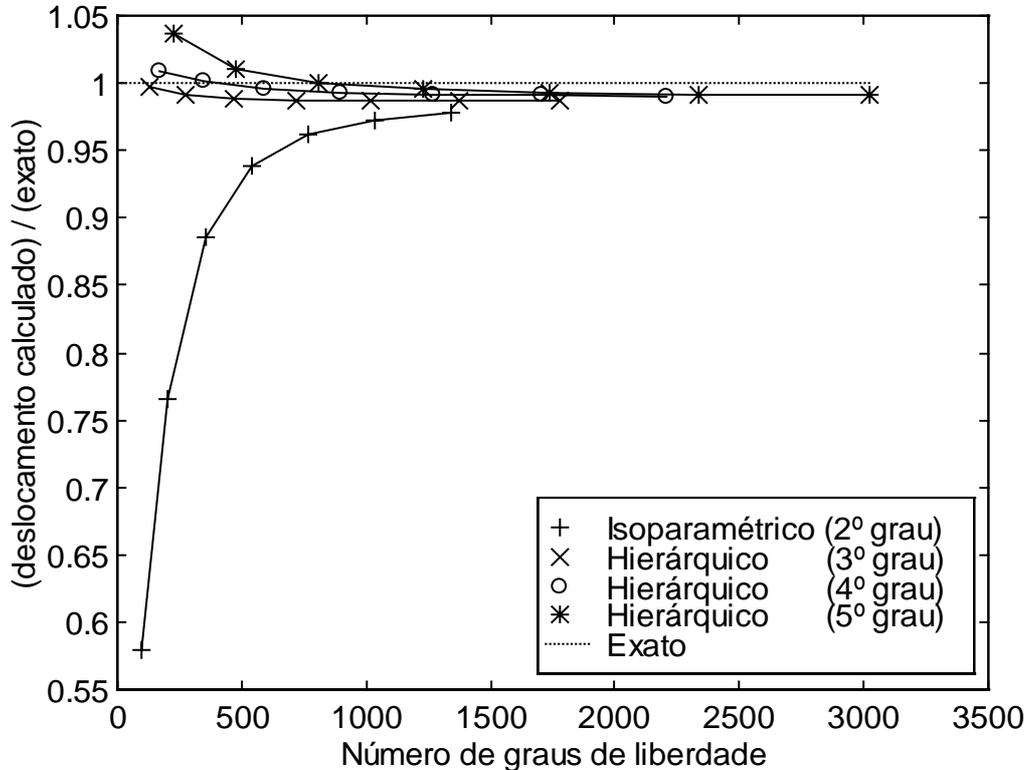


Figura 2 - Deslocamento  $v_1$  normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.

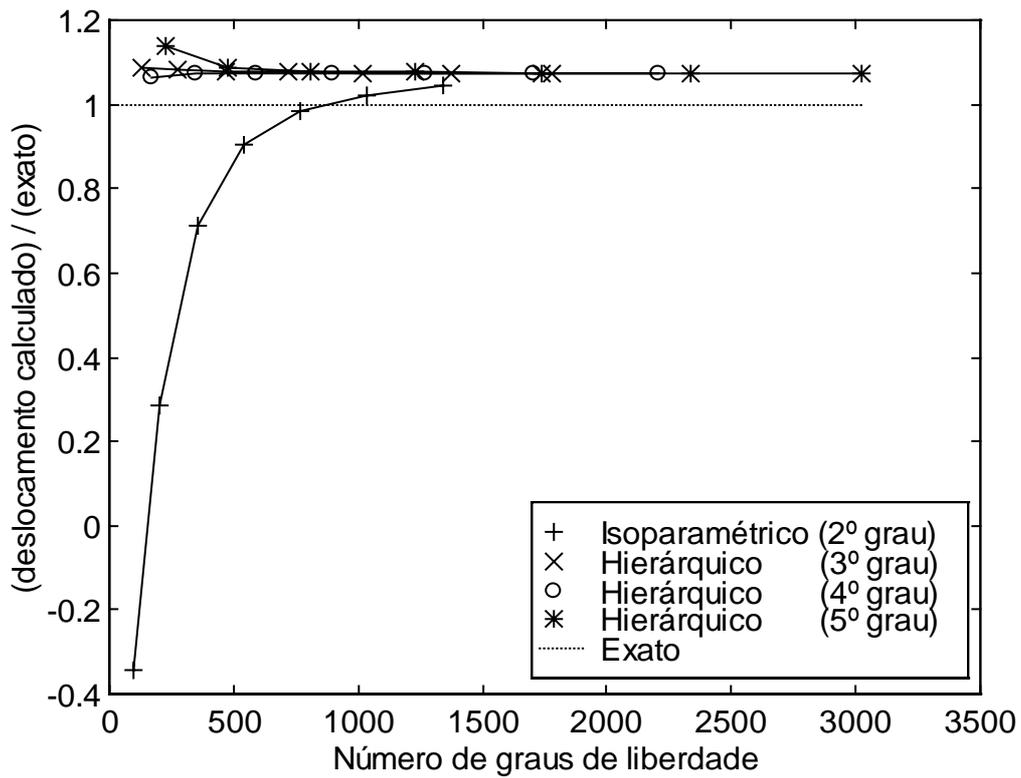


Figura 3 - Deslocamento  $w_2$  normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.

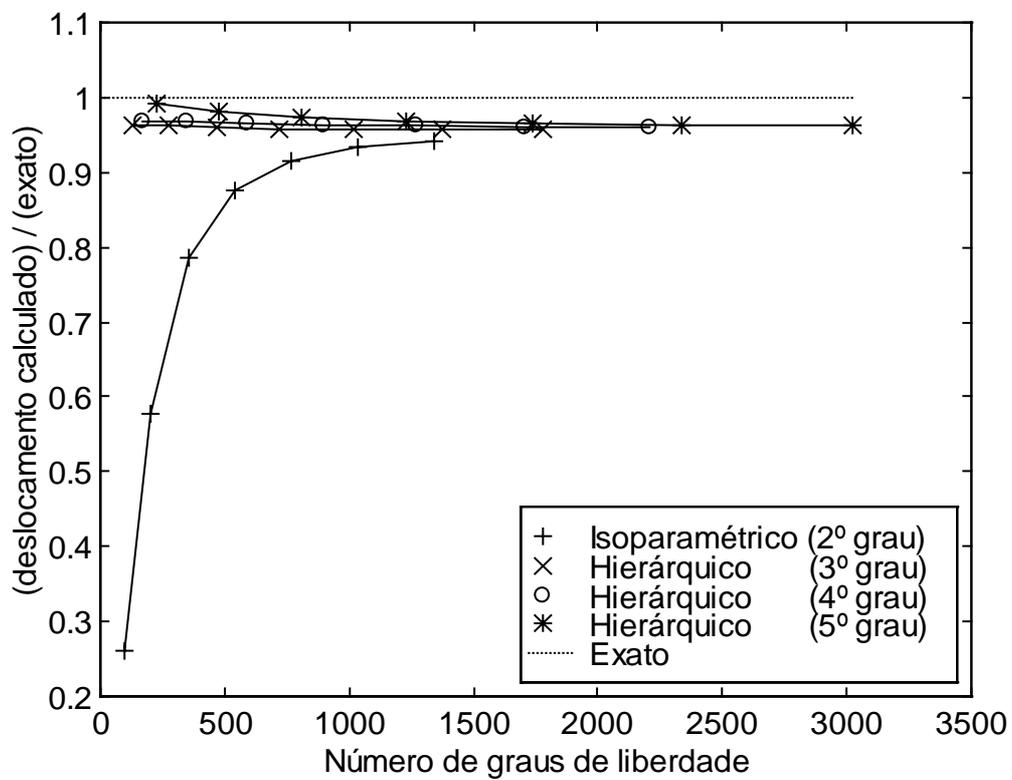


Figura 4 - Deslocamento  $w_3$  normalizado da casca cilíndrica submetida ao seu peso próprio.

### 3.3. Cilindro puncionado com carga concentrada unitária

O problema do cilindro puncionado suportado por diafragmas rígidos em suas extremidades (Fig.5) representa um teste severo para avaliar a habilidade do elemento finito de casca representar estados complexos de tensão axial (tensão de membrana) e tensão de flexão. Em função da simetria geométrica e de carregamento, modelou-se apenas um oitavo do cilindro, utilizando malhas de discretização de  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ ,  $4 \times 4$ ,  $5 \times 5$ ,  $6 \times 6$ ,  $7 \times 7$  e  $8 \times 8$  elementos. A Figura 6 apresenta as curvas de convergência para os deslocamentos normalizados  $w_A$  do ponto A. O gráfico têm na ordenada o deslocamento normalizado e na abscissa o número de graus de liberdade correspondente a cada malha de discretização. A solução analítica (Flügge, 1962) é:  $w_A=0.18248$ .

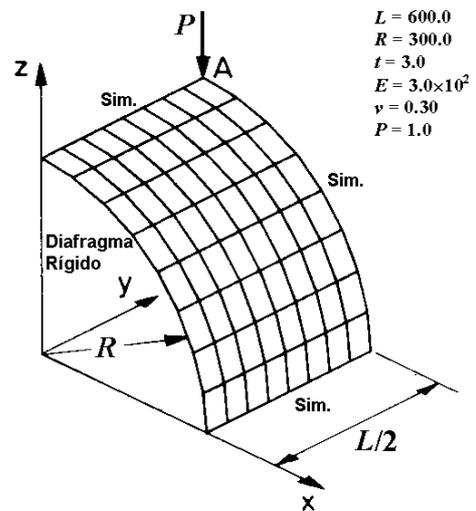


Figura 5 - Cilindro puncionado

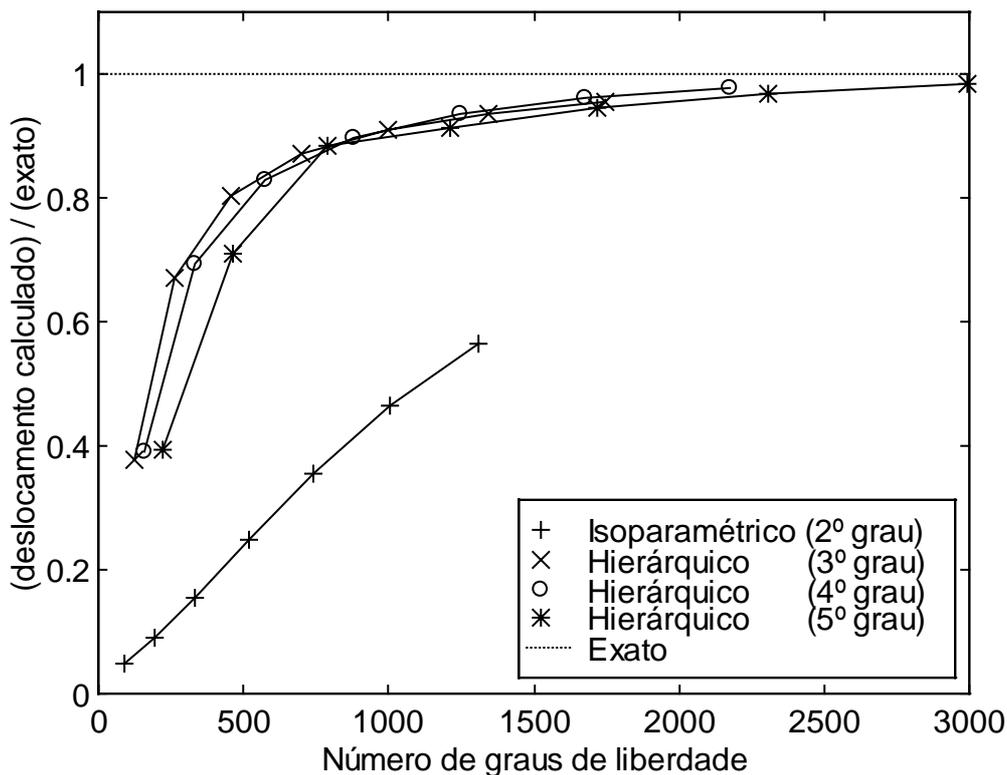


Figura 6 - Deslocamento normalizado  $w_A$  para o cilindro puncionado.

### 4. CONCLUSÕES

A partir dos resultados dos exemplos numéricos, verifica-se que o refinamento da solução do elemento isoparamétrico, através da introdução de polinômios de terceiro ( $p=3$ ), quarto ( $p=4$ ) e quinto ( $p=5$ ) graus, apresenta excelentes resultados. O elemento proposto mostrou ser

relativamente insensível quanto à distorção da malha. Pode-se observar também que a convergência com o refinamento da malha é muito boa, apresentando resultados semelhantes para  $p=3$ , 4 e 5, o que pode representar um ganho computacional, uma vez que, bons resultados são obtidos fazendo somente o refinamento de terceiro grau. Os resultados obtidos mostram que o novo elemento não apresenta os problemas de bloqueio e modos próprios, contudo, um estudo mais amplo deve ser realizado para mostrar a precisão, eficiência e vantagens da presente formulação.

## REFERÊNCIAS

- Babuska, I., Szabo, B.A. & Katz, I.N., 1981, The p-version of the finite element method, SIAM J. Num. Anal., vol.21, n.6, pp.1180-1207.
- Bathe, K.J. & Dvorkin, E.N., 1985, A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation, Int. J. Num. Meth. Engng., vol.21, pp.367-383.
- Bathe, K.J. & Dvorkin, E.N., 1986, A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components, Int. J. Num. Meth. Engng., vol.22, pp.697-722.
- Cook, W.A., 1981, The effect of geometric shape on two-dimensional finite elements. CAFEM 6, Proc. 6th Int. Seminar on Computational Aspects of the FEM, Paris.
- Flügge, N., 1962, Stresses in shells, Springer-Verlag
- MacNeal, R.H. & Harder, R.L., 1985, A proposed standard set problems to test finite element accuracy, Finite Elements in Analysis and Design, vol.1, pp.3-20.
- Oñate, E., 1992, Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos - análisis estático lineal, CIMNE, Barcelona.
- Park, K.C. & Stanley, G.M., 1986, A curved  $C^0$  shell element based on assumed natural-coordinate strains, J. Appl. Mech., vol.53, pp.278-290.
- Pugh, E., Hinton, E. & Zienkiewicz, O.C., 1978, A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration, Int. J. Num. Meth. Engng., vol.12, pp.1959-1979.
- Scordelis, A.C. & Lo, K.S., 1964, Computer analysis of cylindrical shells, J. Am. Concr. Inst., vol.61, pp.593-561.
- Verheghe, B. & Powell, 1986, Control of zero-energy in 9-node plane element, Int. J. Num. Meth. Engng., vol.23, pp.863-869.
- Zienkiewicz, O.C. & Morgan, K., 1983, Finite elements and approximation, John Wiley & Sons, New York.
- Zienkiewicz, O.C., 1977, The finite element method, 3rd ed., McGraw-Hill, New York.

## THE HIERARCHICAL NINE-NODE SHELL FINITE ELEMENT

**Abstract.** *The paper presents a hierarchical formulation based on the p-version concept. The first level of approximation of the solution is obtained through the isoparametric quadrilateral quadratic nine-node Lagrangean shell finite element, from the Reissner Mindlin's formulation, with consistent numerical integration. For others approximation levels, successive hierarchical refinements are used, objectifying to remove the characteristics of excessive rigidity of the isoparametric element for the analysis of thin plates and shells. Numerical examples are presented to show the accuracy, efficiency and advantages of the present formulation, the results obtained are compared with those available in the literature.*

**Key words:** *Finite element, p-version, Numerical integration, Shell.*